Exercices : révisions probabilités

EXERCICE 1 correction Amérique du Nord 2007

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1. On appelle :

E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;

E_2 l'évènement « le joueur perd la deuxième partie » ;

E_3 l'évènement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

(a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

(b) Montrer que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'évènement $(X = 3)$ est égale à $0,002$.

(c) Déterminer la loi de probabilité de X.

(d) Calculer l'espérance de X.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'évènement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'évènement contraire, et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

(a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des évènements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.

(b) En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.

(a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

(c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 correction Asie 2007

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.
Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

(a) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

(b) Démontrer que $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \frac{1}{4}$.

(c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. Calcul de probabilités.

(a) Démontrer que $p(S) = 0,934$.

(b) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième,)

3. Étude d'une variable aléatoire B.
Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.
On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

(b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

4. Étude d'une nouvelle variable aléatoire. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.
Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

EXERCICE 3 correction **Amérique du Nord 2011**

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

(a) On considère un lot de 10 ordinateurs.

Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

(b) Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à $0,999$?

Exercice 4 correction

1. Une coopérative de fruits doit calibrer sa production de cerises pour un fabricant de fruits confits. Le diamètre des cerises, en millimètre, est une variable aléatoire, notée D, qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(22\,;1,62^2\right)$. Pour effectuer le tri, les cerises sont placées sur un tapis roulant à travers deux calibreuses : la première ne laisse passer que les cerises de diamètres inférieurs à 23 mm et la seconde est réglée pour laisser passer les cerises de diamètres inférieurs à 21 mm . Les cerises acceptées sont celles qui passent le premier calibre et sont rejetées par le second calibre.

(a) Quelle est la probabilité qu'une cerise soit acceptée ?

(b) Quelle est la probabilité qu'une cerise ne passe pas le premier calibre ?

(c) Quelle est la probabilité qu'une cerise ayant passé le premier calibre passe le second calibre ?

2. La coopérative reçoit une nouvelle commande pour un fabricant de fruits surgelés. Il s'agit de sélectionner les 10 % de cerises au diamètre le plus large. Pour faire cela, elle installe une troisième calibreuse avant les deux autres.

(a) À quel diamètre la coopérative doit-elle régler la nouvelle calibreuse ?

(b) Les cerises qui ne sont pas sélectionnées ni pour le confisage ni pour la congélation sont gardées pour la fabrication de fruits au sirop. Donner sous forme d'intervalle les diamètres de ces cerises.

3. On admet que la coopérative vend chaque année à ses différents commanditaires un nombre X de cerises, exprimé en tonnes. X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\sigma^2\right)$. La probabilité que ce nombre soit inférieur à $11\,000$ est de $0,1$ et la probabilité que ce nombre soit supérieur à $21\,000$ est de $0,2$.

(a) Déterminer un système d'équations vérifié par μ et σ, puis déterminer μ et σ.

(b) La coopérative réalise pour chaque tonne vendue une marge de 12 €. Les charges annuelles à payer par la coopérative sont de 190 000 €.

Quel est la probabilité que l'entreprise ne fasse pas de perte cette année ?

Exercice 5 correction Nouvelle Calédonie mars 2014

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\ 1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\ +\infty[$ par

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?

2. Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. À l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x, $H(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\,;\ +\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\,;\ +\infty[$.

5. Démontrer alors le théorème énoncé.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.
60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.
Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'évènement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?

2. Montrer que $p(B\cap D) = 0{,}0224$.

3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

Partie C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres).
On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1{,}0424$.

1. Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ? On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice.

Contenance x (en mL)	95	96	97	98	99
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,000 00	0,000 04	0,001 65	0,025 06	0,163 68
Contenance x (en mL)	100	101	102	103	104
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,5	0,836 32	0,974 94	0,998 35	0,999 96

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0{,}05$.

2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

(a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?

(b) Vérifier que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

(c) Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

Exercice 6 correction Centres Étrangers 2016

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

(a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

(b) Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

$0,92 \qquad 0,93 \qquad 0,94 \qquad 0,95.$

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

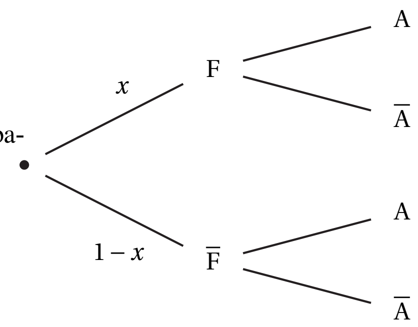
Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

2. On pose $x = P(F)$.

(a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

(b) En déduire une égalité vérifiée par x



3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Exercice 7 correction Amérique du Sud 2016

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique.
Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ :

1. Déterminer l'arrondi à 10^{-4} de σ sachant que le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2{,}4$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.

3. Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur exacte de λ, sachant que le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0{,}00127$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.

3. **(a)** Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a :
$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.

(b) Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

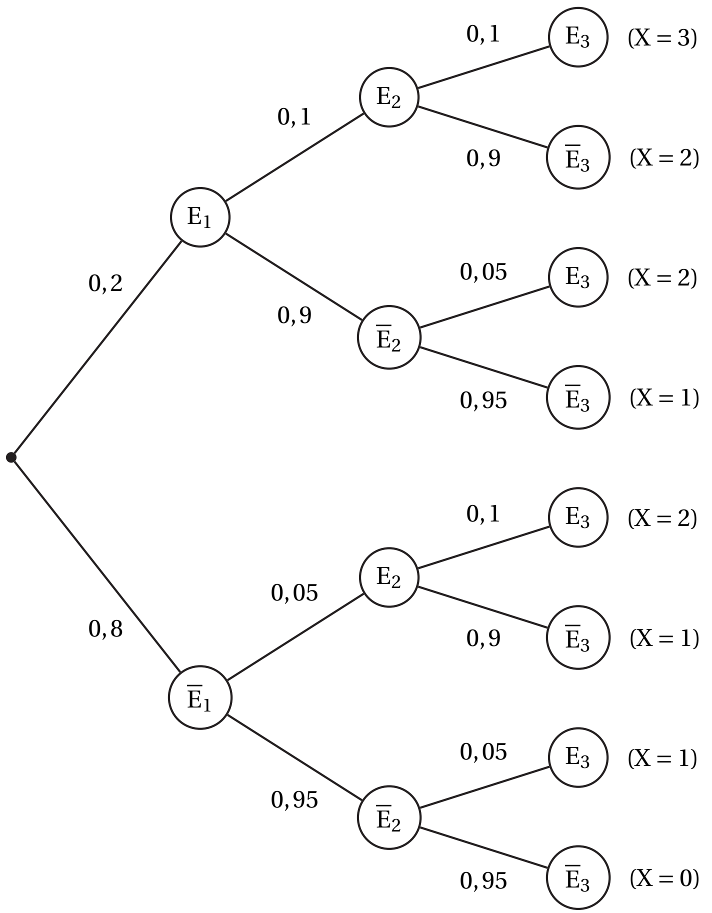
On admet que les évènements $(D \geqslant 48)$ et $(T \geqslant 48)$ sont indépendants.
Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.
Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$? Justifier la réponse.

Correction

Exercice 1 énoncé Amérique du Nord 2007



1. Représentons un arbre : (voir ci-dessus)

X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

(a) X peut prendre les valeurs 0, 1 , 2 ou 3.

(b) $(X = 2) = (E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \cup (E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3)$.
C'est une réunion d'événements incompatibles, donc :
$p(X = 2) = p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + p(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + p(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) = (0,2 \times 0,1 \times 0,9) + (0,2 \times 0,9 \times 0,05) + (0,8 \times 0,05 \times 0,1) = 0,031$.
$p(X = 2) = \boxed{0,031}$.

De même : $p(X = 3) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0,2 \times 0,1 \times 0,1 = \boxed{0,002}$.

(c) $p(X = 0) = p(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = 0,8 \times 0,95 \times 0,95 = \boxed{0,722}$.

$p(X = 1) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 2) + p(X = 3)] = 1 - (0,722 + 0,031 + 0,002) = \boxed{0,245}$.
On en déduit la loi de probabilité de X, résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,722	0,245	0,031	0,002

(d) L'espérance de X est

$E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i p(X = x_i) = (0 \times 0,722) + (1 \times 0,245) + (2 \times 0,031) + (3 \times 0,002) = 0,313$.
$\boxed{E(X) = 0,313}$.

2. (a) Pour tout n non nul, $p(E_n \cap E_{n+1}) = p_{E_n}(E_{n+1}) \times p(E_n) = 0,1 \times p(E_n) = \boxed{0,1 p_n}$.

