Annales 2011-2016 : fonctions

Exercice 1 correction **Antilles 2011**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^x - 1.$$

(a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.

(b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

(c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Les courbes $\mathcal{C}$ et Γ sont donnée en **annexe** .

Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.

On rappelle que pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^x > \ln(x)$.

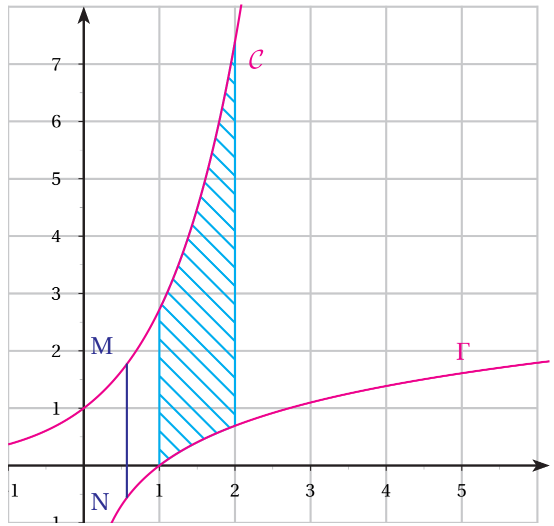
(a) Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

(b) En utilisant la question **1.**, montrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

3. (a) Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que la fonction h est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(b) Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur la figure jointe en **annexe** .

Annexe



Exercice 2 correction **Asie 2011**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Étude d'une fonction f On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée en annexe (à rendre avec la copie).

(a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

(b) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

(c) En déduire les variations de la fonction f.

2. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

(a) Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

(b) Calculer la dérivée g' de la fonction g.

(c) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. (a) Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

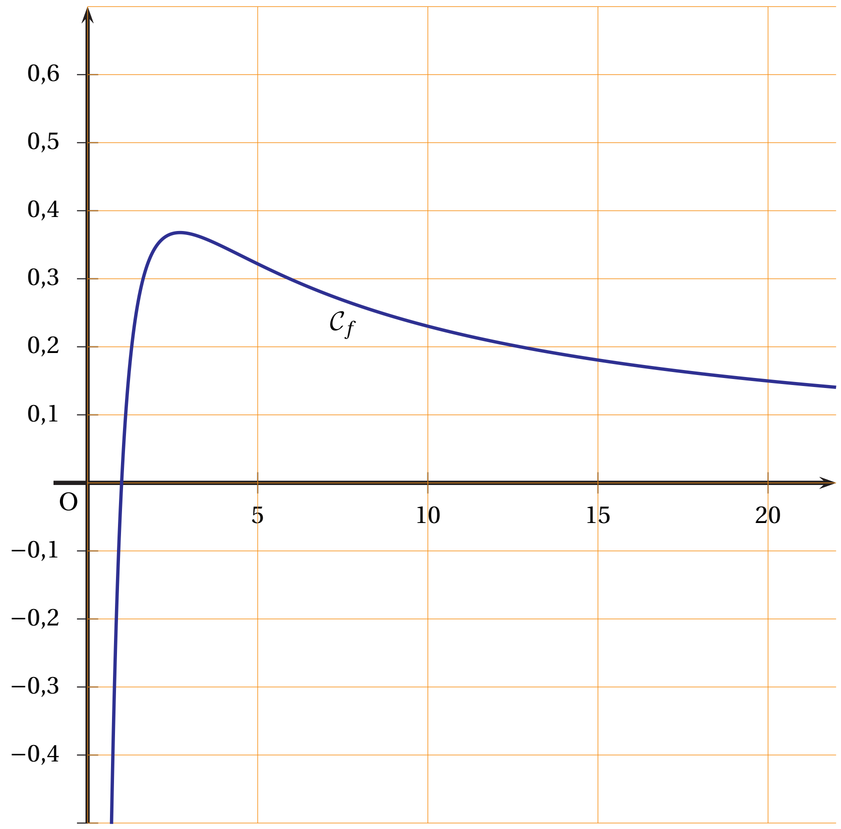
(b) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

(c) Tracer sur le graphique de l'annexe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathcal{C}_g$.

4. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\text{e}$.

En exprimant l'aire $\mathcal{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire $\mathcal{A}$.

Annexe



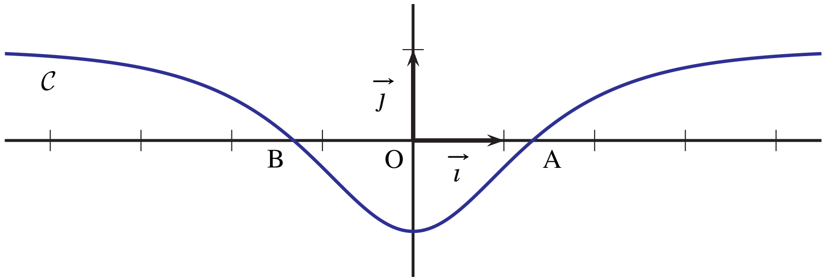
Exercice 3 correction La Réunion 2011

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x}+1}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

(a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.

Démontrer que cette conjecture est vraie.

3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.

(a) Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.

En déduire la valeur exacte de a.

(b) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2. Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leqslant F(a) \leqslant 0$.

3. On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.

(a) Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geqslant 1 - 4e^{-t}$.

(b) En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geqslant x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. *Dans cette question. toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

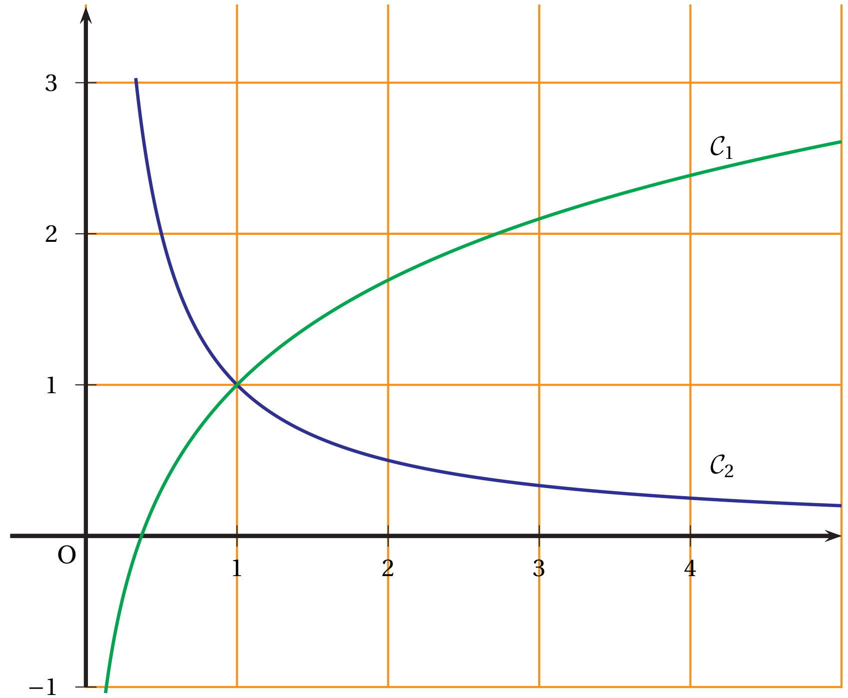
Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Exercice 4 correction **Pondichéry 2011**

Commun à tous les candidats

Partie I

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_2$
- la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$
- la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

- 0 • $+\infty$ • On ne peut pas conclure

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

- 0 • $0,2$ • On ne peut pas conclure

3. En $+\infty$, $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote oblique :

- Oui • Non • On ne peut pas conclure

4. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

•

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$+$

•

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$-$

•

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$+ 0 -$

Partie II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$ qu'on note α.

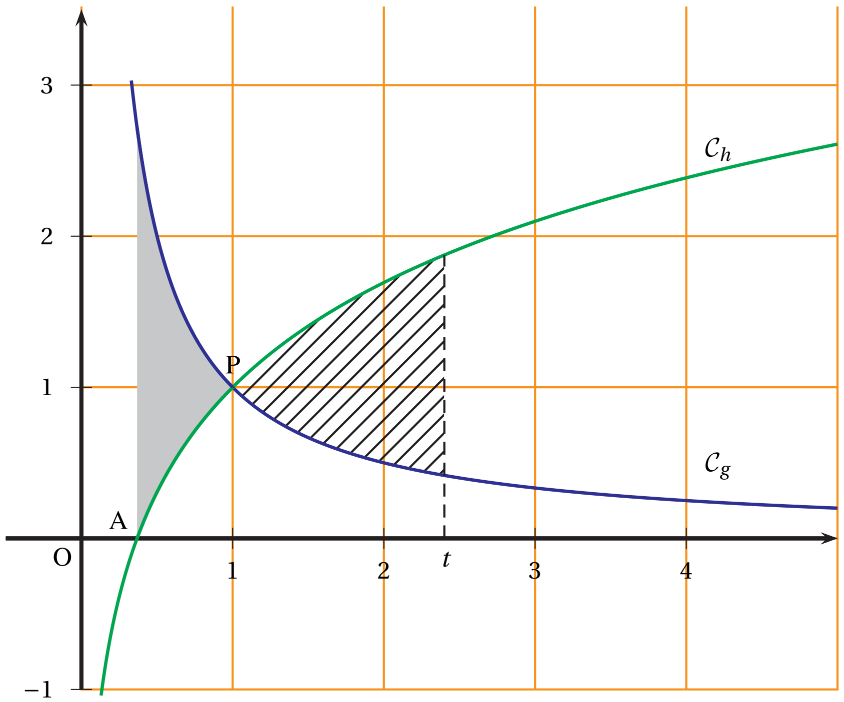
7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) + 1.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ représentatives des fonctions g et h.



1. A est le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.

2. P est le point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$. Justifier que les coordonnées du point P sont $(1\,;1)$.

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$ (domaine grisé sur le graphique).

(a) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie II.

(b) Montrer que $\mathcal{A} = 1 - \frac{1}{e}$.

4. Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1\,;+\infty[$. On note $\mathcal{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ (domaine hachuré sur le graphique).

On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_t$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$.

(b) Conclure.

Exercice 5 correction **Amerique du Nord 2012**

Partie A Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim_{t\to+\infty} \frac{\exp^t}{t} = +\infty$.
Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.

Montrer que la fonction g est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. (a) Montrer que, pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

(b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

(c) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

(d) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k$ entre les points M_k et N_k est donnée par $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

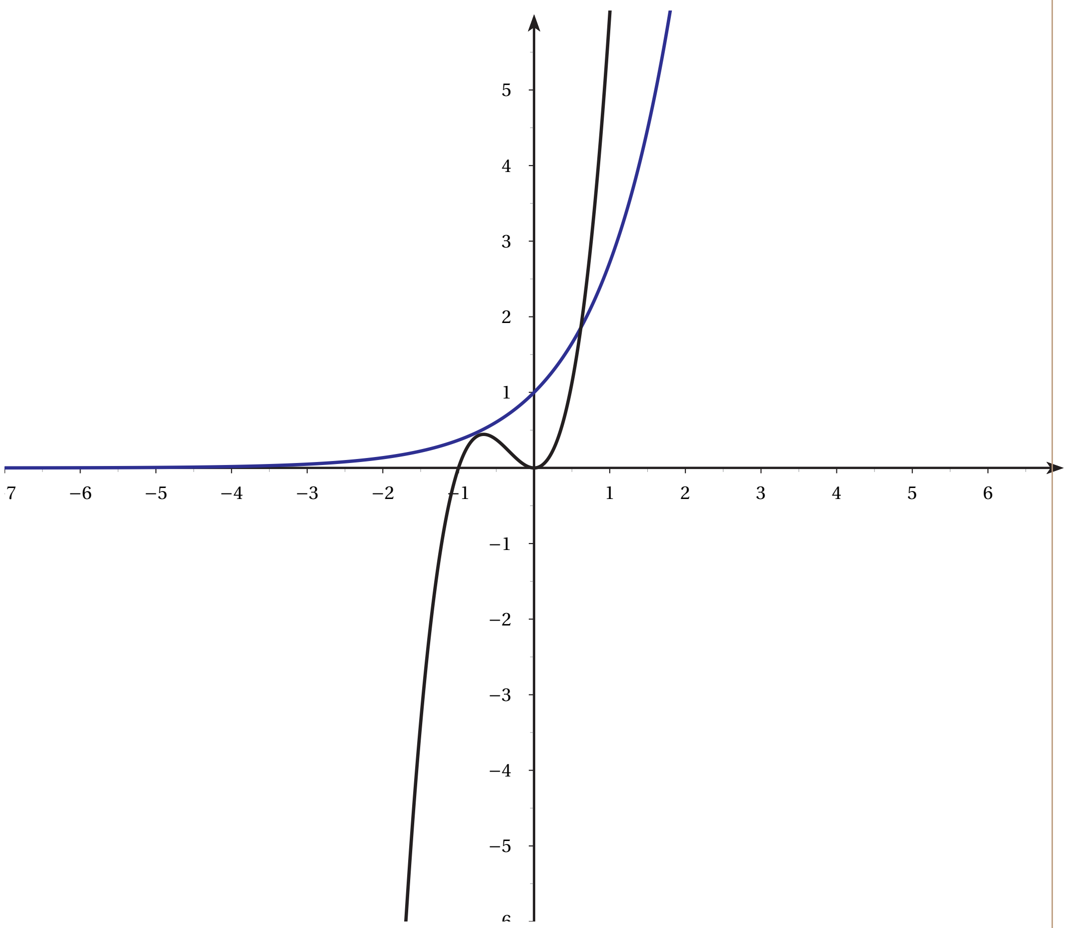
(b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k$ soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

EXERCICE 6 correction Centres Étrangers 2012

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. **(a)** Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

(b) En déduire que l'équation (E)n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.

(c) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$

Montrer que, sur $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3. **(a)** Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

(b) Déterminer les variations de la fonction h.

(c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

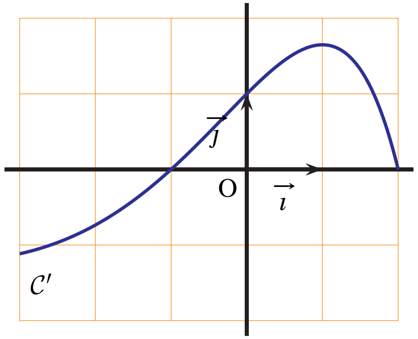
(d) Conclure quant à la conjecture de la partie A.

EXERCICE 7 correction Métropole 2012

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.

4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées (1 ; 0).

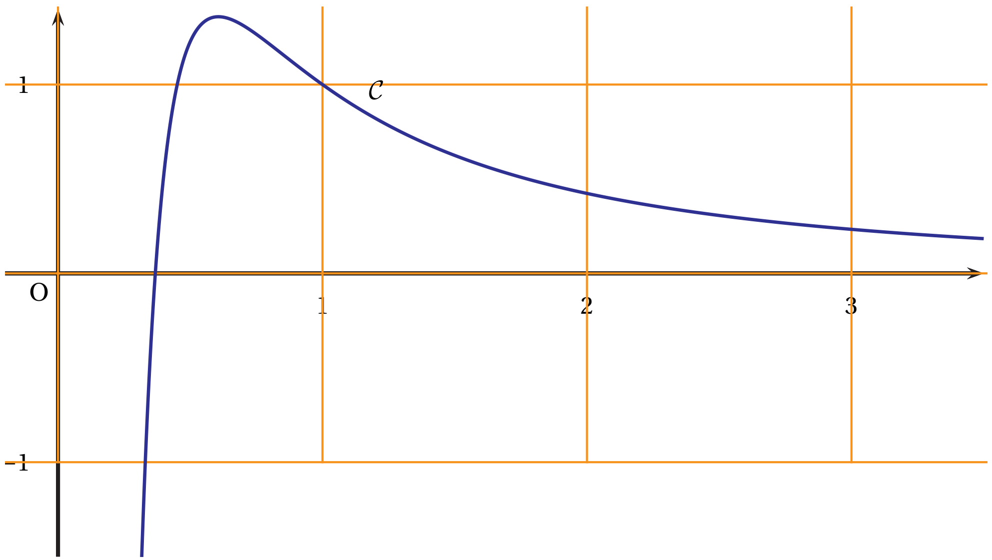
EXERCICE 8 correction Amerique du Nord 2013

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1. (a) Étudier la limite de f en 0.

(b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

(c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

(b) Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

(b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x=n$.

(a) Démontrer que $0\leqslant \mathrm{I}_2\leqslant \mathrm{e}-\dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\dfrac{-2-\ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Calculer I_n en fonction de n.

(c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 9 correction **Amerique du Sud 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.

4. Déterminer la dérivée de la fonction f.

5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.

On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. Comparer les fonctions h_n et g_n', g_n' étant la dérivée de la fonction g_n.

En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

3. Soit $\mathrm{S}_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.

En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 10 correction **Asie 2013**

Commun à tous les candidats

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x)=1-\mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. (a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

(b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.

(c) En déduire que $b=-a$.

2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)\mathrm{e}^{x}+1=0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x}+1.$$

1. (a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

(b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

(c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2. (a) Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

(b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x)=0$ et β la solution positive de cette équation.

À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

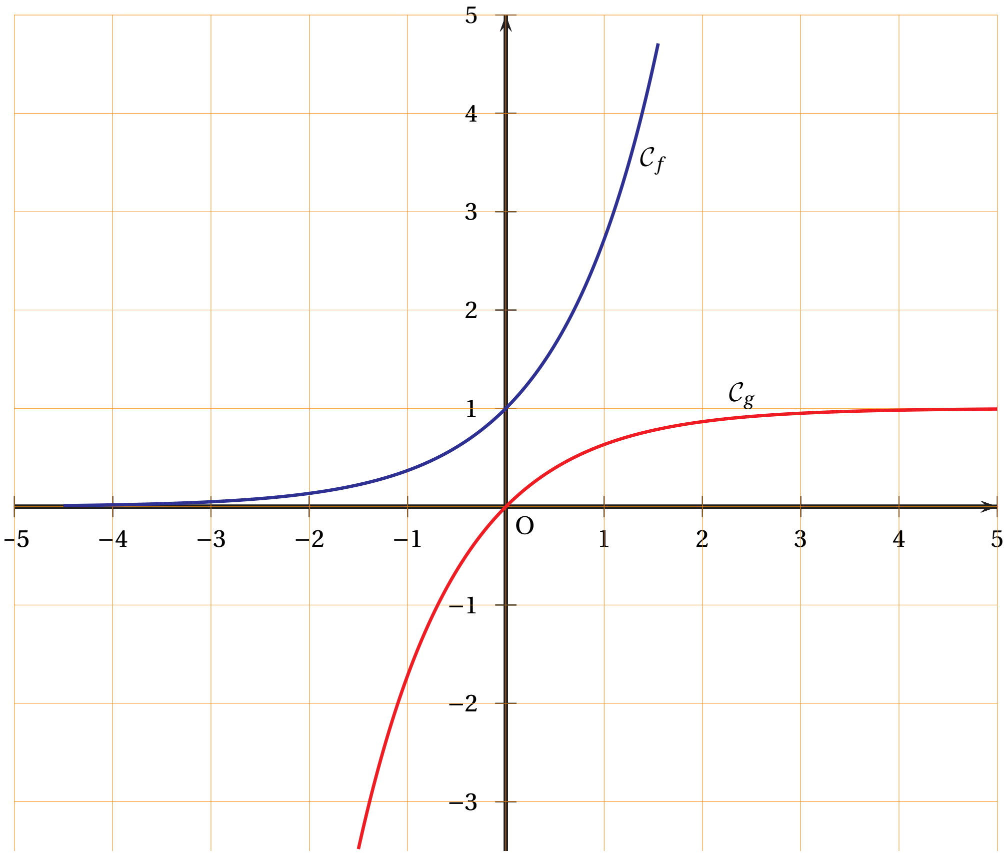
Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.

2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

Annexe à rendre avec la copie


$\mathcal{C}_f$
$\mathcal{C}_g$
O
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
−1
−2
−3

EXERCICE 11 correction Antilles 2013

Commun à tous les candidats

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\exp^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\exp^{x}$.

3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x+1-m\exp^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. **(a)** Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

(b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté en annexe les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\exp}$, et $\mathcal{C}_{-\exp}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, exp et $-\exp$).
Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.

3. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$ suivant les valeurs du réel m.

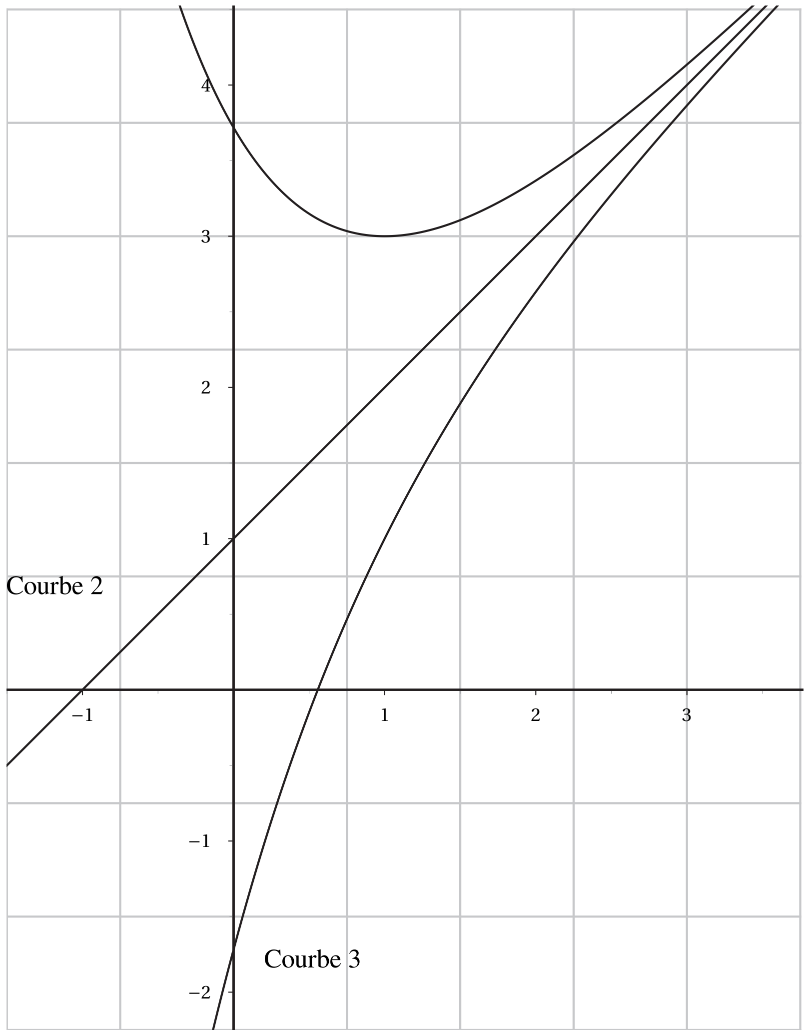
4. **(a)** On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_{\exp}$, $\mathcal{C}_{-\exp}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.

(b) Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_{\exp}$, $\mathcal{C}_{-\exp}$, l'axe $(\mathrm{O}y)$ et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.

Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2\exp - 2\exp^{1-a}$.

En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Annexe à rendre avec la copie



EXERCICE 12 correction **Antilles septembre 2013**

Commun à tous les candidats

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.

2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$g_1(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$$

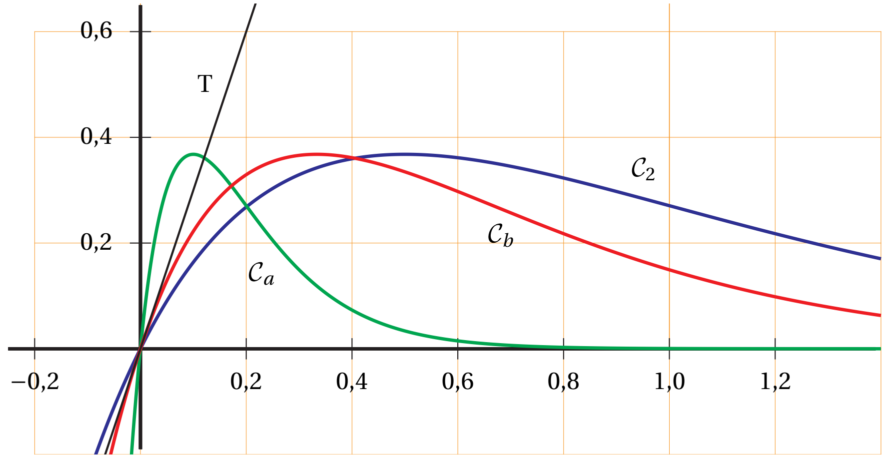
est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.

2. (a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1-kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

(b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

(c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

(d) Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.

(e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

Exercice 13 correction **Centres Étrangers 2013**

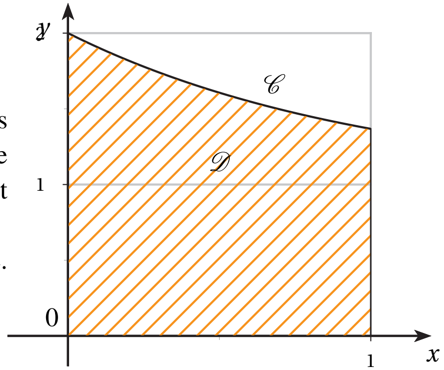
Commun à tous les candidats

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$$g(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $g(x) > 0$.

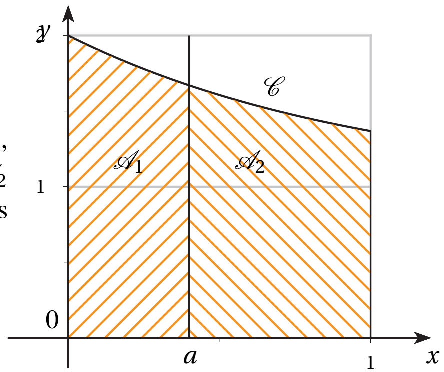
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe $(\mathrm{O}x)$,les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, $(\mathrm{O}x)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



1. **(a)** Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - \mathrm{e}^{-a} + 1$.

(b) Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

(b) Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. On pourra utiliser un argument graphique.

2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

Exercice 14 correction **Liban 2013**

Commun à tous les candidats

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,\right)$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k=1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
La représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,\right)$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.

En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. On définit le nombre $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que $\mathrm{I} = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k=-1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment [MP].

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.

4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

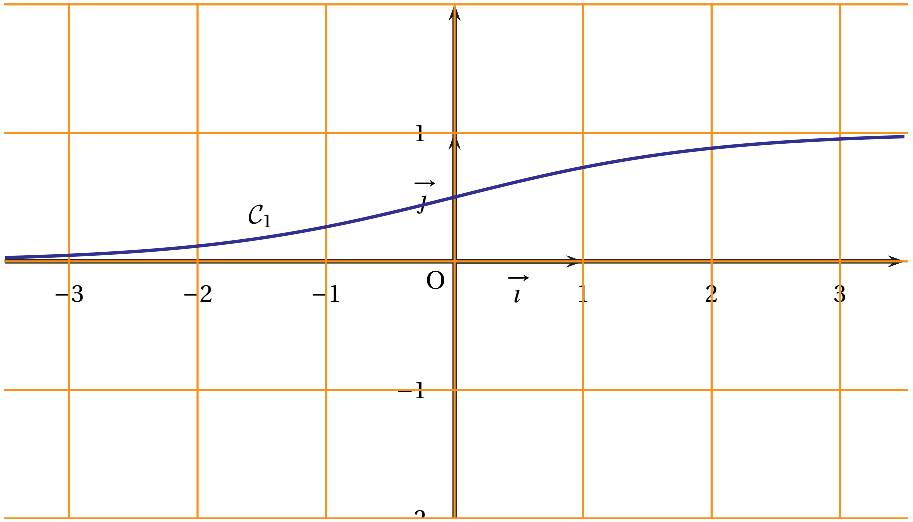
1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y=0$ et $y=1$.

2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.

3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

ANNEXE, à rendre avec la copie

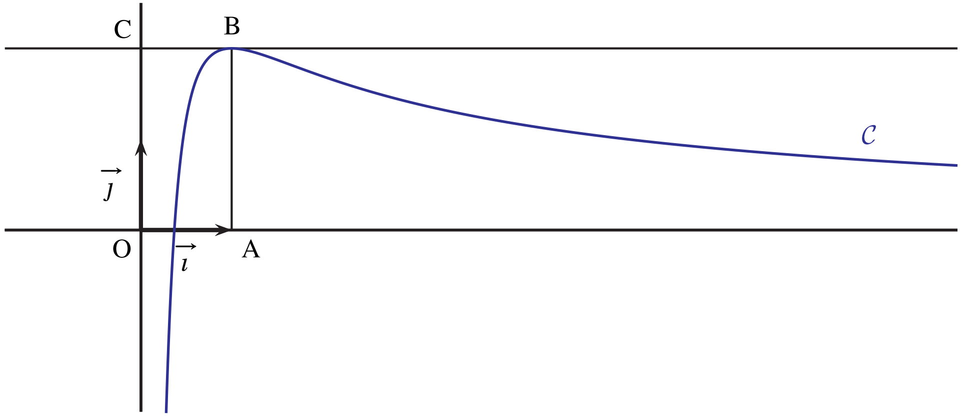
Représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1



Exercice 15 correction Métropole 2013

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 2), (0 ; 2) ;
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. (a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

(b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

(c) En déduire les réels a et b.

2. (a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

(b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

(c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

(b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.

Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

(a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

(b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

(c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

(a) Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

(b) En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

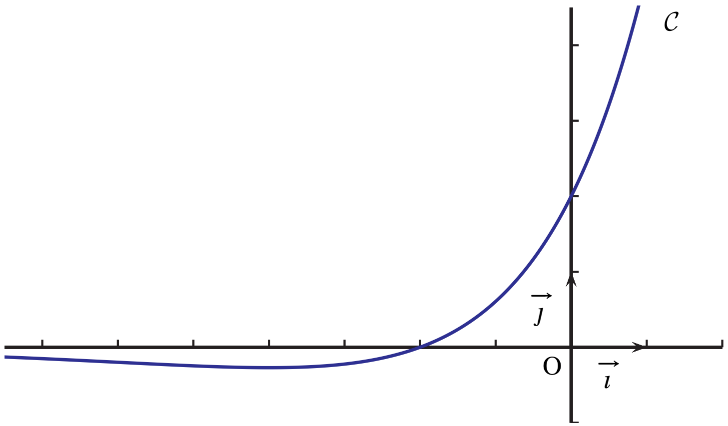
EXERCICE 16 correction Métropole septembre 2013

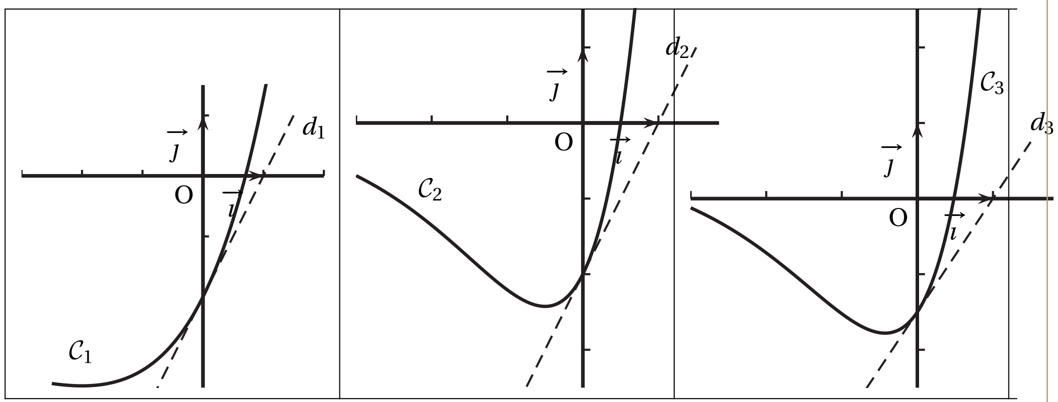
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(a) À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $\mathrm{F}'(0)$ et $\mathrm{F}'(-2)$.

(b) L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.

Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe $\mathcal{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

(a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

(b) En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Interpréter géométriquement le réel I.

(b) Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x$ et $v(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

Vérifier que $f=2\left(u'v+uv'\right)$.

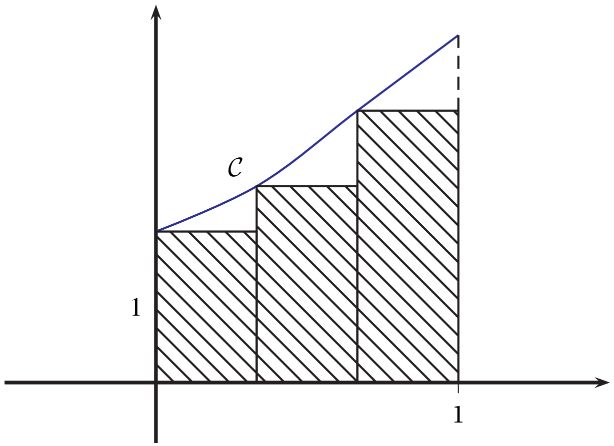
(c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ ∣ Affecter à s la valeur $s+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

(a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



(b) Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Exercice 17 correction **Nouvelle Calédonie 2013**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

(a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

(b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.

Démontrer que a appartient à l'intervalle [0,703 ; 0,704[.

(c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Étude de la fonction f

(a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

(b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

(c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel

$m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

(e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice 18 correction **Polynésie 2013**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.

(a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.

(b) Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

(c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

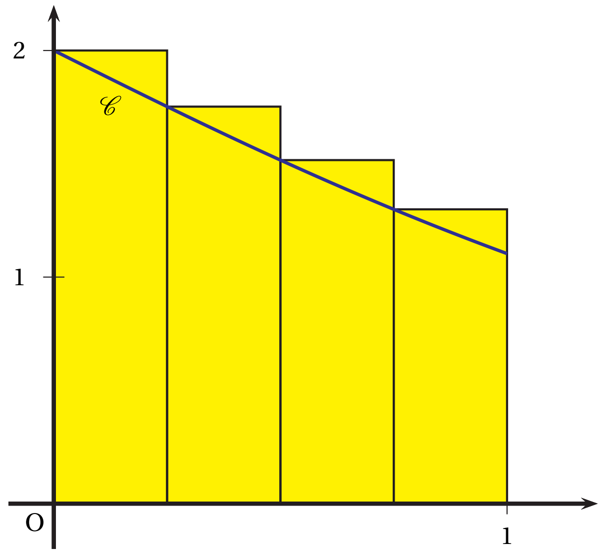
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

(a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}\,;\,1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $\mathrm{S}+\frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

(b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(a) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

(b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $\mathscr{A}$ par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

EXERCICE 19 correction Pondichéry 2013

Commun à tous les candidats

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.
On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.
Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 250]$.

2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.

3. **(a)** Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 250]$ on a

$f(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t} + 19}$.

Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 250]$ par

$\mathrm{F}(t) = 50\ln\left(\mathrm{e}^{0,04t} + 19\right)$ est une primitive de la fonction f.

(b) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50 ; 100]$.

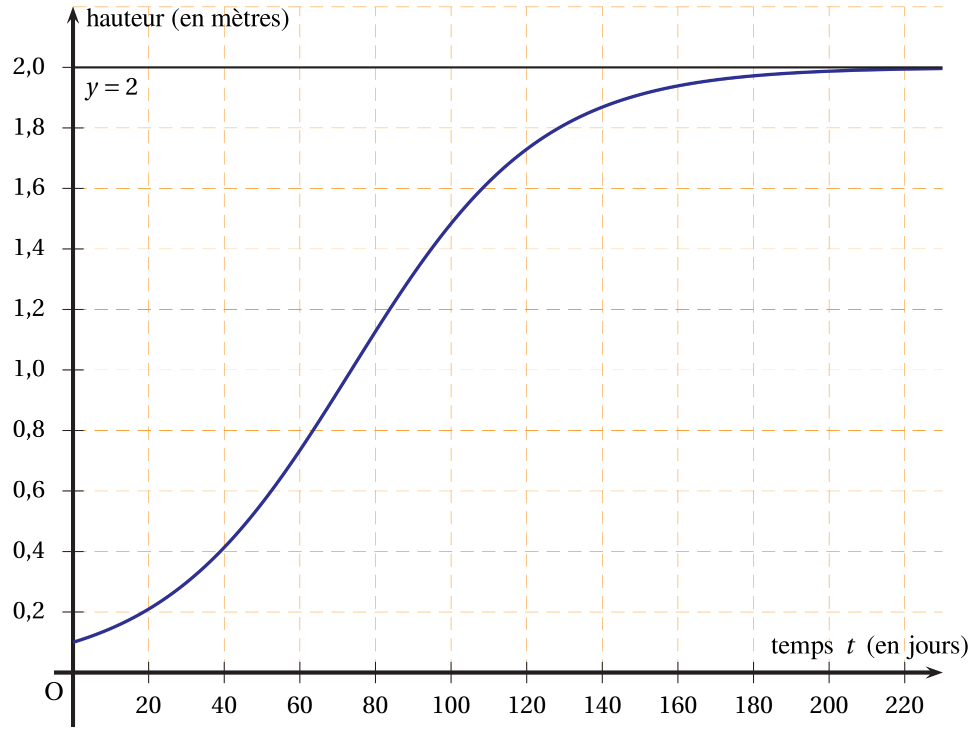
En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.

La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.

En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.

Annexe



Exercice 20 correction **Amerique du Nord 2014**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $g(x) > 0$.

2. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.

2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

Pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, calculer $g'(x)$.

3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ que l'on déterminera.

En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathcal{A}$ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t.$$

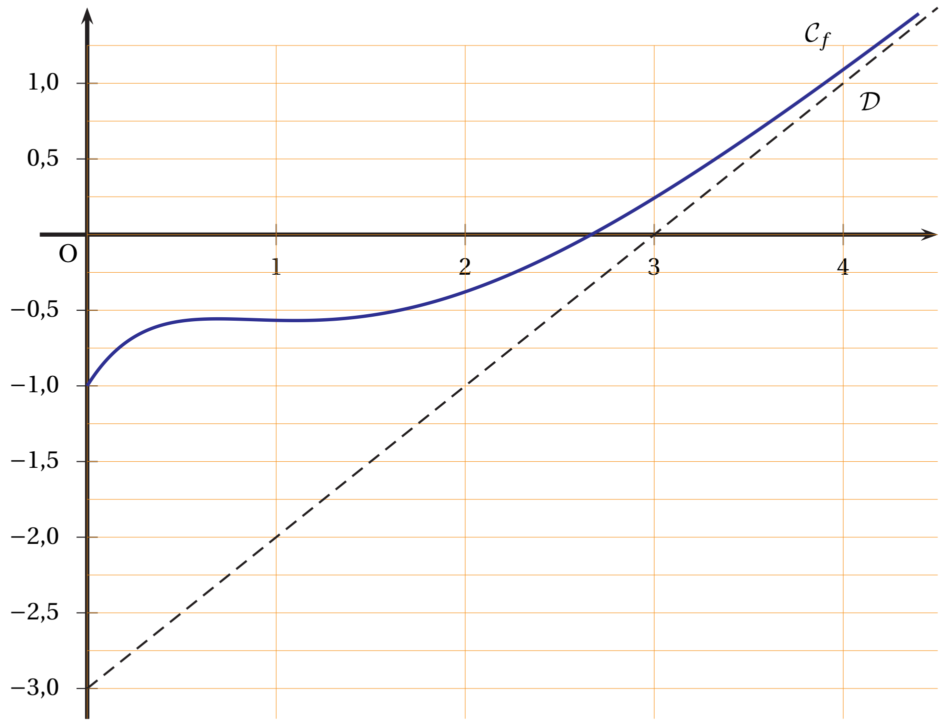
1. Hachurer sur le graphique donné en **annexe (à rendre avec la copie)** le domaine dont l'aire est donnée par $\mathcal{A}(2)$.

2. Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathcal{A}(x)$.

4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathcal{A}(x) = 2$?

Annexe à rendre avec la copie



EXERCICE 21 correction **Amerique du Sud 2014**

Commun à tous les candidats

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x}+b$$

où b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.

1. **(a)** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;2]$.

(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.

2. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x}+\frac{5}{4}.$$

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$\mathrm{F}(x)=\left(-\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x}+\frac{5}{4}x$$

est une primitive de la fonction f.

2. En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

Partie C : utilisation d'un algorithme

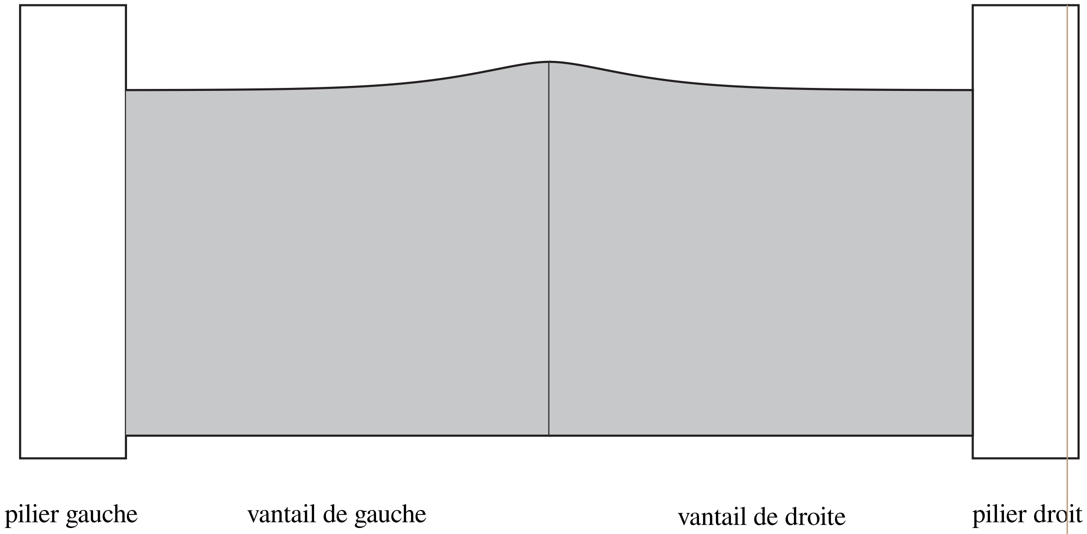
On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2 de l'exercice 4) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

1. Donner l'aire de la planche numéro k.

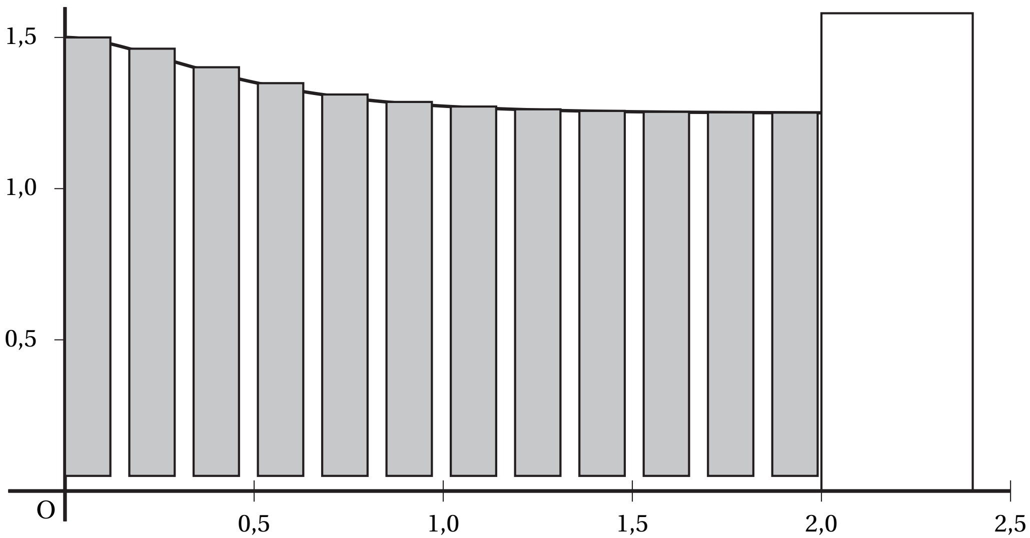
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0
	On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant Que** $\mathrm{X}+0,17<\ldots$
	S prend la valeur $\mathrm{S}+\ldots.$
	X prend la valeur $\mathrm{X}+0,17$
	Fin de Tant Que
Affichage :	On affiche S

Annexe 1



Annexe 2



La distance entre le bas du portail et le sol est de 0,05 m.

Exercice 22 correction **Antilles 2014**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

En déduire le signe de $g(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = e^{-x} g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

(b) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.

Partie B

1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$.

2. On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

EXERCICE 23 correction **Antilles septembre 2014**

Commun à tous les candidats

On considère l'équation (E_1) :

$$e^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

Exercice 24 correction Asie 2014

Commun à tous les candidats

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1\,;\,1]$ par

$$g(x)=\frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}\right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)\mathrm{e}^{2x}-1-x=0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f par $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{2x}-1-x$ pour tout réel $x\geqslant 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

Vérifier que $f'(0)=-2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.

2. On note f'' la fonction dérivée de f'.

Vérifier que, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f''(x)=4x\mathrm{e}^{2x}$.

3. Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.

4. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,x_0]$.

(b) Calculer $f(2)$.

En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.

Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

5. On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression

$$\mathrm{L}=\int_0^1\left(\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}\right)\mathrm{d}x.$$

Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant $1,2$ comme valeur approchée du nombre a.

EXERCICE 25 correction Centres Étrangers 2014

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée
$0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

(a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

(b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0 ; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

(a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2) - (\mathrm{e}-1)x}{1 + (\mathrm{e}-1)x}$;

(b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

(c) Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0 ; 1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.

Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale)
	y (nuance retouchée)
	E (écart)
	c (compteur)
	k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y-x \rvert$
	Si E $\geqslant 0,05$, faire
	c prend la valeur $c+1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $f(x) \leqslant x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire $\mathcal{A}_f$ de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle correspondant à la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{(x^2-1)} \qquad f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

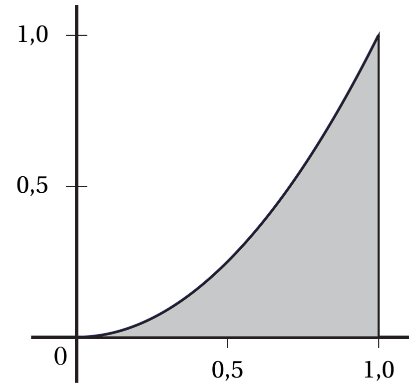
1. (a) Calculer $\mathcal{A}_{f_1}$.

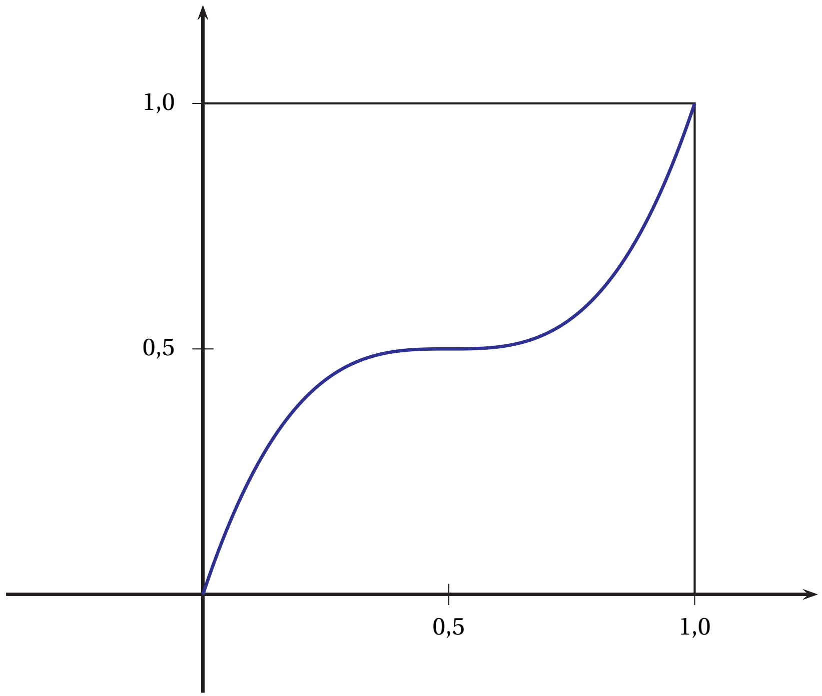
(b) Calculer $\mathcal{A}_{f_2}$

2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

Annexe

Courbe représentative de la fonction f_1




1,0
0,5
0,5
1,0

Exercice 26 correction **Liban 2014**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;\,+\infty[$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B

Soit $\mathcal{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;\,+\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $\mathcal{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.

2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathcal{A}$?

3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x=\alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.

(a) Démontrer que l'équation $\mathcal{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$

(b) Sur le graphique fourni en **annexe** (***à rendre avec la copie***) sont tracées la courbe $\mathcal{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathcal{A}$.
Sur le graphique de l'**annexe**, identifier les courbes $\mathcal{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
En déduire une valeur approchée du réel α. Hachurer le domaine correspondant à $\mathcal{A}(\alpha)$.