De même : $p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \times p(\overline{E_n}) = 0,05 \times (1 - p(E_n)) = \boxed{0,05(1 - p_n)}$.

(b) On a : $E_{n+1} = (E_n \cap E_{n+1}) \cup (\overline{E_n} \cap E_{n+1})$ car E_n et $\overline{E_n}$ forment un système complet d'événements.

Par conséquent : $p_{n+1} = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = 0,1 p_n + 0,05(1 - p_n) = \boxed{0,05 p_n + 0,05}$

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.

(a) Pour tout $n \neq 0$, $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = 0,05 p_n + 0,05 - \frac{1}{19} = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{20} - \frac{1}{19} = \frac{1}{20} p_n - \frac{1}{380} = \frac{1}{20}\left[p_n - \frac{1}{19}\right] = \frac{1}{20} u_n$.
Pour tout $n \neq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{20} u_n$ donc (u_n) est une suite **géométrique**, de raison $q = \frac{1}{20}$ et de premier terme

$u_1 = p_1 - \dfrac{1}{19} = 0,2 - \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{19} = \dfrac{14}{95}$.

(b) On en déduit : $p_n = p_1 q^{n-1}$ donc $p_n = \dfrac{14}{95}\left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}$ et $p_n = u_n + \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{19} + \dfrac{14}{95}\left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}$.

(c) $-1 < \dfrac{1}{20} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1} = 0$ et par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \boxed{\dfrac{1}{19}}$.

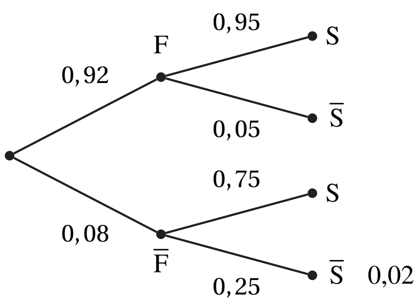
Exercice 2 énoncé **Asie 2007**

1. (a) On a $p(\mathrm{F}) = 0,92$; $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{S}) = 0,95$; $p\left(\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{S}}\right) = 0,02$.

(b) $p(\mathrm{F}) = 0,92 \Rightarrow p\left(\overline{\mathrm{F}}\right) = 0,08$.

(c) On sait que $p_{\overline{\mathrm{F}}}\left(\overline{\mathrm{S}}\right) = \dfrac{p\left(\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{S}}\right)}{p\left(\overline{\mathrm{F}}\right)} = \dfrac{0,02}{0,08} = \dfrac{1}{4} = 0,25.$

(d) Arbre pondéré :



2. (a) D'après la loi des probabilités totales on a : $p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{S} \cap \mathrm{F}) + p\left(\mathrm{S} \cap \overline{\mathrm{F}}\right) = 0,92 \times 0,95 + 0,08 \times 0,75 = 0,874 + 0,06 = 0,934$.

(b) Il faut trouver la probabilité conditionnelle $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{S} \cap \mathrm{F})}{p(\mathrm{S})} = \dfrac{0,874}{0,934} \approx 0,9357 \approx 0,936$.

3. (a) Loi de probabilité de B :

évènement	$\mathrm{F} \cap \mathrm{S}$	$\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{S}$	reste
probabilité	0,874	0,06	0,066
bénéfice : b €	10	5	0

(b) On a $\mathrm{E}(\mathrm{B}) = 0,874 \times 10 + 0,06 \times 5 + 0,166 \times 0 = 8,74 + 0,30 = 9,04$ € (ce qui représente le bénéfice moyen par jouet).

4. On a une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et de probabilité $p(\mathrm{S}) = 0,934$.

La probabilité cherchée est égale à celle d'avoir 8, 9 ou 10 jouets solides, soit :

$$\binom{10}{8} 0,934^8 \times (1 - 0,934)^2 + \binom{10}{9} 0,934^9 \times (1 - 0,934)^1 + \binom{10}{10} 0,934^{10} \times (1 - 0,934)^0 =$$

$$0,113521 + 0,356998 + 0,505206 \approx 0,975725 \approx 0,976.$$

Exercice 3 énoncé **Amérique du Nord 2011**

1. On a $p(X>5)=1-p(X\leqslant 5)$. Donc :

$p(X>5)=0,4 \iff 1-p(X\leqslant 5)=0,4 \iff 0,6=p(X\leqslant 5) \iff 0,6=\displaystyle\int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}\,dx \iff 0,6=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5 \iff 0,6=-e^{-5\lambda}+1 \iff e^{-5\lambda}=0,4 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $-5\lambda=\ln 0,4 \iff \lambda=\dfrac{\ln 0,4}{-5}$.