4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0;\,+\infty[$ par $g(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

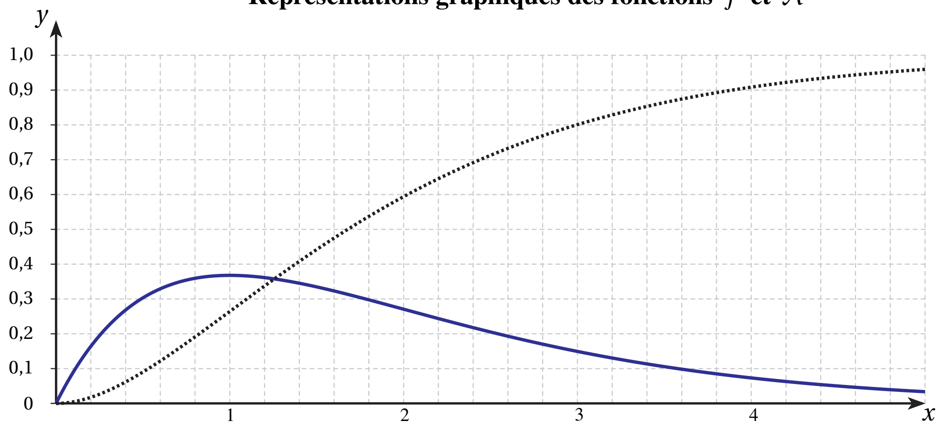
(a) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0;\,+\infty[$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0;\,+\infty[$, calculer $g'(x)$.

(b) En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0;\,+\infty[$, une expression de $\mathcal{A}(t)$.

(c) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathcal{A}(6)$.

Annexe à rendre avec la copie

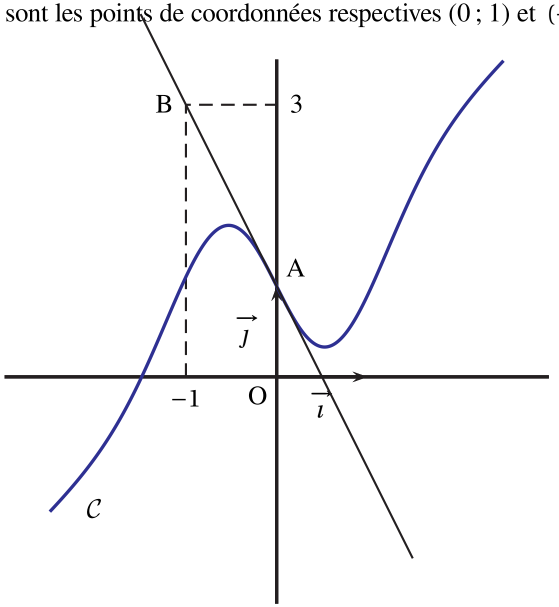
Représentations graphiques des fonctions f et $\mathcal{A}$



EXERCICE 27 correction **Métropole septembre 2014**

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(-1\,;\,3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + ax\mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. (a) Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A.

(b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

(c) Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - a\left(2x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

(d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 - 3x\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3\left(2x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

(a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;\,0]$, $f(x) > 0$.

(b) Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

(c) Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\,;\,-1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Justifier que $c < -\dfrac{3}{2} + 2.10^{-2}$.

3. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par :

$$c \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

(a) Écrire $\mathcal{A}$ sous la forme d'une intégrale.

(b) On admet que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-3} près.

Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

Exercice 28 correction Polynésie 2014

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x)=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-x-2$.

(a) Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

(b) Justifier que, pour tout réel $x, h(x)=x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\dfrac{2}{x}\right)$.

En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

(c) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

(d) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

(e) En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1 \geqslant x+1$.

(f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

(a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$.

(b) Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

EXERCICE 29 correction Pondichéry 2014

Commun à tous les candidats

Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.

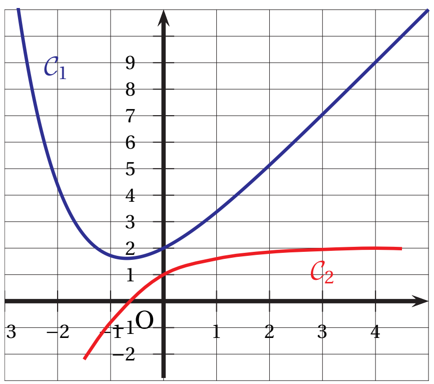
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.

Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$.

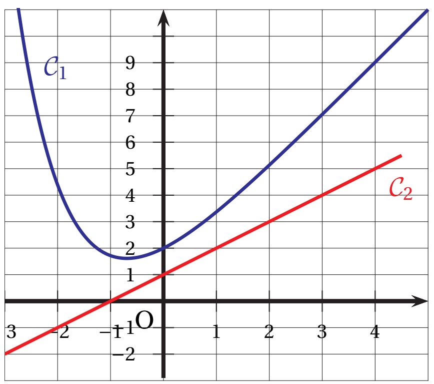
Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathcal{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

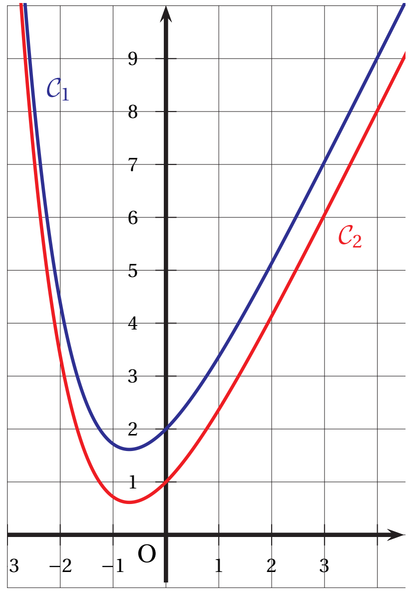
Situation 1



Situation 2 ($\mathcal{C}_2$ est une droite)



Situation 3



2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ en A.

3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

(a) Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

(b) Prouver que $a = 2$.

4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

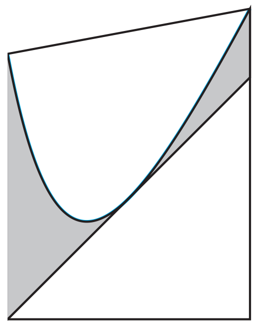
Partie B

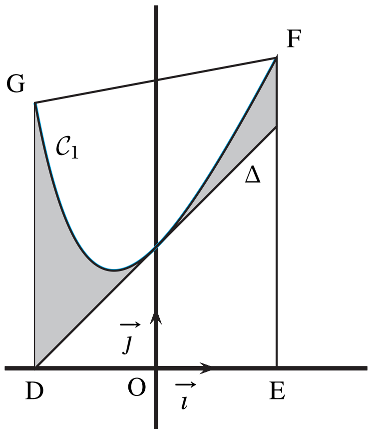
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

1. (a) Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathcal{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.





Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :
- D est le point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$,
- E est le point de coordonnées (2 ; 0),
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}_1$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathcal{C}_2$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathcal{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

Exercice 30 correction **AmeriqueNordS2015-exo-4.tex**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathrm{H}(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$$

est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 31 correction Antilles 2015

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction g_a par
$g_a(x)=ax^2$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en **annexe** (*à rendre avec la copie*) les courbes $\mathcal{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.

2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h_a(x)=\ln x-ax^2.$$

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x)=0$.

2. (a) On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.

Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.

Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	$\searrow$	

(b) Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.

On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que

$a=0,1$.

(a) Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x)=0$ admet une unique solution.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0,2}}\,;\,+\infty\right[$.

(b) Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que

$a=\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

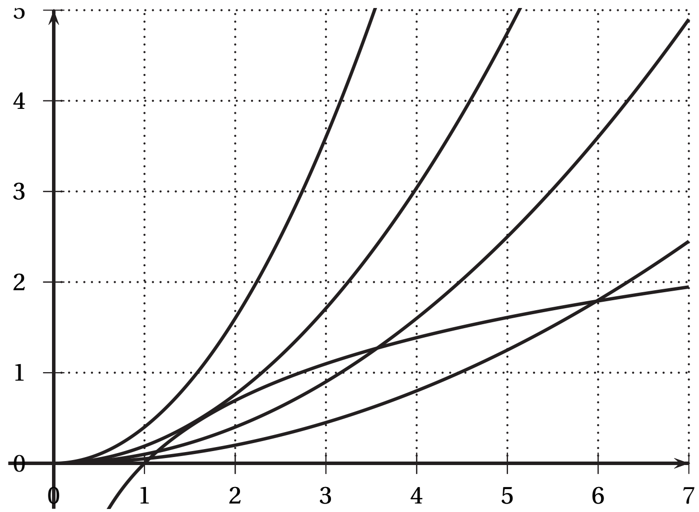
(a) Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

(b) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. Justifier.

5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ?

Justifier.

ANNEXE à rendre avec la copie


5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7

Exercice 32 correction Centres Étrangers 2015

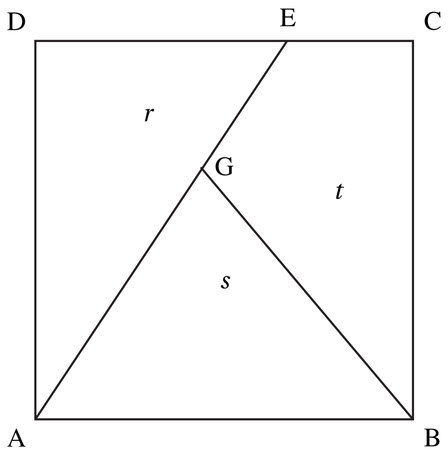
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

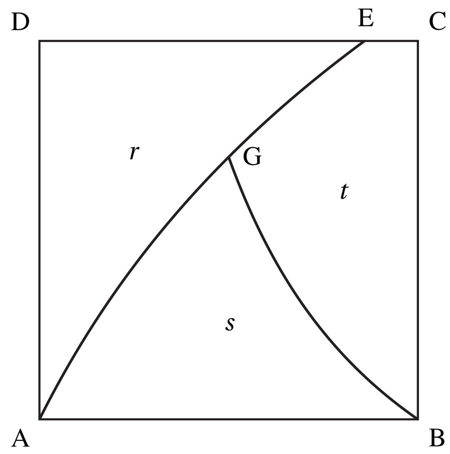
Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise.
Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes :

- Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
  - une des lignes est le segment [AD] ;
  - une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment [DC] ;
  - la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.
- Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre $0,3$ et $0,4$, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.
Déterminer les coordonnées des points E et G.

Partie B : étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :

- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par : $f(x) = \ln(2x+1)$;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par : $g(x) = k\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$, où k est un réel positif qui sera déterminé.

1. (a) Déterminer l'abscisse du point E.

(b) Déterminer la valeur du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à $0,5$.

2. (a) Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$\mathrm{F}(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x.$$

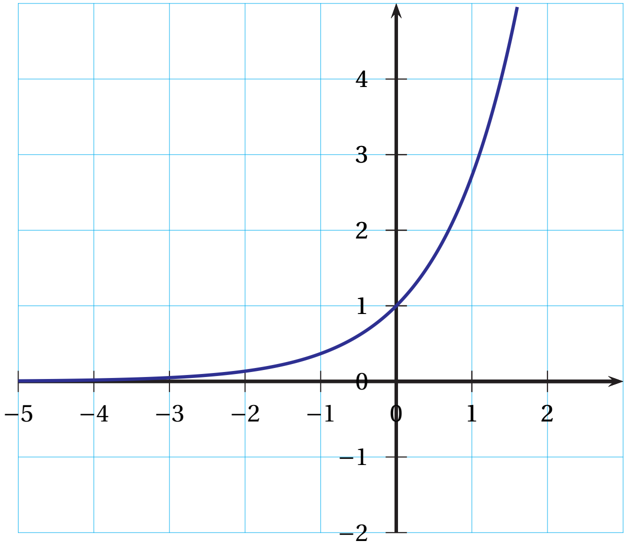
(b) Démontrer que $r = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1$.

3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que
$s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2}$.
La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?

EXERCICE 33 correction Liban 2015

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.

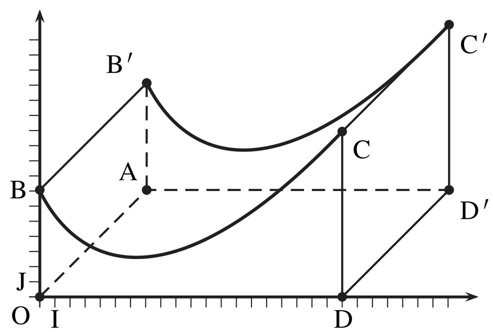
Démontrer que la droite $\mathcal{D}_{\mathrm{e}}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.

3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 34 correction Métropole 2015

Commun à tous les candidats



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

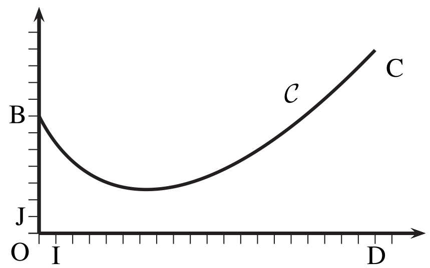
Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 20], on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

2. En déduire les variations de f sur l'intervalle [0 ; 20] et dresser son tableau de variation.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.



4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle [0 ; 20] par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20].

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

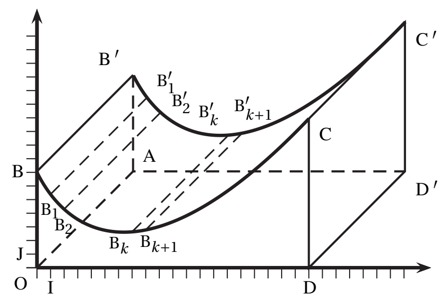
P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.

Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3.

On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k\,;\,f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = B$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $\left[B_kB_{k+1}\right]$.

Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B_k$ (voir figure).

(a) Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19,

$B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}$.

(b) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S : réel K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de … à … S prend pour valeur …… Fin Pour
Sortie	Afficher …

Exercice 35 correction **Métropole septembre 2015**

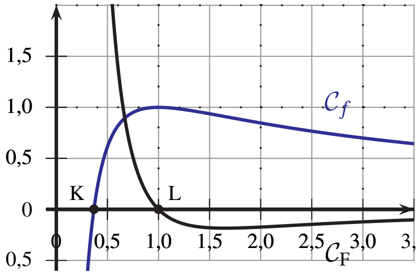
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

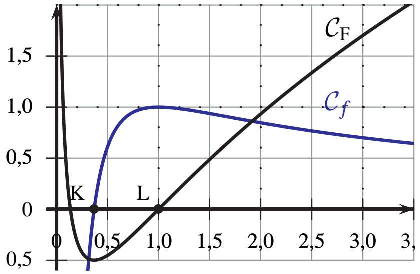
$$f(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

1. Dans les trois situations suivantes, on a dessiné, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et une courbe $\mathcal{C}_\mathrm{F}$. Dans une seule situation, la courbe $\mathcal{C}_\mathrm{F}$ est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.

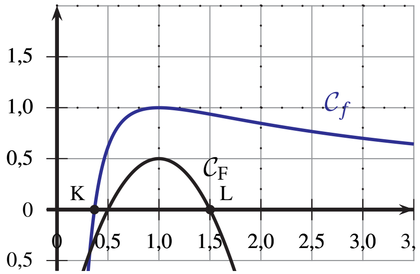
Situation 1



Situation 2



Situation 3



2. Dans la situation retenue à la question 1, on appelle :

- K le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathcal{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées ;
- L le point d'intersection de $\mathcal{C}_\mathrm{F}$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

(a) Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathcal{D}$ et Δ, par la courbe $\mathcal{C}_f$ et par l'axe des abscisses.

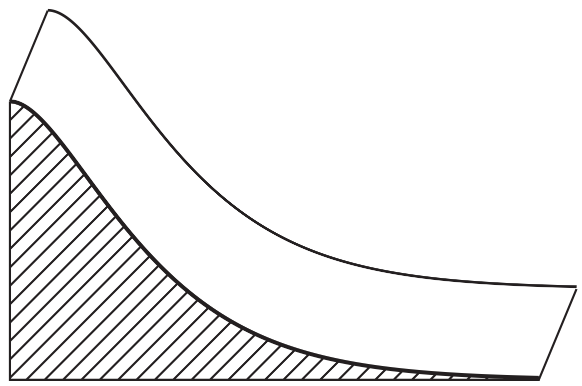
(b) Peut-on déterminer la valeur exacte de cette aire ?

Exercice 36 correction **Polynésie 2015**

Commun à tous les candidats

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici ce schéma :

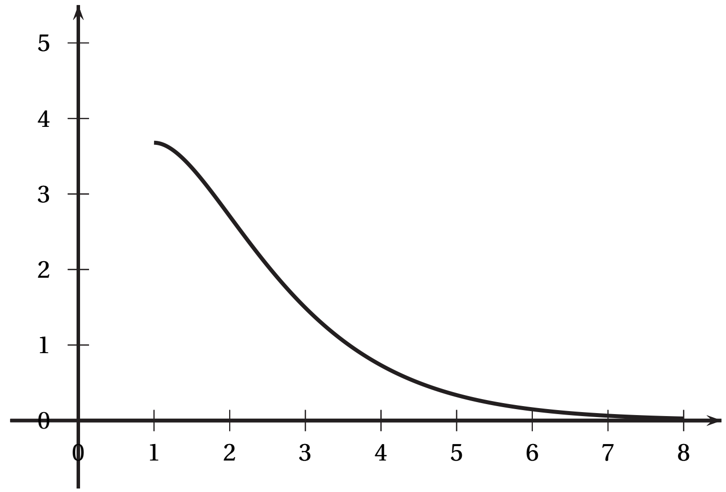


Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 8] par

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.

Déterminer la valeur de l'entier b.

2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre $3,5$ et 4 mètres de haut.

Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1 ; 8]$ par

$$f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}.$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1. Soit g la fonction définie sur [1 ; 8] par

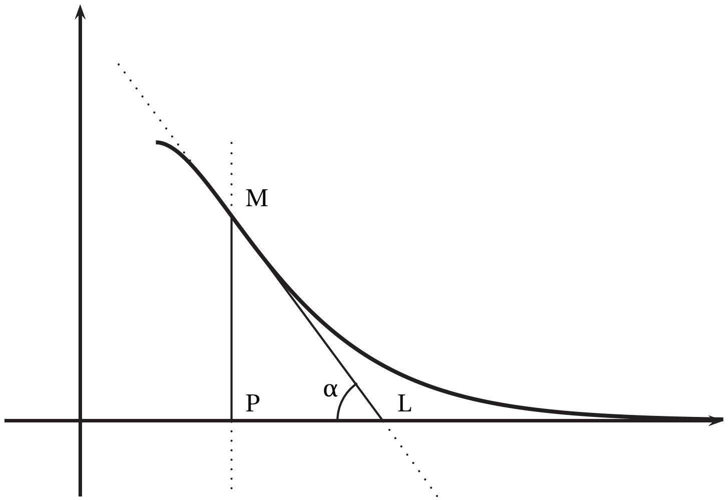
$$g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 8]. On admet que, pour tout x de l'intervalle [1 ; 8], $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle [1 ; 8].

2. Soit x un réel de l'intervalle]1 ; 8] et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.

3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

Exercice 37 correction **Pondichéry 2015**

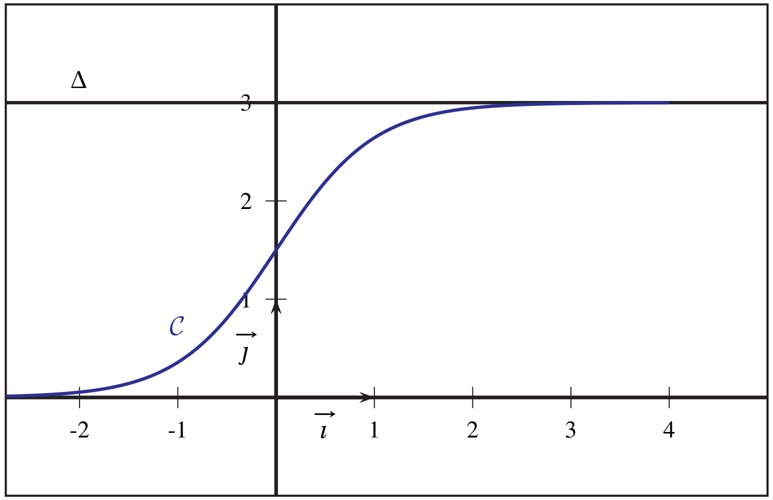
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{H}(x) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

(a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Démontrer que $\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

(c) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;\,y)$ du plan défini par

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$$

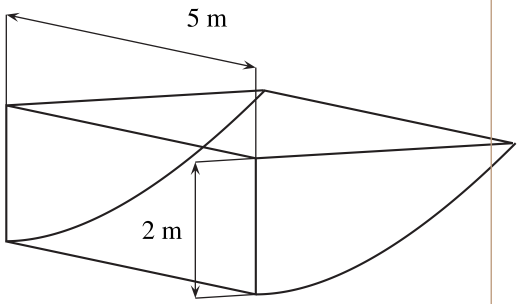
Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

EXERCICE 38 correction **Amerique du Nord 2016**

Commun à tous les candidats

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.



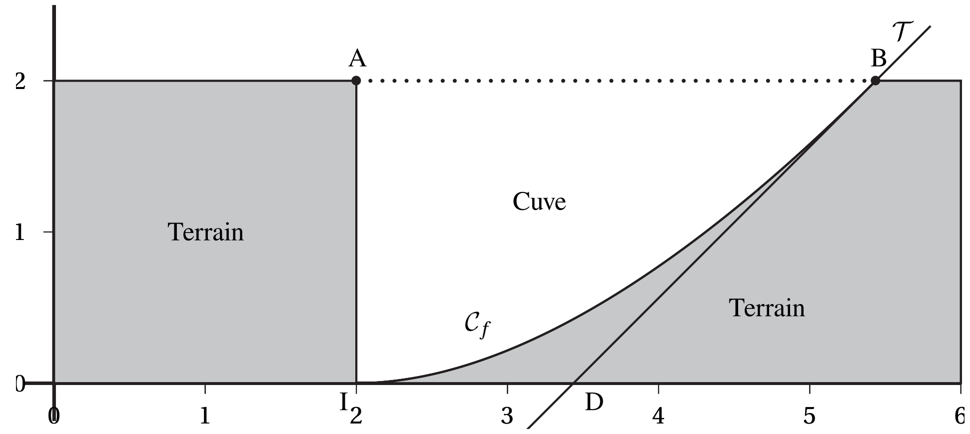
Cette cuve est schématisée ci-contre.

La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 2\text{e}]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point I.

2. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathcal{T}$ avec l'axe des abscisses.

(a) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

(b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites d'équations $y = 2, x = 2$ et $x = 2\text{e}$.

S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.

Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3. **(a)** Montrer que, sur l'intervalle [2 ; 2e], la fonction G définie par

$$\text{G}(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

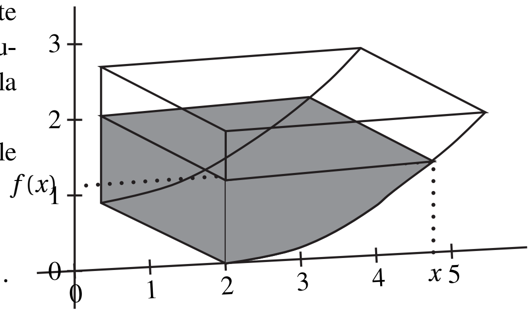
(b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2e].

(c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle [2 ; 2e],

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$



1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Variables :	a est un réel
	b est un réel
Traitement :	a prend la valeur 2
	b prend la valeur 2 e
	Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire :
	c prend la valeur $(a+b)/2$
	Si $v(c) < \mathrm{V}/2$, alors :
	a prend la valeur c
	Sinon
	b prend la valeur c
	Fin Si
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$

Exercice 3 **3 points**

Exercice 39 correction AmeriqueSudS2016-exo-1.tex

Commun à tous les candidats

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, de deux fonctions f et g définies sur $[0\,;+\infty[$.
On considère les points A(0,5 ; 1) et B $(0\,;-1)$ dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On sait que O appartient à $\mathcal{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0\,;+\infty[$

2. (a) On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\dfrac{2}{x}\times\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

3. La fonction g dont la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ passe par le point B $(0\,;-1)$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

(a) Déterminer l'expression de $g(x)$.

(b) Soit m un réel strictement positif.

Calculer $\mathrm{I}_m=\displaystyle\int_0^m f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de m.

(c) Déterminer $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\mathrm{I}_m$.