Or $\dfrac{\ln 0,4}{-5}\approx 0,183$ à 10^{-3} près.

2. Il faut calculer : $p_{(X>3)}(X>5)=\dfrac{p(X>5)}{p(X>3)}=\dfrac{e^{-5\lambda}}{e^{-3\lambda}}=e^{-2\lambda}=e^{-0,36}\approx 0,698$.

3. (a) On fait 10 fois le même tirage de façon indépendante. On a donc une loi binomiale de paramètre 10 et $0,4$. La probabilité cherché est donc le complément à 1 de la probabilité de n'avoir aucun ordinateur en état de marche soit :

$1-(0,6)^{10}\approx 0,994$ à 10^{-3} près.

(b) Avec n ordinateurs on a à résoudre l'inéquation :

$1-0,6^n\geqslant 0,999 \iff 0,001\geqslant 0,6^n \iff \ln 0,001\geqslant n\ln 0,6 \iff$

$n\geqslant \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}$. Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}\approx 13,5$.

Le nombre minimal est donc 14 ordinateurs.

Exercice 4 énoncé

1. (a) La probabilité qu'une cerise soit acceptée est $P(21 \leqslant D \leqslant 23)$. Avec la calculatrice, on détermine $P(21 \leqslant D \leqslant 23) \approx 0,46$.

(b) La probabilité qu'une cerise ne passe pas le premier calibre est $P(D \geqslant 23)$. À l'aide de la calculatrice on détermine $P(D \geqslant 23) \approx 0,27$.

(c) Il s'agit de calculer $P_{D\leqslant 23}(D \leqslant 21)$. On a

$$\begin{aligned} P_{D\leqslant 23}(D \leqslant 21) &= \frac{P((D \leqslant 21) \cap (D \leqslant 23))}{P(D \leqslant 23)} \\ &= \frac{P(D \leqslant 21)}{P(D \leqslant 23)} \\ &\approx 0,37 \end{aligned}$$

2. (a) Le diamètre d de la nouvelle calibreuse doit être tel que $P(D \geqslant d) = 0,1$, c'est à dire, comme $P(D \geqslant d) = 1 - P(D \leqslant d)$, tel que $P(D \leqslant d) = 0,9$.

À l'aide de la calculatrice on détermine $d \approx 24,076$.

(b) L'intervalle est $[0\,;21] \cup [23\,;d]$ où $d \approx 24,076$.

3. D'après l'énoncé $P(X \leqslant 11\,000) = 0,1$ et $P(X \geqslant 21\,000) = 0,2$ ou, ce qui est équivalent, $P(X \leqslant 21\,000) = 0,8$.

On a d'une part,

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 11\,000) &= P\left(X - \mu \leqslant 11\,000 - \mu\right) \\ &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{11\,000-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 21\,000) &= P\left(X - \mu \leqslant 21\,000 - \mu\right) \\ &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{21\,000-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

La variable aléatoire Y définie par $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Notons y_1 le nombre tel que $P\left(Y \leqslant y_1\right) = 0,1$ et y_2 le nombre tel que $P\left(Y \leqslant y_2\right) = 0,8$.

À l'aide de la calculatrice on obtient : $y_1 \approx -1,282$ et $y_2 \approx 0,842$.

μ et σ vérifient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{11\,000-\mu}{\sigma} = y_1 \\ \dfrac{21\,000-\mu}{\sigma} = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{11\,000-\mu}{\sigma} = y_1 \\ \dfrac{21\,000-\mu}{\sigma} = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu + y_1\sigma = 11\,000 \\ \mu + y_2\sigma = 21\,000 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(y_2 - y_1\right)\sigma = 10\,000 & (L_1 \leftarrow L_2 - L_1) \\ \mu + y_2\sigma = 21\,000 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sigma = \dfrac{10\,000}{y_2 - y_1} \\ \mu = \dfrac{10\,000\,y_2 - 21\,000\,y_1}{y_2 - y_1} \end{cases}$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient $\sigma \approx 4\,708{,}10$ et $\mu \approx 16\,639{,}36$.