4. (a) Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité.
Justifier que, pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$,

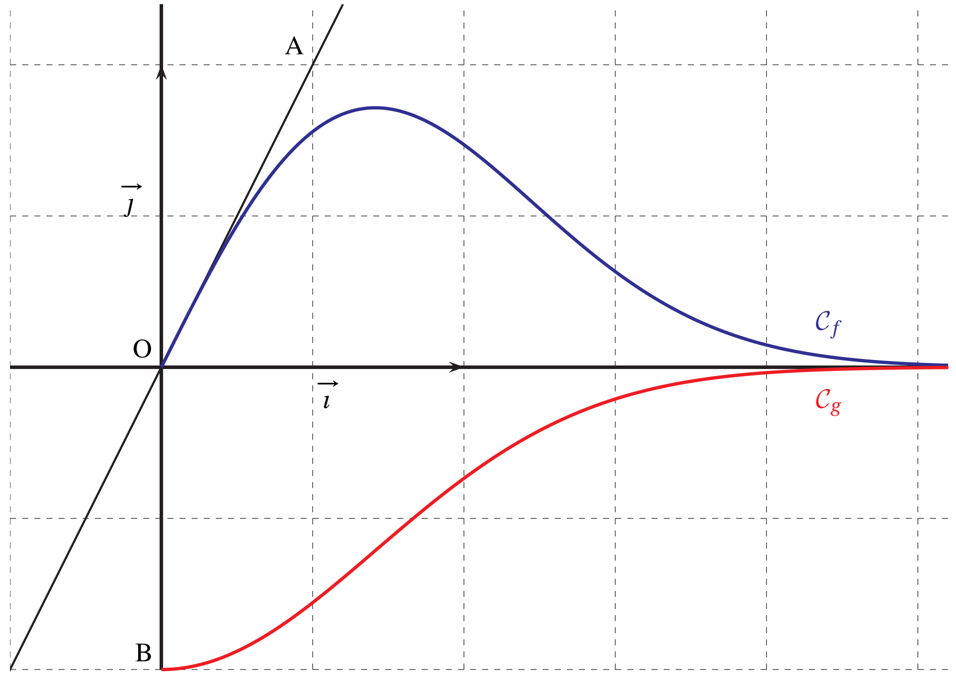
$P(X\leqslant x)=g(x)+1$.

(c) En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X\leqslant\alpha)=0,5$.

(d) Sans utiliser une valeur approchée de α, construire dans le repère de l'annexe 1 le point de coordonnées $(\alpha\,;0)$ en laissant apparents les traits de construction.

Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X\leqslant\alpha)$.

Annexe 1 :



Exercice 40 correction Antilles 2016

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0,

$f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

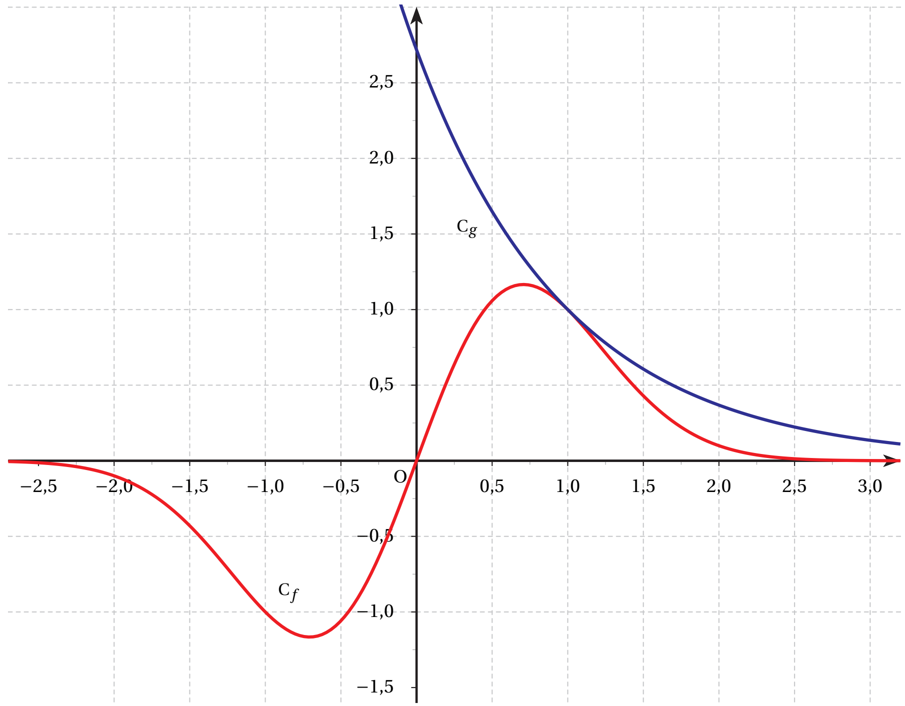
2. (a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(1 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

(b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$.

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

(a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

(b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

(c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.

4. **(a)** La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

(b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.

(c) Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.

3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 41 correction Antilles septembre 2016

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

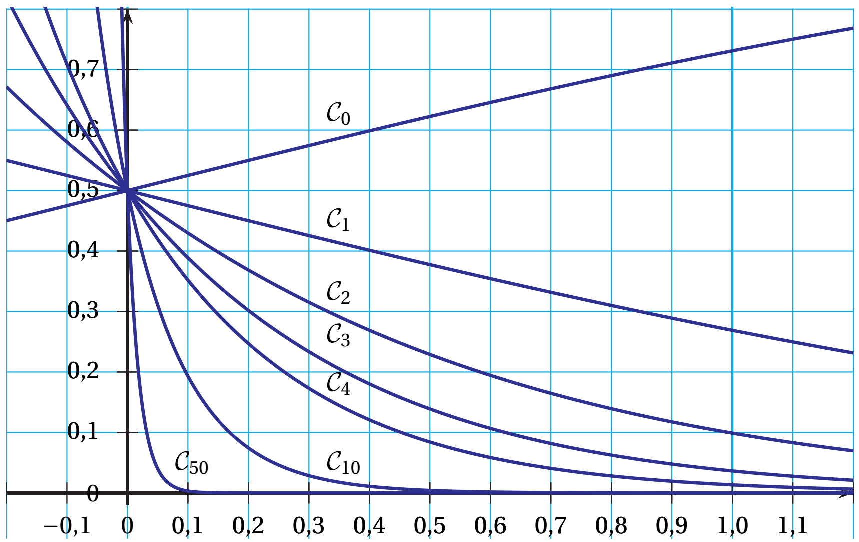
$$f_n(x)=\frac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_n$ pour différentes valeurs de n.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$



Partie A - Étude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n.

2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

3. Proposer, à l'aide du graphique et en expliquant la démarche, un encadrement de u_4 d'amplitude $0,05$.

Partie B - Étude théorique

1. Montrer que $u_0=\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

2. Montrer que $u_0+u_1=1$ puis en déduire u_1.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant 0$.

4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x)=f_{n+1}(x)-f_n(x)$.

(a) Montrer que, pour tout nombre réel $x, d_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

(b) Étudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle $[0;1]$.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

(a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n+u_{n+1}=\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

(b) En déduire la valeur de ℓ.

(c) On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_{N} pour un entier naturel N non nul donné.

Recopier et compléter les quatre lignes de la partie **Traitement** de l'algorithme suivant.

Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel
	K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K
	Affecter $1-\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ à U
	Demander à l'utilisateur la valeur de N
Traitement :	Tant que K < N
	Affecter ………à U
	Affecter ………à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher U

EXERCICE 42 correction Asie 2016

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = a\mathrm{e}^{ax} + a.$$

On note $\mathrm{I}(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$\mathrm{I}(a) = \int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $\mathrm{I}(0)$.

2. On pose dans cette question $a = 1$.

On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{x} + 1.$$

(a) Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $\mathrm{I}(1)$.

(b) Calculer la valeur exacte de $\mathrm{I}(1)$, puis arrondir au dixième.

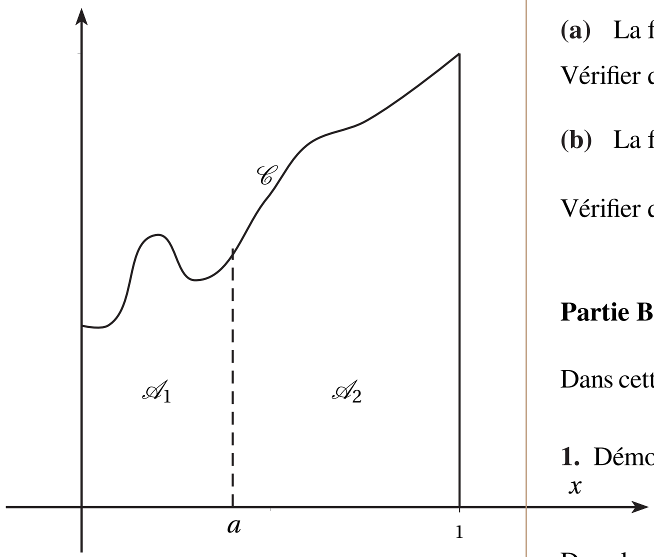
3. Existe-il une valeur de a pour laquelle $\mathrm{I}(a)$ est égale à 2 ?

Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 43 correction **Centres Étrangers 2016**

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0~;~1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a une réel tel que $0 < a < 1$.
On note :

- $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal :
- $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales ».
On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A : Étude de quelques exemples

1. Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.

(a) f est une fonction constante strictement positive.

(b) f est définie sur $[0~;~1]$ par $f(x) = x$.

2. (a) À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

(b) On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$.

Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $\mathrm{F}(a) = \dfrac{\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)}{2}$.

La réciproque est-elle vraie ?

3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

(a) La fonction f est définie pour tout réel x de $[0~;~1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Vérifier que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel a et donner sa valeur.

(b) La fonction f définie pour tout réel x de $[0~;~1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Vérifier que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de $[0~;~1]$ par $f(x) = 4-3x^2$.

1. Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0~;~1]$. On note a cette solution.

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0~;~1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

(a) Calculer u_1.

(b) Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0~;~1]$.

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

(d) Prouver que la suite (u_n) est convergente.
À l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est a.

(e) On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

Exercice 44 correction **Liban 2016**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}.$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1].

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$).

3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur [0 ; 1] par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathcal{C}_0$ représentative de la fonction f_0 .

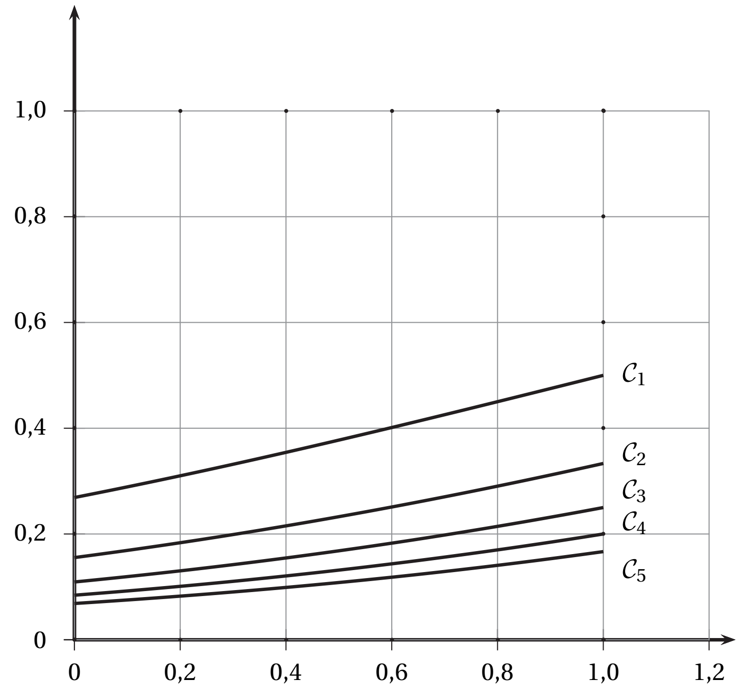
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0 .

3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

Démontrer cette conjecture.

4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

Annexe



Exercice 45 correction Métropole 2016

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Résoudre dans R l'équation : $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $\text{N} - \ln\left(\text{N}^2 + 1\right) < \text{A}$ N prend la valeur $\text{N} + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

(a) Que fait cet algorithme ?

(b) Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

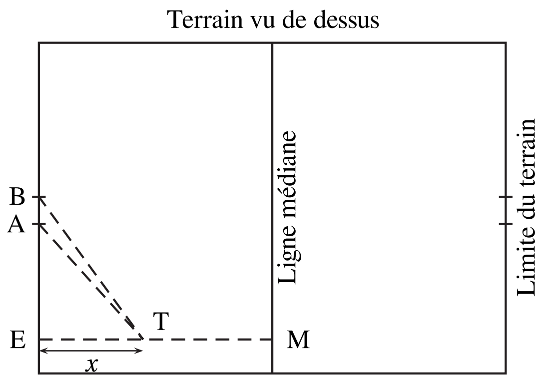
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 46 correction Métropole 2016

Commun à tous les candidats

Lors d'un match de rugby, un joueur doittransformer un essai qui a été marqué aupoint E (voir figure ci-contre) situé àl'extérieur du segment [AB]. La transformation consiste à taper le ballonpar un coup de pied depuis un point T quele joueur a le droit de choisir n'importe oùsur le segment [EM] perpendiculaire à ladroite (AB) sauf en E. La transformationest réussie si le ballon passe entre lespoteaux repérés par les points A et B sur lafigure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible. Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle. Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x. La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$,

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \times \tan b}$ .Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$ .Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à $0,01$ radian près.

Exercice 47 correction **Métropole septembre 2016**

Commun à tous les candidats

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$v_1(t) = 5 \times \frac{e^{0,3t} - 1}{e^{0,3t} + 1}.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.

2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s $^{-1}$) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s $^{-1}$.

Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s $^{-1}$), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$v_2(t) = 32,7\left(1 - e^{-0,3t}\right).$$

1. Quelle est la vitesse, exprimée en m.s $^{-1}$, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s $^{-1}$.

2. Résoudre l'équation $v_2(t) = 30$ m.s $^{-1}$. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.

3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes.

On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$d(\mathrm{T}) = \int_0^{\mathrm{T}} v_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle [0 ; 20],
$d(\mathrm{T}) = 109\left(e^{-0,3\mathrm{T}} + 0,3\mathrm{T} - 1\right)$.

(b) Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.

4. Déterminer un encadrement d'amplitude $0,1$ s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

Exercice 48 correction Nouvelle Calédonie 2017

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Justifier toutes les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

2. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathrm{F}(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

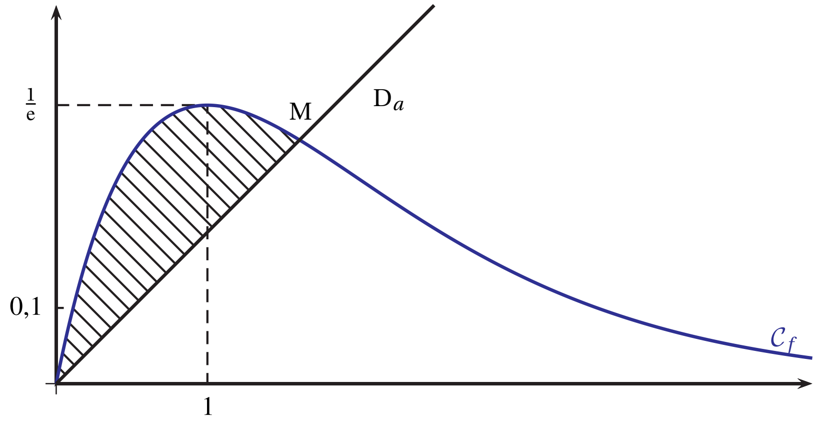
Démontrer que la fonction F est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. On considère la droite D_a d'équation $y = ax$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe $\mathcal{C}_f$. On note x_M l'abscisse du point M.

On note $\mathcal{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$ au-dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_\mathrm{M}$.

Le but de cette partie est d'établir l'existence et l'unicité de la valeur de a telle que $\mathcal{H}(a) = 0,5$ puis d'étudier un algorithme.



1. Prouver que la droite D_a et la courbe $\mathcal{C}_f$ ont un unique point d'intersection M distinct de l'origine.

On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_\mathrm{M} = -\ln a$ et que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;\,-\ln(a)]$.

2. Montrer que $\mathcal{H}(a) = a\ln(a) - \frac{1}{2}a(\ln(a))^2 + 1 - a$.

3. Soit la fonction $\mathcal{H}$ définie sur $]0\,;\,1]$ par $\mathcal{H}(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x(\ln(x))^2 + 1 - x$.

On admet que $\mathcal{H}$ est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et que son tableau de variations correspond à celui qui est proposé ci-dessous.

x	0		1
$\mathcal{H}(x)$	‖ 1	↘	0

Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0\,;\,1[$ tel que $\mathcal{H}(\alpha) = 0,5$.

4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous.

VARIABLES :	A, B et C sont des nombres ;
	p est un entier naturel.
INITIALISATION :	Demander la valeur de p
	A prend la valeur 0
	B prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $\text{B} - \text{A} > 10^{-p}$
	C prend la valeur $(\text{A}+\text{B})/2$
	Si $\mathcal{H}(\text{C}) > 0,5$
	Alors A prend la valeur de C
	Sinon B prend la valeur de C
	Fin de la boucle Si
	Fin de la boucle Tant que
SORTIE :	Afficher A et B.

Que représentent les valeurs A et B affichées en sortie de cet algorithme ?

5. Donner un encadrement d'amplitude $0,01$ de α.

EXERCICE 49 correction **Nouvelle Calédonie novembre 2016**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} - 0,1.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations.

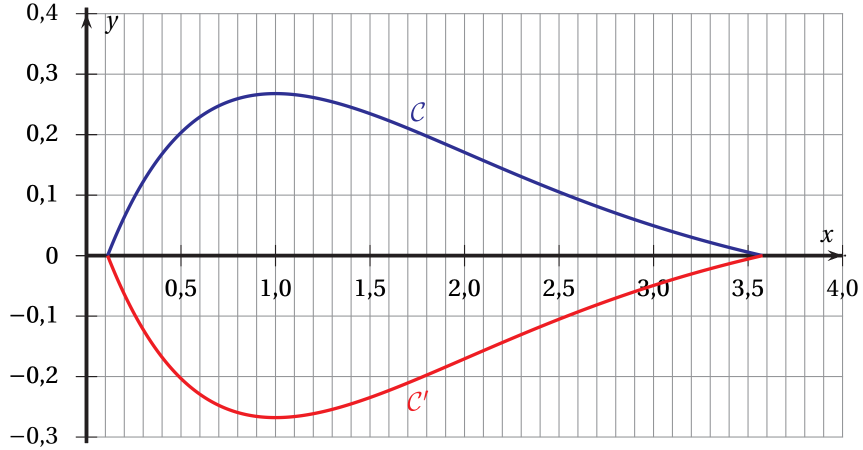
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathcal{C}'$ la courbe symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ par

$$\mathrm{F}(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x} - 0,1x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$.

5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à $0,01$ près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

On utilisera les valeurs arrondies à $0,001$ près suivantes : $\alpha \approx 0,112$ et $\beta \approx 3,577$.

6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.

EXERCICE 50 correction **Polynésie 2016**

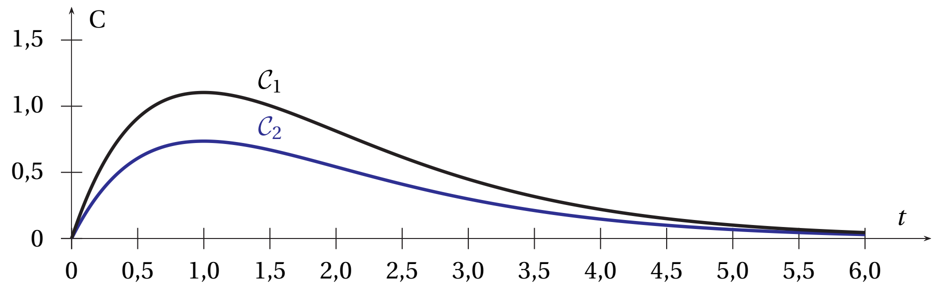
Commun à tous les candidats

Partie A

Voici deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note C$'$ sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.

À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \mathrm{A}t\mathrm{e}^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

(a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

(b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?

« À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

(a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que

$f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

(b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?

Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à

5×10^{-3} g.L^{-1}.

(a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

(b) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par

$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur $3,5$
	p prend la valeur $0,25$
	C prend la valeur $0,21$
Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t + p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.

Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

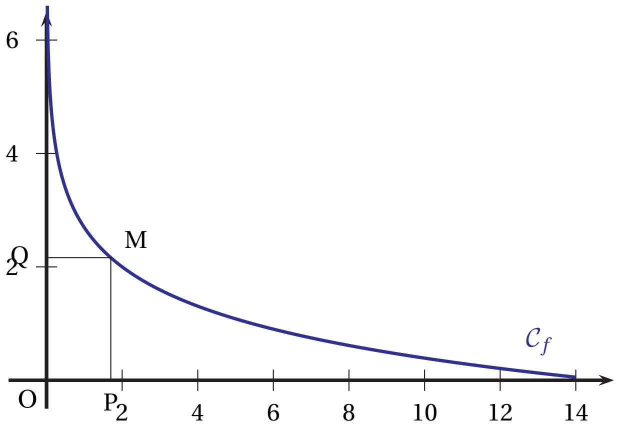
EXERCICE 51 correction Pondichéry 2016

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathcal{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathcal{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?

  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

EXERCICE 52 correction Pondichéry 2016

Commun à tous les candidats

On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25$ °C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100$ °C.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.

Arrondir à l'unité.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. (a) Étudier le sens de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

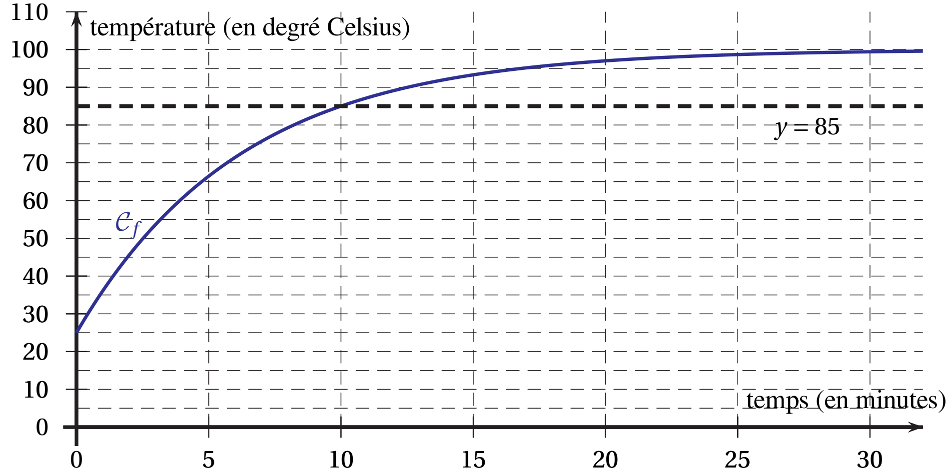
(b) Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$,

$y = 85$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80.

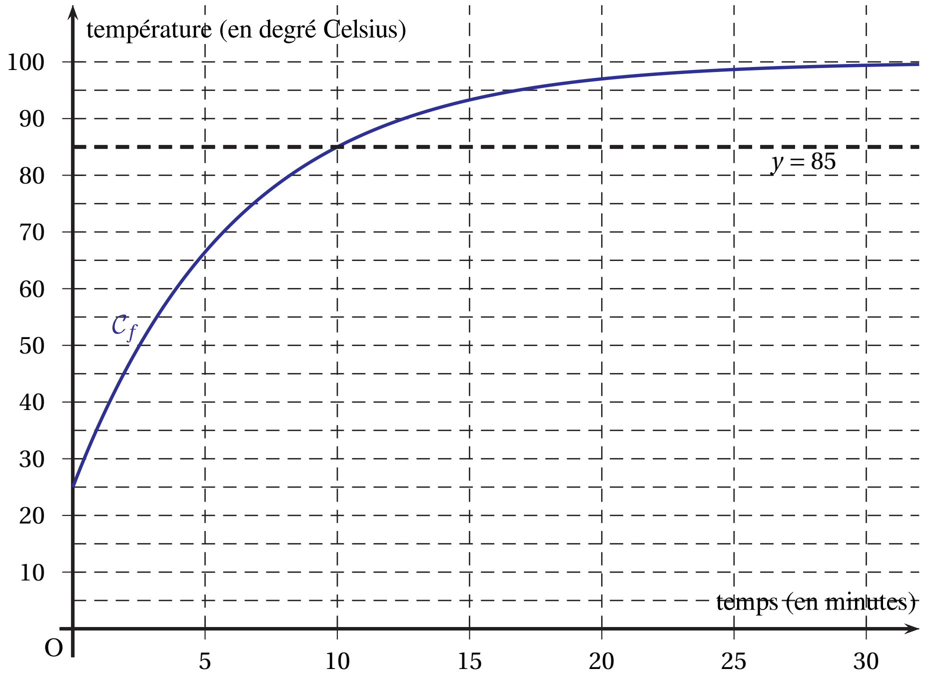


(a) Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe , que l'on a $\mathcal{A}(25) > 80$.

(b) Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\displaystyle\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$.