4. Il s'agit de calculer $P(12X - 190\,000 \geqslant 0)$.

$$\begin{aligned} P(12X - 190\,000 \geqslant 0) &= P\left(X \geqslant \frac{190\,000}{12}\right) \\ &\approx 0,568 \end{aligned}$$

Exercice 5 énoncé **Nouvelle Calédonie mars 2014**

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

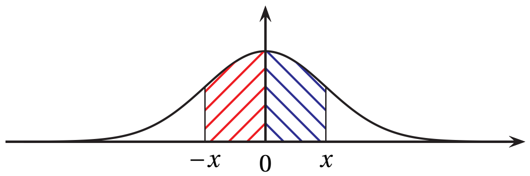
Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction f représente la fonction de densité de probabilité pour la loi normale centrée réduite.

2. $H(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$; et d'après le cours $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$.

3. D'après la relation de Chasles : $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais la fonction f est positive donc $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire du domaine hachuré en rouge sur la figure ci-dessous, tandis que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire du domaine hachuré en bleu.



De plus la fonction f est paire, donc ces deux aires sont égales.

Enfin $H(x)$ est l'aire du domaine situé sous la courbe représentant f hachuré en rouge et en bleu sur la figure.

Donc $H(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. On sait que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée la fonction f ; donc la fonction H définie par $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée la fonction $2f$.

Or $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} > 0$ sur $\mathbb{R}$; comme $H' = 2f$, $H'(x) > 0$ pour tout réel x, et donc la fonction H est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. On établit le tableau de variations de H sur $[0\,;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$H'(x)$		$+$	
$H(x)$	0	$\nearrow$	1

5. En prenant α dans l'intervalle $]0\,;1[$, on a aussi $1-\alpha$ dans l'intervalle $]0\,;1[$; on complète le tableau de variations de H :

x	0		χ_α		$+\infty$
$H(x)$	0	$\nearrow$	$1-\alpha$	$\nearrow$	1

D'après le tableau de variations, il existe un réel strictement positif unique noté χ_α tel que $H\left(\chi_\alpha\right) = 1-\alpha$, donc tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.
60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.
Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'événement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A est $P_D(A)$.

$$P_D(A) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\times P_A(D)}{P(D)} = \frac{0{,}6\times 0{,}046}{0{,}05} = 0{,}552$$

2. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P(D)} = \mathrm{P(A \cap D)} + \mathrm{P(B \cap D)} \iff 0,05 = 0,6 \times 0,046 + \mathrm{P(B \cap D)} \iff 0,05 - 0,0276 = \mathrm{P(B \cap D)}$$

Donc $\mathrm{P(B \cap D)} = 0,0224$.

3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, la probabilité qu'une pipette présente un défaut est $\mathrm{P_B(D)}$. Or $\mathrm{P(B)} = 1 - \mathrm{P(A)} = 1 - 0,6 = 0,4$.

$$\mathrm{P_B(D)} = \frac{\mathrm{P(B \cap D)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{0,0224}{0,4} = 0,056.$$

Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, le pourcentage de pipettes présentant un défaut est donc de $5,6\,\%$.

1. On cherche la probabilité qu'une pipette prise au hasard soit conforme, soit $\mathrm{P}(98 < \mathrm{X} < 102)$, en sachant que X suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1,0424$.

À la calculatrice, on trouve $0,9499$ à 10^{-4} près.

En utilisant la table fournie :

$$\mathrm{P}(98 < \mathrm{X} < 102) = \mathrm{P}(\mathrm{X} < 102) - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 98) \approx 0,97494 - 0,02506 \approx 0,94988$$

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100 et on suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

(a) Comme on peut supposer que les tirages sont indépendants, la variable aléatoire Y_n suit une loi binomiale de paramètres $n \geqslant 100$ et $p = 0,05$.

(b) On sait que $n \geqslant 100$ donc $n \geqslant 30$.

$n \geqslant 100$ et $p = 0,05$ donc $np \geqslant 100 \times 0,05 \iff np \geqslant 5$

$p = 0,05$ donc $1 - p = 0,95$; $n(1-p) \geqslant 100 \times 0,95 \iff n(1-p) \geqslant 95$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

Les trois conditions sont vérifiées.