(c) La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

Annexe


température (en degré Celsius)
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
O
5
10
15
20
25
30
$y = 85$
$\mathcal{C}_f$
temps (en minutes)

Correction

Exercice 1 énoncé **Antilles 2011**

Commun à tous les candidats

1. (a) □ Il n'y a aucune forme indéterminée, d'après les limites usuelles :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty$, donc par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

□ La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$. Comme $x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, alors $f'(x) \geqslant 0$ et la fonction f est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(b) La fonction f est continue (car dérivable), strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ sur l'intervalle $\left[f(0)\ ;\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[= [-1\ ;\ +\infty[$. Comme $0 \in [-1\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans $[0\ ;\ +\infty[$.

À l'aide de la calculatrice $\alpha \simeq 0{,}57$ à 10^{-2} près.

(c) $f(\alpha) = 0$ et f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, on en déduit donc que :

□ si $0 \leqslant x < \alpha$, alors $f(x) < 0$;

□ si $x > \alpha$, alors $f(x) > 0$.

2. (a) Pour tout $x > 0$, on a $\mathrm{M}(x\ ;\ \mathrm{e}^x)$ et $\mathrm{N}(x\ ;\ \ln x)$. On a donc $\mathrm{MN} = |\mathrm{e}^x - \ln x| = \mathrm{e}^x - \ln x$, d'après le rappel de l'énoncé. Posons $g(x) = \mathrm{e}^x - \ln x$, alors g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$. On a donc, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x > \alpha.$$

Ainsi, g est strictement croissante sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$ et décroissante sur $]0\ ;\ \alpha[$. Elle admet donc un minimum en $x = \alpha$. La distance MN est donc minimale lorsque $x = \alpha$ et cette longueur minimale vaut alors $\mathrm{e}^\alpha - \ln(\alpha) \simeq 2{,}33$ à 10^{-2} près.

(b) On a $f(\alpha) = 0$, donc $\alpha\mathrm{e}^\alpha - 1 = 0$, d'où $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α a pour coefficient directeur le nombre dérivé de exp en α, c'est-à-dire e^α.

La tangente à Γ au point d'abscisse α a pour coefficient directeur le nombre dérivé de ln en α, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\alpha}$.

D'après ce qui précède, ces deux valeurs sont égales ; les deux tangentes ayant le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

3. (a) h est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout $x > 0$: $h'(x) = x \times \dfrac{1}{x} + 1 \times \ln x - 1 = \ln x$. h est donc une primitive de la fonction ln sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(b) $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ, donc, l'aire $\mathcal{A}$ hachurée sur la figure est donnée (en unités d'aire) par :

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \mathrm{e}^x - \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x - h(x)\right]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 2\ln 2 + 1 \simeq 4{,}28.$$

Exercice 2 énoncé **Asie 2011**

1.

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(a) La limite de la fonction f en 0 est $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0\ ;\ x>0}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0\ ;\ x>0}(\ln(x)) = -\infty$; donc on obtient par produit le résultat énoncé.

En $+\infty$, la limite de la fonction f est 0 (voir le cours).

(b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - 1\times\ln(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\times(1-\ln(x))$.

(c) $f'(x)$ est du signe de $(1-\ln(x))$ sur $]0\ ;\ +\infty[$,
or sur $]0\ ;\ +\infty[$;
$1-\ln(x) > 0 \iff x < \mathrm{e}$; $\quad 1-\ln(x) < 0 \iff x > \mathrm{e}$; $\quad 1-\ln(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

(a) La limite de g en 0 est $+\infty$ car $g(x) = f(x)\times\ln(x)$ or ,
$\lim\limits_{x\to 0;x>0}(\ln(x)) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0\ ;\ x>0}(f(x)) = -\infty$; donc on obtient par produit le résultat énoncé.
La limite de g en $+\infty$ est 0 car :

$$4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{(\ln(x))^2}{x} = g(x)\,.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2\right) = \lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\left(4\left(\frac{\ln(\mathrm{X})}{\mathrm{X}}\right)^2\right) = 0$ car $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty}\left(\frac{\ln(\mathrm{X})}{\mathrm{X}}\right) = 0$; on a posé $\mathrm{X} = \sqrt{x}$ et X tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

(b) $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\times(2\ln(x) - (\ln(x))^2) = \dfrac{1}{x^2}\times(2-\ln(x))\times\ln(x)$,

donc $g'(x)$ s'annule si et seulement si $\ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 2$ donc pour $x = 1$ ou $x = \mathrm{e}^2$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln(x)$	||	$-$	0			$+$	
$(2-\ln(x))$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

(c)

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	0
g	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{\mathrm{e}^2}$	$\searrow$	0

3. (a) Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent aux points dont les abscisses sont les solutions $f(x) = g(x)$
$f(x) = g(x) \iff \ln(x) = (\ln(x))^2 \iff 0 = (\ln(x))^2 - \ln(x) \iff 0 = \ln(x)\times(\ln(x)-1) \iff$
$\ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 1 \iff x = 1$ ou $x = \mathrm{e}$
ce sont les deux points $\mathrm{A}(1\ ;\ 0)$; $\mathrm{B}\left(\mathrm{e}\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(b) La position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est donnée par l'étude du signe de $f(x)-g(x)$.
$f(x)-g(x) < 0 \iff \ln(x) < (\ln(x))^2 \iff \ln(x)(1-\ln(x)) < 0$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$	||	$-$	0			$+$	
$(1-\ln(x))$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln(x)\times(1-\ln(x))$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

$f(x) - g(x) < 0 \iff \ln(x) < 0 \text{ ou } \ln(x) > 1 \iff x < 1 \text{ ou } x > \mathrm{e}$
$f(x) - g(x) > 0 \iff 1 < x < \mathrm{e}$

La courbe de f est au dessus de la courbe de g pour $x \in]1\,;\,\mathrm{e}[$.
La courbe de f est au dessous de la courbe de g pour $x \in]0\,;\,1[\cap]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
La courbe de f coupe la courbe de g pour $x = 1$ ou pour $x = \mathrm{e}$.

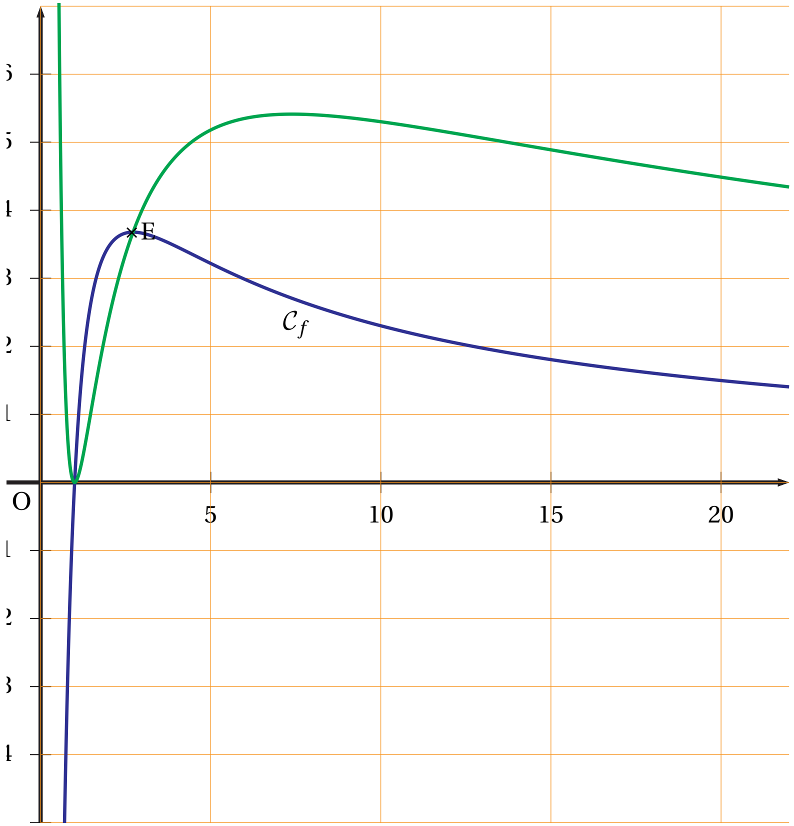
(c) On a tracé sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe C_g.

4. $\mathcal{A} = \int_1^{\mathrm{e}} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ car sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$, $f(x) \geqslant g(x)$ et f et g sont continues sur cet intervalle.
$\mathcal{A} = \int_1^{\mathrm{e}} (\frac{\ln(x)}{x})\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} (\frac{(\ln(x))^2}{x}) dx = [\frac{(\ln(x))^2}{2} - \frac{(\ln(x))^3}{3}]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(pour trouver les primitives, on a reconnu la forme $u^n \times u'$ avec $u : x \mapsto u(x) = \ln(x)$ et $u' : x \mapsto u'(x) = \frac{1}{x}$ et pour la première intégrale $n = 1$ c'est $u \times u'$ et pour la deuxième $n = 2$ c'est $u^2 \times u'$;

et si $n \neq -1$, alors $u^n \times u'$ a pour primitive $x \mapsto \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$.

Annexe 1



Exercice 3 énoncé **La Réunion 2011**

Partie A

1. (a) La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne prend que des valeurs strictement positives, alors la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}+1$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{4\mathrm{e}x(\mathrm{e}2x+1)-2\mathrm{e}2x\times 4\mathrm{e}x}{(\mathrm{e}2x+1)^2} = -\dfrac{4\mathrm{e}x(1-\mathrm{e}2x)}{(\mathrm{e}2x+1)^2}$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\quad f'(x) = \frac{4\mathrm{e}x(\mathrm{e}2x-1)}{(\mathrm{e}2x+1)^2}}$$

(b) Pour tout réel x,

$$\frac{4\mathrm{e}x}{(\mathrm{e}2x+1)^2} > 0$$

alors $f'(x)$ est du même signe que $\mathrm{e}2x-1$.
Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x>0$, on a $2x>0$, alors $\mathrm{e}2x > \mathrm{e}0$ soit $\mathrm{e}2x-1>0$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x)>0$ et $f'(0)=0$, alors

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[}$$

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 1-\frac{4\mathrm{e}-x}{\mathrm{e}-2x+1} = 1-\frac{4\mathrm{e}-x}{\mathrm{e}-2x(1+\mathrm{e}2x)} = 1-\frac{4\mathrm{e}x}{1+\mathrm{e}2x} = f(x)$$

Ainsi la fonction f est paire et, graphiquement :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathcal{C} \text{ est symétrique par rapport à la droite d'équation } x=0}$$

3. (a) Les coordonnées du point A sont $(a,0)$ avec $a>0$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$, alors $f(a)=0 \Longrightarrow 1-\dfrac{4\mathrm{e}a}{\mathrm{e}2a+1} = \dfrac{\mathrm{e}2a-4\mathrm{e}a+1}{\mathrm{e}2a+1} = 0 \Longrightarrow (\mathrm{e}a)^2-4\mathrm{e}a+1=0$

Si on pose $c=\mathrm{e}a$, alors

$$\boxed{c \text{ est une solution de l'équation } x^2-4x+1=0}$$

On résout l'équation $x^2-4x+1=0$; elle admet deux solutions réelles positives $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$, alors $a \in \left\{\ln\left(2-\sqrt{3}\right), \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}$.
Puisque $2-\sqrt{3} \in]0;1[$, alors $\ln\left(2-\sqrt{3}\right)<0$ et, a étant positif :

$$\boxed{a = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

(b) f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et s'annule en $a=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ alors, en utilisant la parité de f, on en déduit :

- $f(x)>0$ si $x \in]-\infty;-a[\cup]a;+\infty[$;
- $f(x)<0$ si $x \in]-a;a[$;
- $f(-a)=f(a)=0$.

Partie B

1. On reconnaît, sous forme intégrale, l'expression de la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction f, alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{F}'=f$. Les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$ se déduisent alors du signe de $f(x)$:

- F est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-a]$ et sur $[a\,;\,+\infty[$;
- F est strictement décroissante sur $[-a\,;\,a]$.

2. f étant continue et négative sur $[0\,;\,a]$, $\mathrm{F}(a) = \displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ est l'opposé de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=a$. Ce domaine est contenu dans un rectangle dont les dimensions sont $\left|f(0)\right|=1$ et a, alors $0 \leqslant -\mathrm{F}(a) \leqslant 1\times a$, d'où :

$$\boxed{-a \leqslant \mathrm{F}(a) \leqslant 0}$$

3. **(a)** Soit $t \in [0,+\infty[$, $f(t) = 1 - \dfrac{4\mathrm{e}t}{\mathrm{e}2t(1+\mathrm{e}-2t)} = 1 - 4\mathrm{e}-t \times \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}-2t}\right)$.

On est donc amené à comparer $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}-2t}$ avec 1 ;

Soit $t \geqslant 0$, on a : $\mathrm{e}-2t > 0$, puis : $\mathrm{e}-2t+1 > 1$,
alors, par stricte décroissance de la fonction « inverse » sur $]0;+\infty[$,

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}-2t} < 1$$

En multipliant chaque membre par $-4\mathrm{e}-t < 0$:

$$\frac{-4\mathrm{e}-t}{1+\mathrm{e}-2t} > -4\mathrm{e}-t$$

Finalement, en ajoutant 1 :

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } t,\quad f(t) \geqslant 1 - 4\mathrm{e}-t}$$

(b) Soit $x \geqslant 0$.
Puisque l'intégrale entre des bornes croissantes « conserve l'ordre », alors (d'après la question précédente) :

$$\underbrace{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{F}(x)} \geqslant \underbrace{\int_0^x (1-4\mathrm{e}-t)\,\mathrm{d}t}_{[t+4\mathrm{e}-t]_0^x}$$

$[t+4\mathrm{e}-t]_0^x = x + 4\mathrm{e}-x - 4 \geqslant x - 4$, car $\mathrm{e}-x > 0$. On a bien :

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } x,\quad \mathrm{F}(x) \geqslant x - 4}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 4 = +\infty$, par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty}$$

4. Puisque la fonction f est paire, on peut penser que sa primitive F qui s'annule en 0 est impaire, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(-x) = -\mathrm{F}(x) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(-x) + \mathrm{F}(x) = 0$$

Pour cela, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(-x)+\mathrm{F}(x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie, pour tout réel x, par $-f(-x)+f(x) = 0$ car f est paire, alors :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(-x)+\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(-0)+\mathrm{F}(0) = 0$. Alors F est impaire.

Par imparité :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = -\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = -\infty}$$

Exercice 4 énoncé **Pondichéry 2011**

Commun à tous les candidats

Partie I

1. L'axe des ordonnées est asymptote à $\mathcal{C}_2$ au voisinage de 0 ; la fonction étant décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, la limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est $+\infty$.

2. De même la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est 0.

3. On ne peut pas savoir.

4. Sur $]0\,;\,1[$ la fonction différence est positive, s'annule en 1, puis est négative : c'est donc le troisième tableau.

Partie II

1. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$, d'où par somme de limites

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. f somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

Chacun des termes est positif sur $]0\,;\,+\infty[$, donc la dérivée est positive sur cet intervalle, donc la fonction est croissante de moins l'infini à plus l'infini.

3. On a de façon évidente $f(1) = \ln 1 + 1 - \dfrac{1}{1} = 0$. La fonction étant croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on a donc :

- $f(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$;
- $f(1) = 0$;
- $f(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

4. F somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x} = f(x)$.

F est donc une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

5. On vient de voir que $F'(x) = f(x)$ et d'après la question 5, $f(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$, donc F est croissante sur cet intervalle.

6. On a $F(1) = 1\times 0 - 0 = 0$ et $F(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \ln\mathrm{e} = \mathrm{e} - 1 \approx 1{,}7$.

D'autre part $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}63$, donc $0 < 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} < \mathrm{e} - 1$.

La fonction F est dérivable donc continue sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$: il existe donc un unique réel $\alpha \in [0;\,\mathrm{e}]$ tel que $F(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

7. La calculatrice donne : $F(1{,}9) - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -0{,}05$ et $F(2{,}0) - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 0{,}06$, donc :

$1{,}9 < \alpha < 2{,}0$.

Partie III

1. L'ordonnée de A est égale à 0 ; il faut donc résoudre l'équation :

$\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff \mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^{-1}$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff x = \mathrm{e}^{-1}$.

On a donc $A\left(\mathrm{e}^{-1}\,;\,0\right)$.

2. P étant commun aux deux courbes son abscisse vérifie :

$g(x) = h(x) \iff \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 \iff f(x) = 0$, d'après la partie II. Or dans cette partie on a vu que f s'annule en 1 et $g(1) = h(1) = 1$. Donc le point commun aux deux courbes est le point $P(1\,;\,1)$.

3. (a) On a vu que sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,1\right]$, $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire que $g(x) \geqslant h(x)$ (la courbe $\mathcal{C}_g$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_h$), donc

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} [g(x) - h(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} -f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) On a vu qu'une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc en particulier sur $\left[\frac{1}{e}\ ;\ 1\right]$ est $F(x) = x\ln(x) - \ln(x)$.

On a donc :

$\mathcal{A} = [-F(x)]_{\frac{1}{e}}^{1} = -F(1) + F\left(\frac{1}{e}\right) =$

$0 + \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-\ln(e)) - (-\ln(e)) = 1 - \dfrac{1}{e}$.

4. (a) On a vu que sur $[1\ ;\ +\infty[$, $h(x) \geqslant g(x)$, donc puisque $t \geqslant 1$, l'aire $\mathcal{B}_t$ est égale à :

$\mathcal{B}_t = \displaystyle\int_1^t [h(x) - g(x)]\,dx = \int_1^t -f(x)\,dx = -F(t) + F(1) = -F(t) = t\ln(t) - \ln t$.

(b) On a vu que $\mathcal{B}_t = 1 - \dfrac{1}{e}$ ou encore $t\ln(t) - \ln t = 1 - \dfrac{1}{e}$ soit $F(t) = 1 - \dfrac{1}{e}$ équation qui a été résolue à la question 6 de la partie II et qui a pour solution $\alpha \approx 1,9$.

Exercice 5 énoncé **Amerique du Nord 2012**

Partie A. Restitution organisée des connaissances

On pose $x = e^t$, on a donc $x > 0$, $\ln(x) = t$. On a $\lim_{t\to\infty} e^t = +\infty = \lim_{t\to\infty} x$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(e^t)}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ puisque $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

Partie B.

1. La fonction g est dérivable d'après les théorèmes généraux et $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$. Pour $x \geqslant 1$, $2x > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$, donc $g'(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

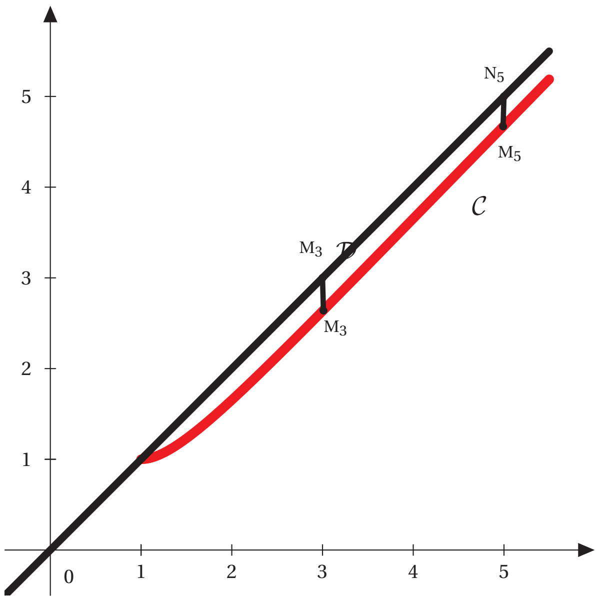
2. (a) La fonction $f(x) = u(x) - \frac{v(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. u et v sont dérivables avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. D'après les théorèmes généraux f est dérivable et on a $f'(x) = u'(x) - \frac{v'(x)u(x) - v(x)u'(x)}{u(x)^2} = 1 - \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

(b) Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $g(x) > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

(c) $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

(d) Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ et $x > 0$, donc $\frac{\ln(x)}{x} \geqslant 0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ est située en dessous de la droite $\mathcal{D}$.

3. (a) Un graphique pour comprendre :



La distance $M_kN_k = |f(x) - x| = \frac{\ln(k)}{k} > 0$.

Variables	k est un entier
	d est une variable réelle
Initialisation	$k := 2$; $d := \frac{\ln(k)}{k}$
Traitement	Tant que $d > 10^{-2}$
	Début du tant que
	$k := k + 1$;
	$d := \frac{\ln(k)}{k}$;
	Fin du tant que
Sortie	Afficher k

Exercice 6 énoncé Centres Étrangers 2012

Partie A : Conjecture graphique

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Il semble y en avoir 2. L'une comprise entre -1 et 0, l'autre entre 0 et 1.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

(b) 1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x^3 = x^2(1+x)$. Comme un carré est positif ou nul, x^2+x^3 est du signe de $1+x$.

- $x^2+x^3=0$ pour $x \in \{-1\,;\,0\}$.
- $x^2+x^3>0$ pour $x \in]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.
- $x^2+x^3<0$ pour $x \in]-\infty\,;\,-1[$.

(b) x solution de (E) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 3\left(x^2+x^3\right) \Leftrightarrow x^2+x^3 = \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$. Or, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{3}>0$, alors que $x^2+x^3<0$ pour $x \in]\infty\,;\,-1[$. (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.

(c) $\mathrm{e}^0=1$ et $3\times(0^2+0^3)=0$. Donc 0 n'est pas solution de (E).

2. $\forall x \in]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, (E)

$$\begin{array}{lll}
\Leftrightarrow & \mathrm{e}^x = 3\left(x^2+x^3\right) & \\
\Leftrightarrow & \ln \mathrm{e}^x = \ln\left(3\left(x^2+x^3\right)\right) & a=b \Leftrightarrow \ln a = \ln b \\
\Leftrightarrow & x = \ln 3 + \ln\left(x^2(1+x)\right) & \ln(ab) = \ln a + \ln b \\
\Leftrightarrow & x = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) & \\
\Leftrightarrow & \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x = 0 & \\
\Leftrightarrow & h(x) = 0 &
\end{array}$$

3. (a) h est une somme et composée de fonctions de référence dérivables, donc h est bien dérivable sur $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

Si $u>0$ sur un intervalle, alors $\ln u$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.

Pour tout réel $x \in]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, $h'(x) = 0+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x+1}-1 = \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}-1 = \dfrac{2(x+1)+x-x(x+1)}{x(x+1)}$

On a bien : $h'(x) = \dfrac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}$.

(b) Pour étudier le sens de variations de h, on étudie le signe de sa dérivée.

Les numérateurs et dénominateurs sont des trinômes du second degré.

Pour le dénominateur, les racines sont 0 et -1, le coefficient dominant est $1>0$. Il est donc positif « à l'extérieur » des racines, négatif « entre » les racines (voir le tableau).

Pour le numérateur, pas de racine évidente. On calcule donc le discriminant. On trouve : $\Delta = 12>0$ et les deux racines sont $x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1-\sqrt{3}$ et $x_2 = 1+\sqrt{3}$. Le coefficient dominant est $-1>0$, d'où le signe...

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+2x+2$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$x(x+1)$	0		$-$		0		$+$		
$h'(x)$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	

Étude des limites aux bornes :

- Limite en -1

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to-1} \ln 3 - x = \ln 3 - 1 \\
\left\{\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to-1} x^2 & = & 1 \\ \lim\limits_{X\to1} \ln X & = & 0 \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-1} \ln x^2 = 0 \\
\left\{\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to-1} 1+x & = & 0 \\ \lim\limits_{X\to0} \ln X & = & -\infty \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty
\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-1} h(x) = -\infty$$

- Limite en 0

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to0} \ln 3 - x = \ln 3 \\
\left\{\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to0} x^2 & = & 0 \\ \lim\limits_{X\to0} \ln X & = & -\infty \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to0} \ln x^2 = -\infty \\
\left\{\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to0} 1+x & = & 1 \\ \lim\limits_{X\to1} \ln X & = & 0 \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to0} \ln(1+x) = 0
\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to0} h(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln 3 - x = -\infty \\ \left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X & = & +\infty \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x^2 = +\infty \\ \left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+x & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X & = & +\infty \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \text{on a la F.I. ń} +$$

$\infty - \infty$ ż

$$h(x) = \ln 3 + (x+1)\left(\frac{2\ln x}{x+1} + \frac{\ln(1+x)}{x+1} - \frac{x}{x+1}\right).$$

Or

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 1$

- $\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+x & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} & = & 0 \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} = 0$

- Pour tout $x > 1, 0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x+1} < \dfrac{\ln x}{x}$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et le théorème des gendarmes assure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1} = 0$

  Finalement avec des opérations élémentaires, on obtient enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

  Pour avoir le tableau de variations complet, il nous faut encore les signes de $h\left(1-\sqrt{3}\right) < 0$ et $h(1+\sqrt{3}) > 0$ que l'on obtient avec la calculatrice.