(c) Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$ est :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence des pipettes non conformes dans un échantillon est :

$$\left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,05\,(1-0,05)}}{\sqrt{n}} \,;\, 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,05\,(1-0,05)}}{\sqrt{n}}\right] =$$
$$\left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{n}} \,;\, 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{n}}\right]$$

Exercice 6 énoncé **Centres Étrangers 2016**

Partie A

1. (a) L'expérience consistant à interroger une personne est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ en convenant d'appeler succès le fait que la personne accepte de répondre à la question. On est alors en présence d'une succession de 700 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes (puisque la probabilité qu'une personne accepte de répondre reste constante). La variable aléatoire X dénombrant les personnes ayant accepté de répondre suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

(b) D'après la calculette : $P(X \leqslant 399) \simeq 0,0573$.

Par suite :

$$P(X \geqslant 400) = P(X > 399) = 1 - P(X \leqslant 399) \simeq 0,9427$$

La meilleure valeur approchée est $0,94$

2. Lorsque n personnes sont interrogées, notons X_n la variable aléatoire égale au nombre de personnes acceptant de répondre . X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0.6$.

On cherche le plus petit entier n tel que $P(X_n \geqslant 400) > 0,9$.

Puisque

$$P(X_n \geqslant 400) > 0,9 \iff 1 - P(X_n \leqslant 399) > 0,9 \iff P(X_n \leqslant 399) < 0,1$$

la question est de déterminer, parmi les entiers n vérifiant $P(X_n \leqslant 399) < 0,1$, le plus petit.

La calculette donne $\begin{cases} P(X_{693} \leqslant 399) \simeq 0,1034 \\ P(X_{694} \leqslant 399) \simeq 0,0955 \end{cases}$

Puisque la suite $(P(X_n \leqslant 399))$ est décroissante, alors

694 est le plus petit entier n convenant

Partie B

1. Puisque $n \geqslant 50$, alors $n \times f = 0,29 \times n \geqslant 0,29 \times 50$, soit $n \times f \geqslant 14,5$

De manière analogue, $n \times (1-f) = 0,71 \times n \geqslant 0,71 \times 50$, soit $n \times (1-f) \geqslant 35,5$

Puisque $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ n \times f \geqslant 5 \\ n(1-f) \geqslant 5 \end{cases}$, les conditions d'application d'un intervalle de confiance sont vérifiées.

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, de la proportion de personnes favorables au projet est

$$\left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

2. L'amplitude de l'intervalle précédent est inférieure ou égale à $0,04$ si et seulement si

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04$$

Puisque

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \iff \frac{2}{0,04} \leqslant \sqrt{n} \overset{n>0}{\iff} n \geqslant \left(\frac{2}{0,04}\right)^2 \iff n \geqslant 2500$$

, alors

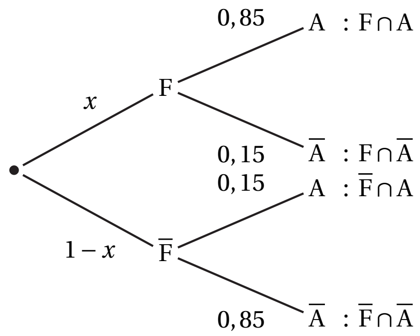
Le nombre minimum de personnes à interroger est 2 500

Partie C

1.

$$P_F(A) = 0,85 \qquad P_{\overline{F}}(A) = 0,15$$

2. (a)



(b) D'après l'arbre :

$$P(A) = P(F \cap A) + P\left(\overline{F} \cap A\right) = 0,85x + 0,15(1-x) = 0,7x + 0,15$$

Par suite :

$$0,7x + 0,15 = 0,29$$

3. La résolution de l'équation ci-dessus conduit à $x = 0,2$

Parmi les personnes ayant répondu 20 % sont réellement favorables au projet

Exercice 7 énoncé **Amérique du Sud 2016**

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique. Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ.

1. Le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$ ce qui veut dire que $P(D < 48) = 1 - 0{,}7977 = 0{,}2023$.

$D < 48 \iff D - 50 < -2 \iff \dfrac{D-50}{\sigma} < -\dfrac{2}{\sigma}$

D'après le cours, si D suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{D-\mu}{\sigma}$ suit la loi nromale centrée réduite.

On cherche donc le réel β tel que $P(Z < \beta) = 0{,}2023$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite.