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		α_1		$1+\sqrt{3}$		α_2		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖		$+$		0		$-$		
$h(x)$	‖ 0	↗	$h(1-\sqrt{3})$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$h(1+\sqrt{3})$	↘	0	↘	$-\infty$

(c) □ Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $h(1-\sqrt{3})$ est un maximum pour h sur cet intervalle. Or $h(1-\sqrt{3}) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-1\ ;\ 0[$. C'est une première contradiction avec la conjecture de la partie A.

□ Sur l'intervalle $]0\ ;\ 1+\sqrt{3}[$ la fonction h est dérivable, donc continue ; 0 est compris entre $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet donc au moins une solution sur $\left[0\ ;\ 1+\sqrt{3}\right[$. Comme h est strictement monotone sur cet intervalle, cette solution α_1 est unique.

La calculatrice donne : $h(0,61) \approx -0,02$ et $h(0,62) \approx 0,24$.

0 est donc compris entre $h(0,61)$ et $h(0,62)$, le raisonnement précédent assure donc que $\alpha_1 \in [0,61\ ;\ 0,62]$.

On trouve de même que $0,618 < \alpha_1 < 0,619$

Une valeur approchée de α_1, arrondie au centième est donc $0,62$.

□ Comme $h(1+\sqrt{3}) > 0$, 0 est aussi compris entre $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right)$. Le même raisonnement assure donc l'existence d'une autre solution dans cet intervalle. Voir le tableau.

Avec la calculatrice, on trouve $7,12$ comme valeur approchée de α_2, arrondie au centième.

(d) La conjecture de la partie A est erronée. Il y a bien deux solutions mais pas dans les intervalles prévus !

EXERCICE 7 énoncé **Métropole 2012**

Commun à tous les candidats

1. Sur l'intervalle $[-3,-1]$, tous les points de la courbe ont une ordonnée négative. VRAIE

2. Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 2[$, on lit que $f'(x)>0$, donc que f est croissante sur cet intervalle. VRAIE

3. Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, on a $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]-1\ ;\ 0[$. Or on sait que $f(0)=-1$. D'après la croissance stricte sur l'intervalle tous les points de cet intervalle ont une image par f inférieure à -1. FAUSSE

4. Pour $x=0$, on lit $f'(0)=1$ et on sait que $f(0)=-1$.

On sait que l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \iff y-(-1)=1x \iff y=x-1$. Cette tangente contient bien le point de coordonnées (1 ; 0) car ces cordonnées vérifient l'équation de la tangente. VRAIE

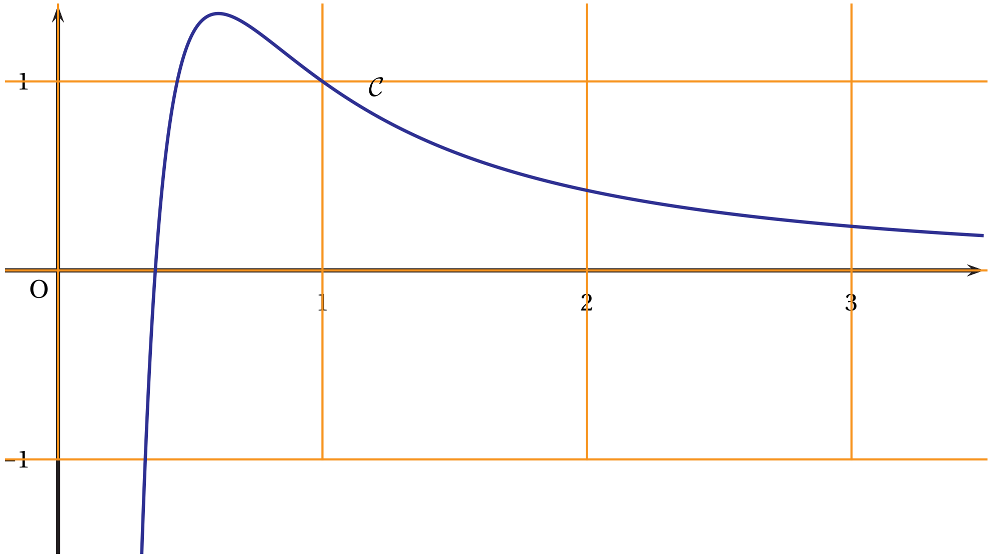
Exercice 8 énoncé **Amerique du Nord 2013**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1. (a) Étudions la limite de f en 0.

On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}1+\ln(x)=-\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, alors par produit des limites, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$

(b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$,

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, alors par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$,

On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, et en ajoutant ces deux dernières limites, on obtient :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ prouve que l'axe des ordonnées est asymptote verticale .

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ que l'axe des abscisses est asymptote horizontale.à $\mathcal{C}$

2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x\ln x}{x^4}=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

(b) $-1-2\ln x>0 \iff \ln x<-\dfrac{1}{2} \iff x<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

Pour tout $x\in]0\,;\,+\infty[$, $x^2>0$ et $f'(x)$ est du signe de $-1-2\ln(x)$.

(c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

On a $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{-1}}=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	↘	0

3. (a) On a : $f(x)=0 \iff 1+\ln x=0 \iff \ln x=-1 \iff x=\mathrm{e}^{-1}$

Ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, le point de coordonnées $(\mathrm{e}^{-1}\,;\,0)$

(b) D'après le tableau des variations de f et sachant que $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right)=0$.

On en déduit que $f(x)>0$ sur l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$ et $f(x)<0$ sur l'intervalle $\left]0;\,\mathrm{e}^{-1}\right[$.

4. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x=n$.

(a) On sait que $f > 0$ sur $]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty[$, donc $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$

Sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,2\right]$ on a au vu des variations de f : $0 < f(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}$. Comme l'intégration conserve l'ordre et le signe, on en déduit :

$0 \leqslant \mathrm{I}_2 \leqslant \displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{n} \frac{\mathrm{e}}{2}dx = \frac{\mathrm{e}}{2}\left(2 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \mathrm{e} - \frac{1}{2}$ et finalement :

$0 \leqslant \mathrm{I}_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{-2 - \ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Calculons I_n en fonction de n. On a :

$\mathrm{I}_n = \left[\dfrac{-2 - \ln x}{x}\right]_0^n = \dfrac{-2 - \ln n}{n} - \left(\dfrac{-2 - \ln(\mathrm{e}^{-1})}{\mathrm{e}^{-1}}\right) = \dfrac{-2 - \ln n}{n} - (-2 + 1)\mathrm{e}$

Et finalement :

$\mathrm{I}_n = \dfrac{-2 - \ln n}{n} + \mathrm{e} = \mathrm{e} - \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{2}{n}$

(c) Étudions la limite de I_n en $+\infty$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \mathrm{e}$.

Graphiquement cela signifie que l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 **5 points**

EXERCICE 9 énoncé **Amerique du Sud 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

1. $\mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$ donc $f(x) = \mathrm{e} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

2. $\lim x{-}\infty 1 - x = +\infty$ donc $\lim x{-}\infty \mathrm{e}^{1-x} = +\infty$ (par composition).

$$\left.\begin{array}{l}\lim x{-}\infty x = -\infty \\ \lim x{-}\infty \mathrm{e}^{1-x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim x{-}\infty x\mathrm{e}^{1-x} = -\infty \text{ (par produit) ; } \lim x{-}\infty f(x) = -\infty.$$

3. On sait que $\lim x{+}\infty \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim x{+}\infty \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\lim x{+}\infty \mathrm{e}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

On a donc $\lim x{+}\infty f(x) = 0$ ce qui veut dire que la courbe représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{1-x} + x(-1)\mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e}^{1-x}(1-x)$

5. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

$f(1) = 1\mathrm{e}^0 = 1$, d'où le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1. $$\begin{aligned}(1-x)\,g_n(x) &= (1-x)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)\\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\\ &\quad - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^n - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$.

2. Pour tout x, $g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ donc $g_n'(x) = 0 + 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = h_n(x)$.

Or, pour tout réel $x \neq 1$, $g_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$;

g_n est une fonction rationnelle de type $\dfrac{u}{v}$ dont la dérivée est $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$h_n(x) = g_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - \left(1 - x^{n+1}\right)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{-(n+1)x^n + nx^{n+1} + x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, où $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

$S_n = 1 + 2\mathrm{e}^{-1} + \cdots + n\mathrm{e}^{1-n} = 1 + 2\mathrm{e}^{-1} + \cdots + n\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n-1} = h_n\left(\mathrm{e}^{-1}\right)$.

Or $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$ donc $h_n\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \dfrac{n\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^n + 1}{\left(1 - \left(\mathrm{e}^{-1}\right)\right)^2}$;

$$S_n = \frac{\dfrac{n}{\mathrm{e}^{n+1}} - \dfrac{n+1}{\mathrm{e}^n} + 1}{\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}$$

On sait que $\lim x{+}\infty \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim x{+}\infty \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\lim n{+}\infty \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$ et $\lim n{+}\infty \dfrac{n+1}{\mathrm{e}^{n+1}} = 0$.

De plus, $\lim x{+}\infty \dfrac{x}{x+1} = 1$ et $\lim x{+}\infty \dfrac{x+1}{x} = 1$ comme limites en $+\infty$ de fonctions rationnelles,

donc $\lim n{+}\infty \dfrac{n}{n+1} = 1$ et $\lim n{+}\infty \dfrac{n+1}{n} = 1$.

$\dfrac{n}{\mathrm{e}^{n+1}} = \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{n+1}{\mathrm{e}^{n+1}}$; donc par produit, $\lim n{+}\infty \dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{n+1}{\mathrm{e}^{n+1}} = 1 \times 0 = 0$.

$\dfrac{n+1}{\mathrm{e}^n} = \dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{n}{\mathrm{e}^n}$; donc par produit, $\lim n{+}\infty \dfrac{n+1}{n} \times \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} = 1 \times 0 = 0$.

Donc $\lim n{+}\infty \mathrm{S}_n = \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}-1)^2}$.

Exercice 10 énoncé Asie 2013

Commun à tous les candidats

Partie A

Voir la figure.

Partie B

1. (a) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égal à $f'(a)$. Or $f'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $f'(a) = \mathrm{e}^a$.

(b) De même le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égal à $g'(b)$. Or $g'(x) = -(-\mathrm{e}^{-x})$, donc $g'(b) = \mathrm{e}^{-b}$.

(c) Si les deux tangentes sont égales le coefficient directeur de leurs équations réduites sont égaux, soit :

$f'(a) = g'(b) \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-b}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien : $a = -b \iff b = -a$.

2. Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égale à :

$y - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x-a) \iff y = x\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a(1-a)$.

Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égale à :

$y - \left(1-\mathrm{e}^{-b}\right) = \mathrm{e}^{-b}(x-b) \iff y = x\mathrm{e}^{-b} + 1 - \mathrm{e}^{-b} - b\mathrm{e}^{-b}$.

Ou en remplaçant $-b$ par a :

$y = x\mathrm{e}^a + 1 - \mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a \iff y = x\mathrm{e}^a + 1 + \mathrm{e}^a(a-1)$.

Si les deux tangentes sont égales, leurs équations réduites sont les mêmes. On a déjà vu l'égalité des coefficients directeurs. Les ordonnées à l'origine sont aussi les mêmes soit :

$\mathrm{e}^a(1-a) = 1 + \mathrm{e}^a(a-1) \iff \mathrm{e}^a(2-2a) = 1 \iff 2(a-1)\mathrm{e}^a + 1 = 0$.

Donc a est solution de l'équation dans $\mathbb{R}$:

$$2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

Partie C

1. (a) Sur $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, d'où par somme de limite :

$\lim\limits_{x to -\infty} \varphi(x) = 1$.

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de φ.

On a $\lim\limits_{x to +\infty} (x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

(b) Somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\varphi'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2(x-1)\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x$.

Comme, quel que soit $x \in \mathbb{R}$; $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x. Donc sur $]-\infty\,;\,0[$, $\varphi'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle et sur $]0\,;\,+\infty[$, $\varphi'(x) > 0$: la fonction φ est croissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :

(c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) Sur $]-\infty\,;\,0]$ la fonction φ est continue et décroissante à valeurs dans $[-1\,;\,1]$. Comme $0 \in [-1\,;\,1]$ il existe un réel unique α de $]-\infty\,;\,0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Le même raisonnement sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ montre qu'il existe un réel unique de cet intervalle β tel que $f(\beta) = 0$.

Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

(b) La calculatrice donne successivement :

$\varphi(-2) \approx 0{,}18$ et $\varphi(-1) \approx -0{,}47$, donc $-2 < \alpha < -1$;

$\varphi(-1{,}7) \approx 0{,}013$ et $\varphi(-1{,}6) \approx -0{,}05$, donc $-1{,}7 < \alpha < -1{,}6$;

$\varphi(-1{,}68) \approx 0{,}001$ et $\varphi(-1{,}67) \approx -0{,}005$, donc $-1{,}68 < \alpha < -1{,}67$;

$\varphi(-1{,}679) \approx 0{,}00041$ et $\varphi(-1{,}678) \approx -0{,}0002$, donc $-1{,}679 < \alpha < -1{,}678$.

Conclusion au centième près $\alpha \approx -1{,}68$.

De la même façon on obtient $\beta \approx 0{,}77$.

Partie D

1. On sait que E appartient à la droite (EF) et à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$. $E(\alpha\,;\,e^{\alpha})$ et $F(-\alpha\,;\,1-e^{-\alpha})$.

L'équation de la tangente en E à la courbe $\mathcal{C}_f$ est :

$y - e^{\alpha} = e^{\alpha}(x-\alpha)$.

F appartient à cette tangente si et seulement si :

$1-e^{-\alpha}-e^{\alpha} = e^{\alpha}(-\alpha-\alpha) \iff 1-2e^{-\alpha} = -2e^{\alpha} \iff 2(\alpha-1)e^{\alpha}+1=0$ ce qui a été démontré à la question 2. b. de la partie C.

Conclusion : la droite (EF) est bien la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α.

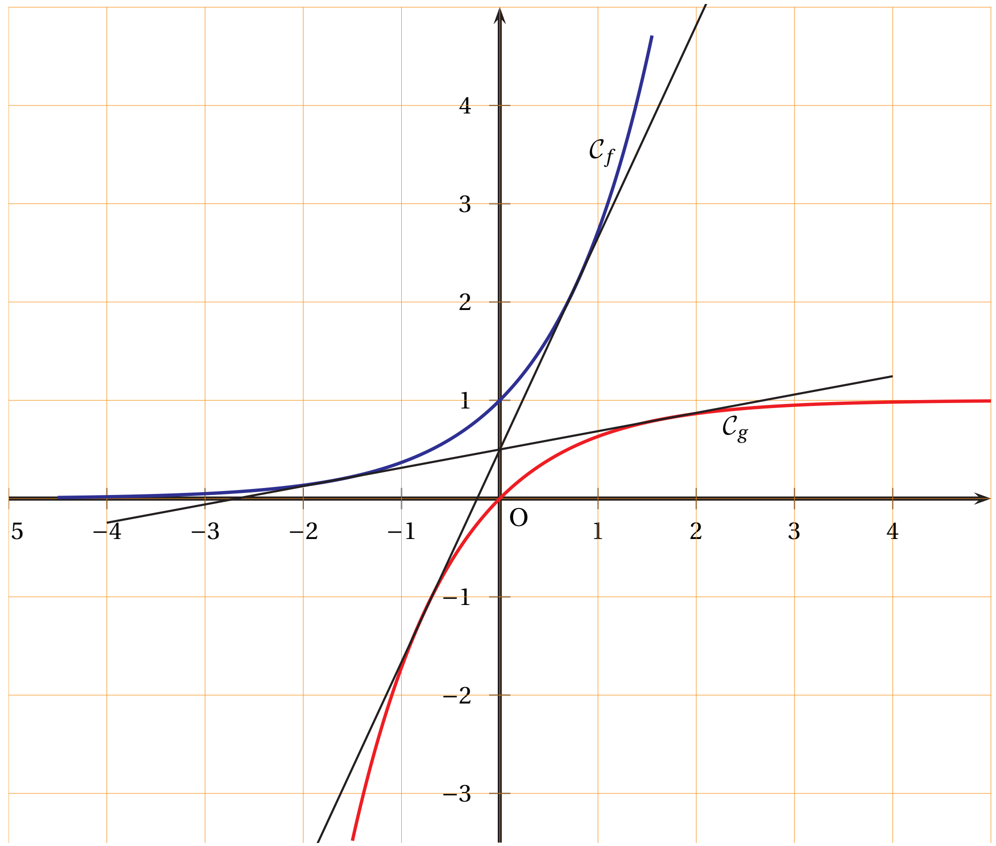
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$ est $e^{-(-\alpha)} = e^{\alpha}$.

On a vu dans la question précédente que la droite (EF) a pour coefficient directeur e^{α} et contient le point F.

Conclusion la droite (EF) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.

Annexe

à rendre avec la copie



EXERCICE 11 énoncé **Antilles 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. $\lim x{+}\infty(x+1) = +\infty$ et $\lim x{+}\infty \mathrm{e}^x = +\infty$, donc, par opérations $\lim x{+}\infty f(x) = +\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$. Or $\lim x{-}\infty x\mathrm{e}^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim x{-}\infty \mathrm{e}^x = 0$, donc, par opérations $\lim x{-}\infty f(x) = 0$.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = 1\mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$.

3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}^2$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. (a) On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x+1 = m\mathrm{e}^x \\ &\iff (x+1)\mathrm{e}^x = m \\ &\iff f(x) = m. \end{aligned}$$

(b) D'après l'équivalence et le tableau de variations précédents :

- si $m < -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ ne possède aucune solution, donc $\mathcal{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses ;
- si $m = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point ;
- si $-\frac{1}{\mathrm{e}^2} < m \leqslant 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;
- si $m > 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point.

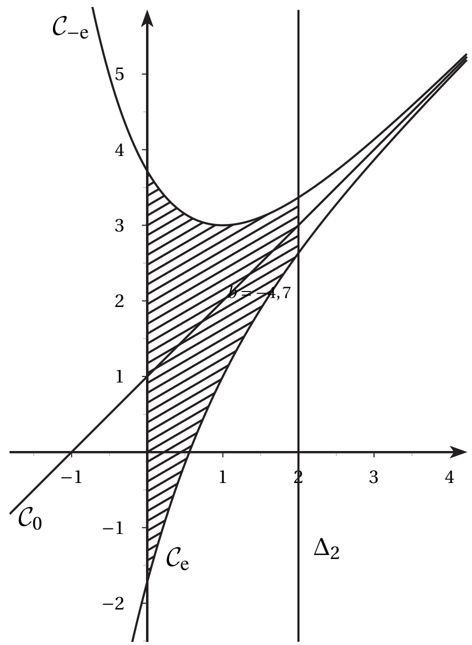
2.
- La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. La seule possibilité est donc que $m = -\mathrm{e}$.
- La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ ou $m = 0$. La seule possibilité est donc $m = 0$.
- Par élimination, la courbe 3 correspond à $m = \mathrm{e}$.

3. Pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = -m\mathrm{e}^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :

- si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathcal{C}_m$ est en dessous de $\mathcal{D}$;
- si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathcal{C}_m$ est au dessus de $\mathcal{D}$;
- si $m = 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = 00$, donc $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{D}$ sont confondues.

4. Le domaine D_2 hachuré :

(a)



(b) Pour tout $a \geqslant 0$, la courbe $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$ est au dessus de $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$, par conséquent l'aire $\mathcal{A}(a)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(a) &= \int_0^a f_{-\mathrm{e}}(x) - f_{\mathrm{e}}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \left((x+1)+\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\right) - \left((x+1)-\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a 2\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\
&= 2\mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a \\
&= 2\mathrm{e}\left(-\mathrm{e}^{-a}+1\right) \\
&= 2\mathrm{e}-2\mathrm{e}^{1-a}.
\end{aligned}$$

On a de plus $\lim a{+}\infty \mathrm{e}^{1-a} = 0$, par conséquent : $\lim a{+}\infty \mathcal{A}(a) = 2\mathrm{e}$.

Exercice 12 énoncé Antilles septembre 2013

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude du cas $k = 1$

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

$f_1(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

Donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_1$ en $+\infty$.

2. f_1 produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$f_1'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, le signe de $f_1'(x)$ est celui de $1-x$.

Donc $f_1'(x) > 0$ si $x < 1$ et $f_1'(x) < 0$ si $x > 1$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

3. $g_1(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$

g_1 étant dérivable, on a pour tout réel,

$g_1'(x) = -1\mathrm{e}^{-x} - 1\times\left[-(x+1)\mathrm{e}^{-x}\right] = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} = f_1(x)$.

Donc g_1 est bien une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. Comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, $f_1(x) = 0 \iff x = 0$.

Le tableau de variations ci-dessus montre donc que $f_1(x) < 0$ sur $]-\infty;0[$ et $f_1(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

5. Comme la fonction est positive sur $]0\,;\,+\infty[$, elle l'est aussi sur $]0\,;\,\ln 10]$, donc l'aire cherchée est en unités d'aire égale à l'intégrale :

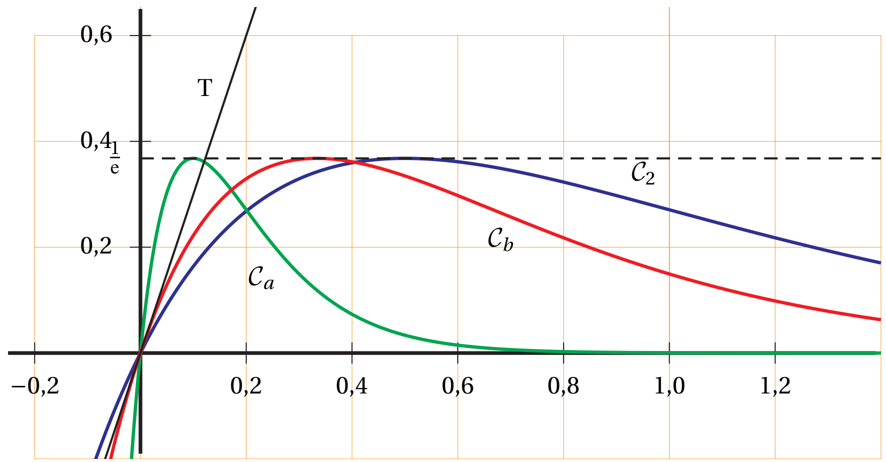
$$\int_0^{\ln 10} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \left[g_1(x)\right]_0^{\ln 10} = g_1(\ln 10) - g_1(0) = -(\ln 10 + 1)\mathrm{e}^{-\ln 10} + \mathrm{e}^0.$$

Comme $\mathrm{e}^{-\ln 10} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 10}} = \dfrac{1}{10}$, l'aire est égale à :

$1 - \dfrac{1+\ln 10}{10} = \dfrac{9}{10} - \dfrac{\ln 10}{10} \approx 0,67$ u. a.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1. De façon évidente $f_k(0) = k \times 0 \times \mathrm{e}^0 = 0$, donc les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par l'origine.

2. (a) Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f_k l'est aussi et :

$f_k'(x) = k\mathrm{e}^{-kx} - k\times kx\mathrm{e}^{-kx} = k\mathrm{e}^{-kx}(1-kx)$.

(b) k strictement positif, et $\mathrm{e}^{-kx} > 0$, pour tout réel x, donc le signe de la dérivée $f_k'(x)$ est celui de $1-kx$.

Or $1-kx < 0 \iff \dfrac{1}{k} < x$; $1-kx > 0 \iff \dfrac{1}{k} > x$; $1-kx = 0 \iff \dfrac{1}{k} = x$.

Il en résulte que la fonction f_k est :

croissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{k}\right[$, et décroissante sur $\left]\dfrac{1}{k}\,;\,+\infty\right[$;

elle admet donc un maximum en $\dfrac{1}{k}$:

$f_k\left(\dfrac{1}{k}\right) = k \times \dfrac{1}{k} \times \mathrm{e}^{-k\times\frac{1}{k}} = 1\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,368$.

Conclusion : toutes les fonctions ont le même maximum e^{-1} pour $x = \dfrac{1}{k}$.

(c) Le maximum pour $k = 2$ est obtenu pour $x = \dfrac{1}{2} = 0,5$, donc le maximum pour f_a est obtenue pour une valeur $\dfrac{1}{a}$ inférieure à 0,5 donc $a > 2$.

Note : en fait on peut penser que l'abscisse du minimum est à peu près égale à 0,1, ce qui correspond à $a = 10$.

(d) Une équation de cette tangente est :

$y = f_k'(0)(x-0) + f_k(0) \iff y = k(1-0)\mathrm{e}^0 x + 0 \iff y = kx$.

(e) Le coefficient directeur de la droite (T) est égal à $\dfrac{0,6}{0,2} = 3$.

Donc la courbe $\mathcal{C}_b$ correspond à la valeur $b = 3$.

Exercice 13 énoncé **Centres Étrangers 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. (a) Soit G la fonction définie sur [0 ; 1] par $G(x) = x - e^{-x}$ est dérivable sur cet intervalle et $G'(x) = 1 - (-e^{-x}) = 1 + e^{-x}$: c'est donc une primitive de g.

Donc $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^a g(x)\,dx = [G(x)]_0^a = \left[x - e^{-x}\right]_0^a = a - e^{-a} - \left(0 - e^{-0}\right) = a + 1 - e^{-a}$.

(b) $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^1 g(x)\,dx = [G(x)]_a^1 = \left[x - e^{-x}\right]_a^1 = 1 - e^{-1} - \left(a - e^{-a}\right) = 1 - a + e^{-a} - e^{-1}$.

2. (a) Somme de fonctions dérivables sur [0 ; 1], f est dérivable sur cet intervalle et :

$f'(x) = 2 + 2e^{-x}$

Les deux termes de cette somme sont positifs, donc sur [0 ; 1], $f'(x) > 0$ et la fonction f est croissante sur [0 ; 1] de $f(0) = -2 + \dfrac{1}{e}$ à $f(1) = 2 - 2e + \dfrac{1}{e}$. D'où le tableau de variation :

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\frac{1}{e} - 2$	$-2 - \frac{1}{e}$

(b) Sur [0 ; 1], f croît de $f(0) \approx -1,6$ à $f(1) \approx 1,6$. Comme elle est croissante et continue elle s'annule une seule fois sur l'intervalle [0 ; 1] pour un réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice permet de trouver que :

$0,4 < \alpha < 0,5$, puis $0,45 < \alpha < 0,46$ et enfin $0,452 < \alpha < 0,453$.

Donc $\alpha \approx 0,45$ au centième près.

3. On a :

$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff a + 1 - e^{-a} = 1 - a + e^{-a} - e^{-1} \iff 2a - e^{-a} + e^{-1} = 0$, ce qui signifie que a est une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur [0 ; 1].

On a vu que cette solution est égale à α.

Finalement les aires sont égales pour $a = \alpha \approx 0,45$.

Partie B

1. On a $g(0) = 1 + 1 = 2$. Il est donc évident que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est inférieure à $2 \times 1 = 2$.

Comme $g(1) = 1 + e^{-1}$, si $b \geqslant 1 + e^{-1}$ chacune des deux aires serait supérieure à 1 ce qui est impossible. Donc $b < 1 + \dfrac{1}{e}$

2. L'aire du domaine du bas est égale à $b \times 1 = b$ qui est égale à la demi-aire de $\mathcal{D}$.

On a donc :

$b = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}[G(x)]_0^1 = \frac{1}{2}\left[x - e^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-1} + e^0\right]$.

Finalement $b = \frac{1}{2}\left(2 - e^{-1}\right) = 1 - \frac{e^{-1}}{2} \approx 0,816$.

Exercice 14 énoncé **Liban 2013**

Partie A

1. Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{-x}=0$, il vient, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_1(x)=1$
Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \mathrm{e}^{-x}=+\infty$, il vient, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_1(x)=0$
Graphiquement cela signifie que les droites d'équation $y=0$ et $y=1$ sont deux asymptotes horizontales à $\mathcal{C}_1$ au voisinage respectivement de moins et plus l'infini.

2. $f_1(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x\times 1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

3. $f_1'=-\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.
Cette expression étant toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$, il en résulte que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4.

$$\mathrm{I}=\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\left[\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]_0^1=\ln(1+\mathrm{e})-\ln 2=\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$$

I s'interprète graphiquement comme la mesure en unité d'aires du domaine limité par $\mathcal{C}_1$, l'axe des x et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. C'est l'aire du rectangle de côté 1 et de longueur $\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$ qui vaut à peu près 0,62 unité d'aire (ce qui se vérifie visuellement sur l'annexe).

Partie B

$\mathrm{P}\left(x\,;\,f_1(x)\right)$ et $\mathrm{M}\left(x\,;\,f_{-1}(x)\right)$. K est le milieu de [MP].

1. $f_1(x)+f_{-1}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1}=1$

2. $y_{\mathrm{K}}=\dfrac{y_{\mathrm{M}}+y_{\mathrm{P}}}{2}=\dfrac{f_1(x)+f_{-1}(x)}{2}=\dfrac{1}{2}$

Le point K est donc un point de la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.

3. Il résulte de la question précédente que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.

4. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine considéré. Par symétrie entre les deux courbes, on obtient

$$\mathcal{A}=2\int_0^1 f_1(x)-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}x=2\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)-1\approx 0,24.$$

Partie C

1. Vrai : Quel que soit $k\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-kx}>0\Longrightarrow 1+\mathrm{e}^{-kx}>1\Longrightarrow 0<\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}}<1$.

2. Faux : On a vu que la fonction f_{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Vrai : Car si $k\geqslant 10$ alors $-\dfrac{1}{2}k\leqslant -5$ puis $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k}\leqslant \mathrm{e}^{-5}$ par croissance de la fonction exponentielle et enfin $1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k}\leqslant 1+\mathrm{e}^{-5}$.
Finalement :

$$0,99<0,9933\leqslant\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-5}}\leqslant\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k}}=f_k\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 15 énoncé **Métropole 2013**

Commun à tous les candidats

1. (a) On lit $f(1) = y_{\mathrm{B}} = 2$ et pour $f'(1)$, on lit le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1, c'est à dire le coefficient directeur de la droite (CB), qui est horizontale, donc $f'(1) = 0$.

(b) La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle (le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle). On a :

$$f'(x) = \frac{\left(0 + b \times \frac{1}{x}\right) \times x - (a + b\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{b - (a + b\ln x)}{x^2}$$

Soit effectivement : $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

(c) On en déduit : $f(1) = \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = a + 0 = a$, or d'après le **1. a.**, $f(1) = 2$, donc $a = 2$.

Du coup, on a $f'(1) = \dfrac{(b-2) - b\ln(1)}{1^2} = b - 2$, or d'après le **1. a.**, $f'(1) = 0$, donc $b = 2$.

2. (a) On reprend la forme de f' obtenue précédemment, en remplaçant a et b par 2, et on a :
$f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x^2} = \dfrac{2}{x^2} \times (-\ln x)$.

Puisque pour tout x élément de $]0\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{2}{x^2}$ est un nombre strictement positif, on en déduit que la dérivée de f a bien le même signe que $-\ln x$ pour tout x élément de $]0\ ;\ +\infty[$.

(b) Quand x tend vers 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc, par limite d'un produit et d'une somme : $\lim\limits_{x\to 0} 2 + 2\ln x = -\infty$. Comme par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} x = 0^+$, alors, par limite d'un quotient, on a $\lim\limits_{0} f = -\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, on va utiliser la forme de f présentée dans la question : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées, et donc par limite d'une somme, puis par produit par 2 : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

(c) On peut donc dresser le tableau des variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3. (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ et 1 est une valeur strictement comprise entre $\lim\limits_{0} f$ et $f(1)$, donc l'application du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une unique solution à l'équation

$f(x) = 1$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$, qui sera notée α.

(b) Par balayage à la calculatrice, on obtient $f(5) > 1$ et $f(6) < 1$, donc comme la fonction f est continue sur $[5\ ;\ 6]$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[5\ ;\ 6]$, et puisque l'on avait admis qu'il n'y avait qu'une seule solution β à cette équation sur $]1\ ;\ +\infty[$, cette solution est donc entre 5 et 6. Enfin, puisque ni 5 ni 6 n'ont une image exactement égale à 1, on peut dire que β est strictement entre 5 et 6. Le nombre entier n cherché est donc 5.

4. (a) On obtient :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	
$f(m)$	$\approx 1{,}23$	$\approx -3{,}09$	$\approx 0{,}10$	$\approx 0{,}79$	$\approx 1{,}03$

Le tableau a été complété par la ligne « $f(m) \approx$ ż pour montrer les affectations à a ou à b.

Le tableau précédent sera probablement considéré comme correct, mais si on interprète la question très rigoureusement, d'un point de vue algorithmique, on doit supposer que l'étape 1 est l'initialisation, et les étapes de 2 à 5 correspondant aux itérations de 1 à 4. Dans ce cas, pour l'étape 1 n'a pas de valeur m, et la valeur $b - a$ va servir à savoir si l'itération suivante va être utile ou non. Dans ce cas, on va écrire dans la colonne les valeurs en mémoire à la fin de l'itération de la boucle « Tant que », ce qui donne le tableau suivant :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m		0,5	0,25	0,375	0,4375

(b) Cet algorithme renvoie les deux bornes obtenues pour encadrer le nombre α par dichotomie, avec une amplitude au plus égale à 0,1.

(c) Pour que l'algorithme donne un encadrement de β avec la même précision, il faut modifier l'initialisation, en mettant :

Affecter à a la valeur 5.

Affecter à b la valeur 6.

Puis, dans le traitement, modifier le test « Si » pour qu'il soit : "Si $f(m) > 1$", afin de prendre en compte la décroissance de f sur l'intervalle $[5~;~6]$.

(Une autre possibilité serait d'affecter 6 à a et 5 à b, et de modifier le « tant que » pour avoir « tant que $a-b>0,1$ » et alors a serait la borne haute de l'encadrement, et b la borne basse).

5. (a) Pour répondre à cette question, on commence par déterminer l'aire du rectangle, de largeur 1 et de hauteur 2 : son aire est donc de 2 unités d'aire. Il faut ensuite déterminer l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}$ dans le rectangle OABC, et pour cela, il faut commencer par déterminer qu'elle est l'abscisse de l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, et donc résoudre :

$f(x)=0 \iff 2(1+\ln x)=0$, c'est à dire résoudre : $\ln x=-1$, qui par application de la fonction exponentielle, donne une unique solution, qui est $\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}~;~1\right]$, la fonction f est positive et continue, et donc l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x=1$ est donnée par : $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, en unités d'aire.

Pour que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangles en deux domaines d'aires égales, il faut alors que l'aire sous cette courbe soit la moitié de l'aire du rectangle, c'est à dire une unité d'aire.

La résolution du problème reviendra bien à démontrer :

$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

(b) On a $f(x)=2\times\dfrac{1}{x}+2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x$. En posant $u=\ln$, on reconnait alors : $f=2u'+2u'u$.

Une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$ est donc : $\mathrm{F}=2u+u^2$, c'est à dire $\mathrm{F}(x)=2\ln x+(\ln x)^2$.

On a alors $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[\mathrm{F}(x)\Big]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}=\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=2\ln 1+(\ln 1)^2-\left[2\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)+\left(\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^2\right]=0-(-2+1)=1.$$

On arrive donc bien à la conclusion que le rectangle OABC est bien partagé en deux domaines de même aire par la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 16 énoncé **Métropole septembre 2013**

Partie A

1. Par lecture graphique, le signe de $f(x)$ est donné par :

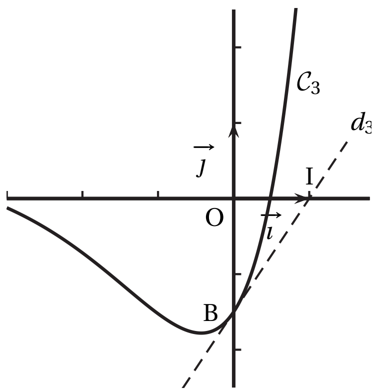
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. (a) On sait que F est une primitive de f donc, $\mathrm{F}' = f$

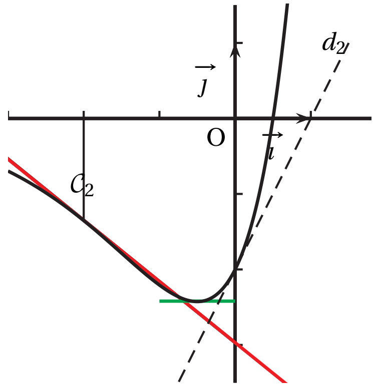
$\mathrm{F}'(0) = f(0) = 2$, $\mathrm{F}'(-2) = f(-2) = 0$.

(b)

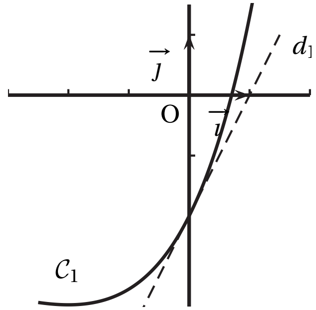
$\mathcal{C}_3$ ne convient pas car la tangente au point d'abscisse 0 n'a pas pour coefficient directeur 2 : Elle passe par $\mathrm{B}(0\ ;\ -1,5)$ (environ) et $\mathrm{I}(1\ ;\ 0)$ donc le coefficient directeur de cette tangente est $\frac{y_\mathrm{I}-y_\mathrm{B}}{x_\mathrm{I}-x_\mathrm{B}} = 1,5$, donc $\mathcal{C}_3$ ne convient pas.



$\mathcal{C}_2$ ne convient pas car la tangente au point d'abscisse (-2) n'a pas pour coefficient directeur 0.
$\mathcal{C}_2$ ne convient pas, la tangente horizontale semble plutôt concerner le point d'abscisse $(-0,5)$ de la courbe.



Il reste donc $\mathcal{C}_1$



Partie B :

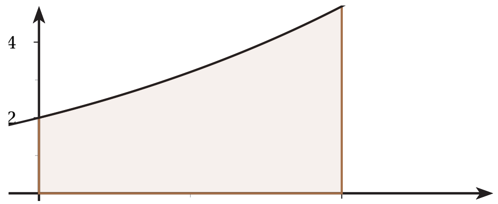
1. (a) $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \times \frac{1}{2}$ donc
$f'(x) = \frac{1}{2}(2+x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, donc $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

(b) On sait que la fonction exp ne prend que des valeurs strictement positives, donc $f'(x)$ est du signe de $(x+4)$, et donc le sens des variations de f est donné par le tableau :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$(-2)\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	

Il y a donc bien un minimum en $x = -4$

2. **(a)** si $x > (-2)$, $f(x) > 0$ vu son expression, donc sur $[0\ ;\ 1]$ f est positive, continue (car produit de fonctions continues), son intégrale sur $[0\ ;\ 1]$ est donc l'aire en unité d'aire de la surface entre la courbe de f, l'axe des x et les verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (en unité d'aire).



(b) $2(u(x)v'(x) + u(x)v'(x)) = 2\left(1 \times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right) = (2 + x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$
Ainsi on voit bien que f est une dérivée : $f = (2uv)'$; donc $(2uv)$ est une primitive de f.

(c) L'intégrale I se calcule à l'aide d'une primitive de f donc $\mathrm{I} = [2u(x)v(x)]_0^1 = [2x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}]_0^1 = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\mathrm{e}}$

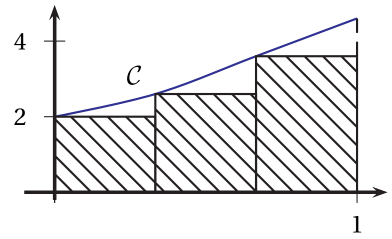
3. **(a)** Faisons un tableau des valeurs successives de k et s pendant le déroulement de l'algorithme pour $n = 3$:

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ | Affecter à s la valeur $s + \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

k	s
0	0
0	$0 + \frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)$
1	$\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$
2	$\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$

Le traitement est alors fini car k a atteint la valeur $(3-1)$ ce qui a été suivi de la nouvelle valeur de s, l'affichage est alors $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$,

or chacun de ces trois termes est l'aire d'un des trois rectangles (largeur obtenue en divisant l'unité par $n = 3$, leurs longueurs successives sont $f\left(\frac{0}{3}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f\left(\frac{2}{3}\right)$.



(b) D'une façon générale l'affichage de l'algorithme obtenu après n boucles (de $k = 0$ à $k = (n-1)$) est la somme de n termes qui sont de la forme $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ donc l'affichage est :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

c'est la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et au dessus de l'axe des x entre $x = 0$ et $x = 1$, leur largeur vaut $\frac{1}{n}$.

Quand n devient grand, s_n se rapproche de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (cours)

Exercice 17 énoncé Nouvelle Calédonie 2013

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

(a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$.

Pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$: $g'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x \geqslant 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ (car tous les termes sont positifs.

La fonction g est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ (car la dérivée ne s'annule qu'en 0).

(b) $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$. Dressons le tableau de variations de g :

x	0		a		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e - 1	$\nearrow$	

D'après ce tableau de variations, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$; on appelle a cette solution.

$g(0{,}703) \approx -0{,}0018 < 0$ et $g(0{,}704) \approx 0{,}002 > 0$ donc $a \in [0{,}703; 0{,}704]$.

(c) D'après le tableau de variations de g :
- $g(x) < 0$ sur $[0; a[$
- $g(x) > 0$ sur $]a; +\infty[$

2. Étude de la fonction f

(a)

$$\left.\begin{array}{r} \lim x0\mathrm{e}^x = 1 \\ \lim x_{x>0}^{\ 0} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim x_{x>0}^{\ 0} \mathrm{e}^x + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim x_{x>0}^{\ 0} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim x{+}\infty\mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim x{+}\infty \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim x{+}\infty\mathrm{e}^x + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim x{+}\infty f(x) = +\infty$$

(b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

(c) Pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On dresse le tableau de variation de f :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) D'après son tableau de variation, la fonction f admet le nombre $f(a)$ comme minimum sur son intervalle de définition.

$f(a) = \mathrm{e}^a + \dfrac{1}{a}$. Or a est la solution de l'équation $g(x) = 0$ donc

$g(a) = 0 \iff a^2\mathrm{e}^a - 1 = 0 \iff a^2\mathrm{e}^a = 1 \iff \mathrm{e}^a = \dfrac{1}{a^2}$.

On en déduit que $f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$ et on a donc démontré que la fonction f admettait pour minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$ le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

(e) On a successivement(en valeurs approchées) :

$$\begin{array}{c} 0{,}703 < a < 0{,}704 \\ 0{,}4942 < a^2 < 0{,}4957 \\ \dfrac{1}{0{,}4957} < \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{0{,}4942} \\ 2{,}017 < \dfrac{1}{a^2} < 2{,}024 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 0{,}703 < a < 0{,}704 \\ \dfrac{1}{0{,}704} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{0{,}703} \\ 1{,}420 < \dfrac{1}{a} < 1{,}423 \end{array}$$

donc par somme : $2{,}017 + 1{,}420 < \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a} < 2{,}024 + 1{,}423$ et donc :

$3{,}43 < m < 3{,}45$

EXERCICE 18 énoncé **Polynésie 2013**

Commun à tous les candidats

1. (a) □ Les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $\left(0; f(0)\right)$ soit $(0\ ;\ 2)$.

□ Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On applique la règle du produit nul en sachant que $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-2\ ;\ 0)$.

(b) **Remarque :** la fonction $(x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ peut être considérée comme une fonction composée $x \mapsto -x$ suivie de l'exponentielle

ou bien comme un quotient $\left(\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

La même stratégie menée en $+\infty$ conduit à la forme indéterminée « $+\infty \times 0$ » car $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

Mais, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \text{ théorème de croissance comparée } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

L'axe des abscisses est donc asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

(c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $-(x+1)$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2. (a) $1,642$

(b)

Variables :	k est un nombre entier
	N est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à N-1
	Affecter à S la valeur $\mathrm{S} + \dfrac{1}{\mathrm{N}} f\left(\dfrac{k}{\mathrm{N}}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3. (a) Sur $[0\ ;\ 1]$, f est continue et positive, donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire, est donnée par $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a donc :

$\mathscr{A} = \left[g(t)\right]_0^1 = g(1) - g(0) = -4\mathrm{e}^{-1} + 3 = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

(b) avec la calculatrice, $3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}} - 1,642 \approx 0,113$

Exercice 19 énoncé Pondichéry 2013

Commun à tous les candidats

Partie 1

$$h(t)=\frac{a}{1+b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

- Par propriété de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{t\to+\infty} 1+b\mathrm{e}^{-0,04t}=1$ donc par quotient $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=a$,
d'après l'énoncé on a donc $a=2$.

- $h(0)=0,1 \Longrightarrow \dfrac{a}{1+b}=0,1 \Longrightarrow b=\dfrac{2}{0,1}-1=19$

Partie 2

$$f(t)=\frac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1. f est de la forme $\dfrac{2}{u}$ avec $u(t)=1+19\mathrm{e}^{-0,04t}$ donc $f'=-\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(t)=-0,76\mathrm{e}^{-0,04t}$, soit (confusion à ne pas faire entre fonction u, u' et valeurs en t ...)

$$f'(t)=\frac{2\times 0,76\mathrm{e}^{-0,04t}}{\left(1+19\mathrm{e}^{-0,04t}\right)^2}.$$

Pour tout $t\in[0\ ;\ 250]$, $f'(t)>0$ donc f strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;250]$.

2. Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à $1,5$ m se traduit par $h(t)>1,5$

$$\begin{array}{lrcl}
 & \dfrac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0,04t}} & > & 1,5\\
\Leftrightarrow & \dfrac{2}{1,5}-1 & > & 19\mathrm{e}^{-0,04t}\\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{57} & > & \mathrm{e}^{-0,04t}\\
\Leftrightarrow & \ln\left(\dfrac{1}{57}\right) & > & -0,04t\\
\Leftrightarrow & -\ln 57 & > & -0,04t\\
\Leftrightarrow & \dfrac{\ln 57}{0,04} & < & t
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln 57}{0,04}\approx 101,08$.

Il faut donc un peu plus de 101 jours pour que le plant dépasse $1,5$ m.

3. (a) Pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;250]$ on a

$$\frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}=\frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}(1+\frac{19}{\mathrm{e}^{0,04t}})}=\frac{2\cancel{\mathrm{e}^{0,04t}}}{\cancel{\mathrm{e}^{0,04t}}(1+19\mathrm{e}^{-0,04t})}=f(t)$$

$\mathrm{F}(t)=50\ln\left(\mathrm{e}^{0,04t}+19\right)$ est de la forme $50\ln u(t)$ avec $u(t)=\mathrm{e}^{0,04t}+19$ et $u(t)>0$ sur $\mathbb{R}$.
donc $\mathrm{F}'=50\dfrac{u'}{u}$ avec $u'(t)=0,04\mathrm{e}^{0,04t}$, soit

$$\mathrm{F}'(t)=50\times\frac{0,04\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}=\frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}=f(t).$$

F est donc bien une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;250]$.

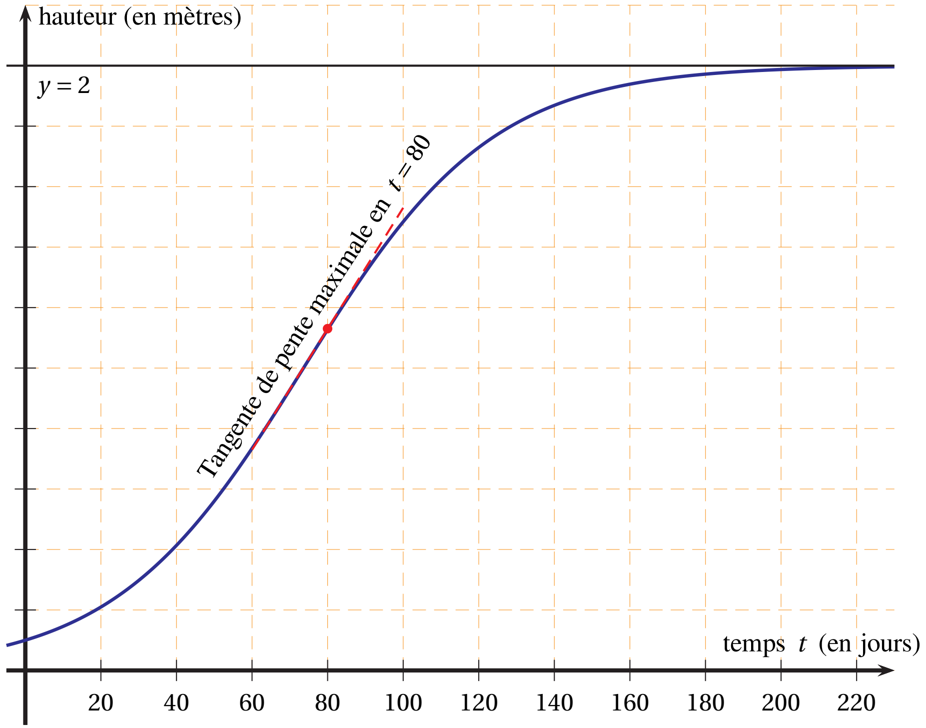
(b) Par définition la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50\,;100]$ est $\mu=\dfrac{1}{100-50}\displaystyle\int_{50}^{100}f(t)\mathrm{d}t$.

$$\mu=\frac{1}{50}[\mathrm{F}(t)]_{50}^{100}=\ln(\mathrm{e}^4+19)-\ln(\mathrm{e}^2+19)\simeq 1,03.$$

La hauteur moyenne du plant entre le 50e et le 100e jour est de $1,03$ m.