À la calculatrice, on trouve $\beta \approx -0{,}8334340$ donc $\sigma \approx -\dfrac{2}{-0{,}8334340} \approx 2{,}3997$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2{,}4$.

2. La probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois est $P(45 \leqslant D \leqslant 52)$.

On trouve à la calculatrice 0,7791 comme valeur arrondie à 10^{-4} de la probabilité cherchée.

3. La probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois est $P_{(D\geqslant 48)}(D \geqslant 48+6)$:

$P_{(D\geqslant 48)}(D \geqslant 54) = \dfrac{P\left((D\geqslant 54)\cap(D\geqslant 48)\right)}{P(D\geqslant 48)}$

$P\left((D\geqslant 54)\cap(D\geqslant 48)\right) = P(D\geqslant 54) \approx 0{,}04779$ et $P(D \geqslant 48) \approx 0{,}79767$

$P_{(D\geqslant 48)}(D \geqslant 54) \approx \dfrac{0{,}04779}{0{,}79767} \approx 0{,}0599$

La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois est 0,0599.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tous réels a et b strictement positifs : $P(a \leqslant T \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

1. Le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$ donc λ vérifie l'égalité $\displaystyle\int_0^{24} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 0{,}03$ ou encore $1 - e^{-24\lambda} = 0{,}03$. On résout cette équation d'inconnue λ :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-24\lambda} = 0{,}03 &\iff 0{,}97 = e^{-24\lambda}\\ &\iff \ln(0{,}97) = -24\lambda\\ &\iff -\frac{\ln(0{,}97)}{24} = \lambda \end{aligned}$$

La valeur de λ telle que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$ est $\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}97)}{24}$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0{,}00127$.

2. $P(24 \leqslant T \leqslant 48) = e^{-24\lambda} - e^{-48\lambda} \approx 0{,}0291$

La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois est 0,0291.

3. (a) • $P(T \leqslant b) = 1 - e^{-b\lambda} \Longrightarrow P(T \geqslant b) = 1 - P(T \leqslant b) = 1 - \left(1 - e^{-b\lambda}\right) = e^{-b\lambda}$

• $h > 0 \Longrightarrow (T \geqslant t+h) \cap (T \geqslant t) = (T \geqslant t+h)$

$P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = \dfrac{P\left((T\geqslant t+h)\cap(T\geqslant t)\right)}{P(T\geqslant t)} = \dfrac{P(T\geqslant t+h)}{P(T\geqslant t)} = \dfrac{e^{-(t+h)\lambda}}{e^{-t\lambda}} = \dfrac{e^{-t\lambda}\times e^{-h\lambda}}{e^{-t\lambda}} = e^{-h\lambda} = P(T \geqslant h)$

Donc la variable aléatoire T est sans vieillissement.

(b) Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. La probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants est $P_{T\geqslant 36}(T \geqslant 36+12)$ qui est égal à $P(T \geqslant 12)$ d'après la question précédente.

$P(T \geqslant 12) = e^{-12\lambda} \approx 0{,}9849$

La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que le module électronique fonctionne encore 12 mois, sachant qu'il a déjà fonctionné 36 mois, est égale à 0,9849.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(D \geqslant 48)$ et $(T \geqslant 48)$ sont indépendants donc

$$P((D \geqslant 48) \cap (T \geqslant 48)) = P(D \geqslant 48) \times P(T \geqslant 48).$$

La probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois est

$$P((D \geqslant 48) \cap (T \geqslant 48)) = P(D \geqslant 48) \times P(T \geqslant 48) = 0{,}7977 \times e^{-48\lambda} \approx 0{,}7505$$

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.
$P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$ donc $p = 0{,}7977$
$n = 300 \geqslant 30$; $np = 239{,}31 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 60{,}69 \geqslant 5$ donc on peut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0{,}7977 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}7977(1-0{,}7977)}}{\sqrt{300}} \; ; \; 0{,}7977 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}7977(1-0{,}7977)}}{\sqrt{300}}\right] \\ &\approx [0{,}7522 \; ; \; 0{,}8432] \end{aligned}$$

La fréquence de climatiseurs ayant encore leur module mécanique en fonctionnement après 4 ans (ou 48 mois) est $f = \dfrac{246}{300} = 0{,}82$.
Or $f \in I$ donc il n'y a pas lieu de remettre en cause le résultat donné par le service statistique.