4. D'après le graphique, la vitesse est maximale lorsque la pente (coefficient directeur) de la tangente à la courbe est maximale, soit à $t=80$, la hauteur du plant est environ de $1,15$ m.

Annexe (Exercice 1)


hauteur (en mètres)
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
$y = 2$
Tangente de pente maximale en $t = 80$
temps t (en jours)
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
220

Exercice 20 énoncé Amerique du Nord 2014

Commun à tous les candidats

Partie A : Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$g(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}(5-3\mathrm{e}^{-x})$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ (exponentielle), $g(x)$ est du signe de $5-3\mathrm{e}^{-x}$.

$5-3\mathrm{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow 5 > 3\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} > \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) > -x \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < x$ ce qui est toujours vrai car $\ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < 0 < x$.

Finalement, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

2. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont un point commun d'abscisse x si et seulement si $f(x) = x-3$ soit $g(x) = 0$ ce qui n'est pas possible car on vient de voir que $g(x) > 0$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ n'ont pas de point commun.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Comme M et N ont la même abscisse, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$\text{MN} = |f(x)-(x-3)| = |g(x)| = g(x)$ car $g(x) > 0$ d'après la première question.

2. Si u est dérivable, $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est donc $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ et celle de $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est $x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x}$.

Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = -5\mathrm{e}^{-x} + 2\times 3\mathrm{e}^{-2x} = 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x}$.

3. g étant dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée sur $[0\,;\,+\infty[$.

Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$\begin{aligned} g'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 6\mathrm{e}^{-x} - 5 \geqslant 0 && \text{on a divisé par } \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{5}{6} \\ &\Leftrightarrow -x \geqslant \ln\left(\frac{5}{6}\right) && \text{croissance de la fonction } \ln \\ &\Leftrightarrow x \leqslant \ln\left(\frac{6}{5}\right) \end{aligned}$$

En $\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right)$ est un maximum pour g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

$g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right) = 5\times \mathrm{e}^{\ln\frac{5}{6}} - 3\times\left(\mathrm{e}^{\ln\frac{5}{6}}\right)^2 = 5\times\dfrac{5}{6} - 3\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{75}{36} = \dfrac{25}{12}$.

La distance entre un point de la courbe $\mathcal{C}_f$ et le point de même abscisse sur la droite $\mathcal{D}$ est donc maximale lorsque $x = \ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$. Cette distance maximale vaut $\dfrac{25}{12}$ unités.

Remarque : Comme le repère est orthogonal (a priori pas orthonormé), il s'agit d'unité en ordonnée.)

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathcal{A}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t)-(t-3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. $\mathcal{A}(2) = \displaystyle\int_0^2 [f(t)-(t-3)]\,\mathrm{d}t = \int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $g > 0$ sur $[0;2]$. $\mathcal{A}(2)$ mesure donc (en unités d'aires) l'aire du domaine limité par les droites d'équation $x=0$, $x=2$, la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$.

(voir figure page suivante)

2. La fonction g est continue sur $[0;+\infty[$ et $\mathcal{A}(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, la fonction $\mathcal{A}$ est donc dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\mathcal{A}' = g > 0$. La fonction $\mathcal{A}$ est donc bien croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. Pour tout réel x strictement positif,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 5\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= 5\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x - 3\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x \\ &= 5\left(-\mathrm{e}^{-x}+1\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}\right) \\ &= 5 - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{2} \\ \mathcal{A}(x) &= \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

4. $\mathcal{A}(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{7}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2} = 0$

On pose $\mathrm{X} = \mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \mathrm{X} \text{ solution de } \frac{3}{2}\mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + \frac{3}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{X} \text{ solution de } 3\mathrm{X}^2 - 10\mathrm{X} + 3 = 0 \qquad \text{équation du second degré} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{X} = \frac{1}{3} \text{ ou } \mathrm{X} = 3 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{3} \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} = 3 \qquad \text{on revient à } x \text{ et } \mathrm{X} = \mathrm{e}^{-x} \\ &\Leftrightarrow x = \ln 3 \text{ ou } x = -\ln 3 \qquad -\ln\frac{1}{3} = -(-\ln 3) = \ln 3 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 3 \qquad \text{car } x \geqslant 0 \text{ et } -\ln 3 < 0 \end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{A}(x) = 2 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

Exercice 3 **4 points**

Exercice 21 énoncé **Amerique du Sud 2014**

Commun à tous les candidats

On désire réaliser un portail comme indiqué à l'annexe 1. Chaque vantail mesure 2 mètres de large. On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x}+b$ où b est un nombre réel.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $[0\ ;\ 2]$:

$f'(x)=1\times\mathrm{e}^{-4x}+\left(x+\dfrac{1}{4}\right)(-4)\mathrm{e}^{-4x}=\mathrm{e}^{-4x}-4x\mathrm{e}^{-4x}-\mathrm{e}^{-4x}=-4x\mathrm{e}^{-4x}$

(b) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-4x}>0$ et pour tout x de $]0;2]$, $x>0$

Donc, pour tout x de $]0;2]$, $-4x\mathrm{e}^{-4x}<0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0;2]$.

2. La fonction f est strictement décroissante sur $[0;2]$ donc son maximum est $f(0)$. On sait que le maximum est 1,5 on a donc $f(0)=1,5$ ce qui équivaut à $\dfrac{1}{4}+b=1,5 \iff b=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4} \iff b=\dfrac{5}{4}$.

Il faut donc que b soit égal à $\dfrac{5}{4}$ pour que le maximum de la fonction f soit égal à 1,5.

Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x}+\dfrac{5}{4}$

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par $\mathrm{F}(x)=\left(-\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x}+\dfrac{5}{4}x$

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,donc elle est dérivable sur $[0\ ;\ 2]$:

$\mathrm{F}'(x)=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x}+\left(-\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{8}\right)(-4)\mathrm{e}^{-4x}=\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x}+x\mathrm{e}^{-4x}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x}+\dfrac{5}{4}=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-4x}+\dfrac{5}{4}=f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $[0;2]$.

2. La fonction f est positive sur $[0;2]$ donc l'aire du vantail est $\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme F est une primitive de f sur $[0;2]$, cette intégrale est égale à $\mathrm{F}(2)-\mathrm{F}(0)$.

$\mathrm{F}(2)=-\dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-8}+\dfrac{5}{2}$ et $\mathrm{F}(0)=-\dfrac{1}{8}$ donc $\mathrm{F}(2)-\mathrm{F}(0)=\dfrac{21}{8}-\dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-8}$

Pour calculer l'aire du vantail il faut retrancher l'aire du vide de 0,05 m de haut 2 m de large et l'aire du vantail est égale à :

$\mathrm{F}(2)-\mathrm{F}(0)-2\times 0,05=\dfrac{21}{8}-\dfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-8}-0,1\approx 2,52\ \mathrm{m}^2$.

On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir l'annexe 2 de l'exercice 4) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

1. Les bords gauches des planches sont situés tous les $0,12+0,05=0,17$ m donc le bord gauche de la planche numéro k est situé à l'abscisse $0,17\times k$.

L'ordonnée du point d'abscisse $0,17k$ est $f(0,17k)$ mais comme chaque planche est située à une hauteur de 0,05 m du sol, la hauteur de la planche numéro k est de $f(0,17k)-0,05$ en mètres.

Chaque planche a une largeur de 0,12 m donc l'aire de la planche numéro k est, en m^2, égale à $\big(f(0,17k)-0,05\big)\times 0,12$.

2. L'algorithme suivant calcule la somme des aires des planches du vantail de droite :

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	On affecte à S la valeur 0
	On affecte à X la valeur 0
Traitement :	**Tant Que** $\mathrm{X}+0,17<2,05$
	S prend la valeur $\mathrm{S}+0,12\big(f(\mathrm{X})-0,05\big)$
	X prend la valeur $\mathrm{X}+0,17$
	Fin de Tant Que
Affichage :	On affiche S

Dans cet algorithme, S *désigne la somme des aires des planches du vantail de droite, et* X *désigne l'abscisse du bord gauche de chaque planche.*

Comme la largeur d'une planche est de 0,12 m, il ne faut pas que l'abscisse X *du bord gauche de la dernière planche soit supérieure à* $2-0,12$ *; il faut donc faire tourner la boucle « Tant que* $\mathrm{X}+0,12<2$ *», autrement dit « Tant que* $\mathrm{X}+0,17<2,05$ *».*

EXERCICE 22 énoncé **Antilles 2014**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel x : $g'(x) = -1 + \mathrm{e}^x$. On a alors $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

On déduit du tableau précédent que, pour tout réel x, $g(x) \geqslant 2 > 0$.

2. Étude en $-\infty$.
$\lim x - \infty (x+1) = -\infty$ et $\lim x - \infty \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$ donc, par somme : $\lim x - \infty f(x) = -\infty$.
Étude en $+\infty$.
$\lim x + \infty (x+1) = +\infty$ et, par croissances comparées $\lim x + \infty \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc, par somme $\lim x + \infty f(x) = +\infty$.

3. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= 1 + \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x} \\ &= 1 + \frac{1-x}{\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x + 1 - x}{\mathrm{e}^x} \\ &= \mathrm{e}^{-x} g(x). \end{aligned}$$

4. On a vu plus haut que, pour tout réel x, $g(x) > 0$, et comme par ailleurs $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'intervalle $\mathbb{R}$ a pour image $\mathbb{R}$, ce dernier intervalle contenant 0, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède dans $\mathbb{R}$ une solution α unique.

Par ailleurs, $f(-1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc : $-1 < \alpha < 0$.

6. (a) La tangente T a pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x+1.$$

(b) Posons, pour tout réel x, $k(x) = f(x) - (2x+1)$, alors :

$$\begin{aligned} k(x) &= x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} - (2x+1) \\ &= \frac{x}{\mathrm{e}^x} - x \\ &= \frac{x}{\mathrm{e}^x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right). \end{aligned}$$

Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1-\mathrm{e}^x$		$+$	0	$-$	
$k(x)$		$-$	0	$-$	

On en déduit que $\mathcal{C}$ est située en dessous de T.

Partie B

1. Pour tout réel x :

$$\mathrm{H}'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (-x-1)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}(x+1-1) = x\mathrm{e}^{-x} = h(x),$$

la fonction H est donc une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $[1\ ;\ 3]$, $\mathcal{C}$ est en dessous de T, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ est donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_3^4 \big((2x+1)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^3 x-h(x)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}-\mathrm{H}(x)\right]_1^3\\ &= 4+4\mathrm{e}^{-3}-2\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

Exercice 23 énoncé **Antilles septembre 2014**

Commun à tous les candidats

Soit (E_1) l'équation : $e^x - x^n = 0$ où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. $$\begin{aligned} e^x - x^n = 0 &\iff e^x = x^n \\ &\iff \ln(e^x) = \ln(x^n) \\ &\iff x = n\ln(x) \\ &\iff \frac{x}{n} = \ln(x) \\ &\iff \ln(x) - \frac{x}{n} = 0 \end{aligned}$$

Donc les équations (E_1) et (E_2) sont équivalentes.

2. L'équation (E_1) admet deux solutions si et seulement si l'équation (E_2) admet deux solutions.

Soit f la fonction définie sur $I =]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n}$; résoudre l'équation (E_2) revient donc à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Cherchons les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{n} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty}$$

$f(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n}$ peut s'écrire $x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{n}\right)$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} < 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n}\right) = -\infty} \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

La fonction f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-x}{nx}$.

$f'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = n$ et $f(n) = \ln(n) - \dfrac{n}{n} = \ln(n) - 1$.

D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	0		n		$+\infty$
$n-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\ln(n)-1$	$\searrow$	$-\infty$

D'après ce tableau de variation, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $]0\,;+\infty[$ si et seulement si le maximum de la fonction f est strictement positif, c'est-à-dire quand $\ln(n) - 1 > 0$:

$\ln(n) - 1 > 0 \iff \ln(n) > 1 \iff n > e \iff n \geqslant 3$

Donc on peut dire que l'équation (E_1) admet deux solutions si et seulement si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Exercice 24 énoncé **Asie 2014**

Commun à tous les candidats

Soit g la fonction définie sur $[-1;1]$ par $g(x)=\dfrac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}\right)$ où a est un réel strictement positif.

On définit sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f par $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{2x}-1-x$.

1. La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables : $f'(x)=1\times\mathrm{e}^{2x}+(x-1)\times2\mathrm{e}^{2x}-1=(2x-1)\mathrm{e}^{2x}-1$

$f'(0)=-\mathrm{e}^{0}-1=-2$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x}=+\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\mathrm{e}^{2x}=+\infty\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$$

2. $f''(x)=2\times\mathrm{e}^{2x}+(2x-1)\times2\mathrm{e}^{2x}=(2+4x-2)\mathrm{e}^{2x}=4x\mathrm{e}^{2x}$

3. Pour tout x, $\mathrm{e}^{2x}>0$ donc la fonction f'' est strictement positive sur $]0;+\infty[$, et donc la fonction f' est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

- La fonction f' est continue $[0;+\infty[$.
- $f'(0)=-2<0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;+\infty[$; on appelle x_0 cette solution.

On aurait pu également établir le tableau de variations de la fonction f'.

4. (a) D'après la question précédente :

- $f'(x)<0$ sur $[0;x_0[$ donc f est strictement décroissante sur $[0;x_0]$;
- $f'(x)>0$ sur $]x_0;+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[x_0;+\infty[$.

$$\left.\begin{array}{l}f(0)=-1\times\mathrm{e}^{0}-1=-2<0\\ f\text{ est décroissante sur }[0;x_0]\end{array}\right\}\Longrightarrow f(x)<0\text{ pour tout }x\in[0;x_0]\Longrightarrow f(x_0)<0$$

(b) $f(2)=1\times\mathrm{e}^{4}-1-2=\mathrm{e}^{4}-3\approx51,6>0$

- La fonction f est strictement croissante sur $[x_0;+\infty[$.
- La fonction f est continue sur $[x_0;+\infty[$.
- $f(x_0)<0$
- $f(2)=\mathrm{e}^{4}-3>0$

donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[x_0;2]$.

$f(2)>0$ et f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[2;+\infty[$.

Comme $f(x)<0$ sur $[0;x_0]$, l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $[0;x_0]$.

On peut donc dire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0;+\infty[$ et que cette solution appartient à l'intervalle $[x_0;2]$; on l'appelle a.

En utilisant la calculatrice,on trouve $a\approx1,20$.

Pour déterminer une valeur approchée de x_0 à la calculatrice, on peut programmer la fonction f et utiliser le tableau de valeurs, ou utiliser le `solveur` si la calculatrice en possède un.

5. On admet que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression $\mathrm{L}=\displaystyle\int_0^1\left(\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}\right)\mathrm{d}x$.

La fonction $x\longmapsto\mathrm{e}^{\alpha x}$ où $\alpha\neq0$ a pour primitive $x\longmapsto\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}$ donc la fonction $x\longmapsto\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}+\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}}{-a}$ soit $x\longmapsto\dfrac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{-ax}\right)$.

$$\mathrm{L}=\int_0^1\left(\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{-ax}\right)\right]_0^1=\left[\frac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{a}-\mathrm{e}^{-a}\right)\right]-\left[\frac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{0}\right)\right]=\frac{1}{a}\left(\mathrm{e}^{a}-\mathrm{e}^{-a}\right)$$

$$=\frac{1}{1,2}\left(\mathrm{e}^{1,2}-\mathrm{e}^{-1,2}\right)\approx2,52$$

Exercice 25 énoncé Centres Étrangers 2014

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

(a) • $f_1(0) = 0$: évident ;

- $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$;
- f_1 fonction polynôme est dérivable sur [0 ; 1] donc continue sur cet intervalle ;
- $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 3(2x-1)^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc sur [0 ; 1].

f_1 est donc bien une fonction de retouche.

(b) Il semble que la courbe coupe la droite d'équation $y = x$ pour $x = 0,5$.

On peut vérifier que $f_1(0,5) = 0,5$.

On a donc $f_1(x) \leqslant x \iff x \geqslant 0,5$.

Ce résultat signifie que f_1 éclaircie les nuances codées par un nombre inférieur à 0,5 et inversement pour celles codées par un réel entre 0,5 et 1.

2. (a) f_2 est une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, donc g l'est aussi et :

$g'(x) = f_2'(x) - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1}{1+(\mathrm{e}-1)x} - 1 = \dfrac{\mathrm{e}-1-1-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x} = \dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$.

(b) Comme $\mathrm{e} > 1$, le dénominateur est positif comme somme de termes positifs ; le signe de $g'(x)$ est donc celui de son numérateur ; or

$\mathrm{e} - 2 - (\mathrm{e}-1)x \geqslant 0 \iff \mathrm{e} - 2 \geqslant (\mathrm{e}-1)x \iff \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \geqslant x$

On a $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \approx 0,418$.

On a donc avec $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} = a$,

$g'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant a$ et de même

$g'(x) \leqslant 0 \iff x \geqslant a$.

La fonction g est donc croissante sur $[0\,; a]$, puis décroissante sur $[a\,;\,1]$.

g a donc un maximum $g(a) \approx 0,12$.

(c) D'après la question précédente sur l'intervalle $[0\,;\,a]$ la fonction g est continue et croissante de $g(0) = 0$ à $g(a) \approx 0,12$.

Comme $0,05 \in [0\,;\,a]$, il existe une valeur unique α de $[0\,;\,a]$ telle que $f(\alpha) = 0,05$.

On démontre de même (avec g décroissante) que sur $[a\,;\,1]$ il existe un réel unique β tel que $g(\beta) = 0,05$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

1. Cet algorithme calcule le nombre de nuances par palier de 0,01 pour lesquelles la modification est perceptible visuellement.

2. On applique l'algorithme à la fonction $g = f_2 - x$. Il calcule toutes valeurs telles que $g(x) \geqslant 0,05$.

Ce sont d'après la question précédente toutes les nuances comprises entre 0,09 et 0,85 : l'algorithme doit donc retourner : $c = 85 - 9 + 1 = 77$.

Partie C

1. (a) f_1 produit de fonctions positives sur [0 ; 1] est positive sur cet intervalle. On a donc :

$\mathcal{A}_{f_1} = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{(x^2-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{(x^2-1)}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$.

(b) On a $f_2(0) = -15 + 15 = 0$ et comme il est admis qu'elle est une fonction de retouche elle est croissante sur [0 ; 1], donc positive sur cet intervalle. On a donc :

$\mathcal{A}_{f_2} = \displaystyle\int_0^1 \left(4x - 15 + \frac{60}{x+4}\right)\mathrm{d}x = \left[2x^2 - 15x + 60\ln(x+4)\right]_0^1 =$

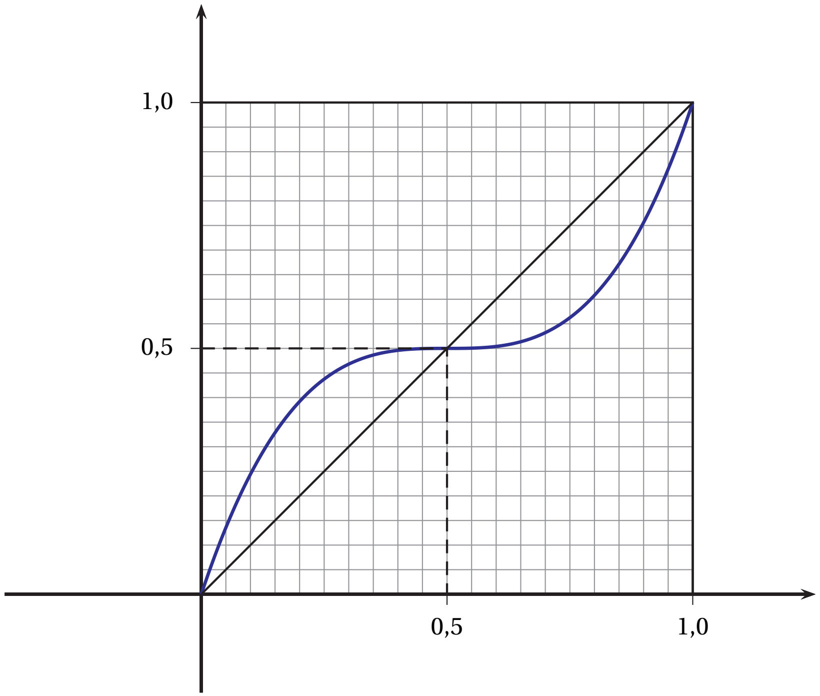
$2 - 15 + 60\ln 5 - 60\ln 4 = -13 + 60\ln\frac{5}{4}$.

2. On a $\mathcal{A}_{f_1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \approx 0,316$ et $\mathcal{A}_{f_2} = -13 + 60\ln\frac{5}{4} \approx 0,389$.

C'est la fonction f_1 qui éclaircit le plus l'image.

Annexe

Courbe représentative de la fonction f_1



Exercice 26 énoncé Liban 2014

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$

e^{-x} étant toujours strictement positif, $f'(x)$ sera du signe de $1-x$.

Il s'ensuit que

$$f'(x) \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad [0,\ 1] \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \quad \text{sur} \quad]1,\ +\infty[$$

f est donc croissante sur $[0,\ 1]$ et décroissante sur $]1,\ +\infty[$.

2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$, ce qui signifie que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$

Partie B

Soit $\mathcal{A}$ la fonction qui à tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ associe l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=t$.

1. Comme la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ alors

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc, pour tout $t \in [0;\ +\infty[\quad \mathcal{A}'(t) = f(t)$

Comme f est positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ il s'ensuit que la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. On peut en déduire que la fonction $\mathcal{A}$ a pour limite 1 en $+\infty$.

3. (a) Dressons le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$\mathcal{A}'$	$+$	
$\mathcal{A}$	0 ↗	1

D'après ce tableau de variations l'équation $\mathcal{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

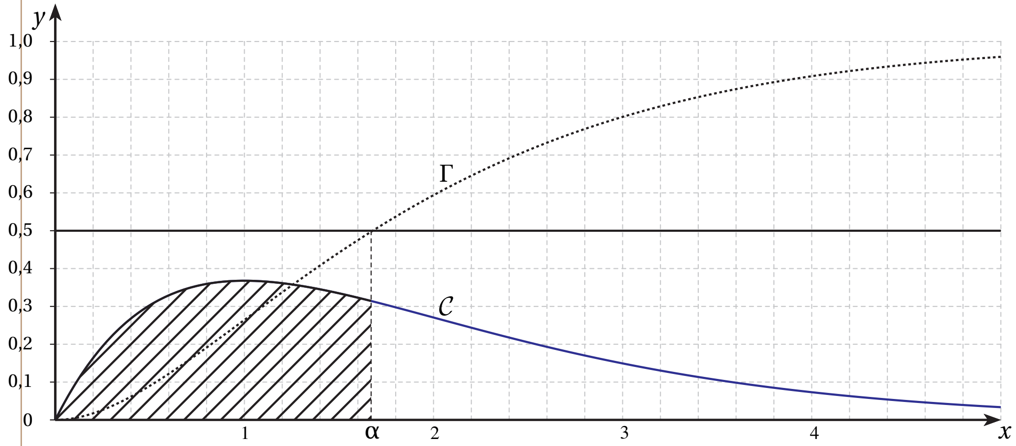
(b) Sur le graphique ci-joint, on obtient $\alpha \simeq 1{,}7$

4. (a) $g'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x}$

(b) On remarque que $g'(x) = -f(x)$, d'où

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t -g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[-g(x)\right]_0^t = -g(t) + g(0) = 1 - (1+t)\mathrm{e}^{-t}$$

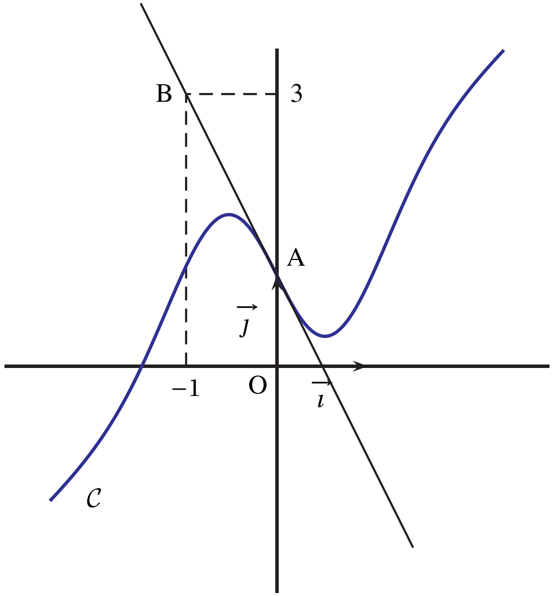
(c) $\mathcal{A}(6) = 1 - 7\mathrm{e}^{-6} \simeq 0{,}98$



Exercice 27 énoncé **Métropole septembre 2014**

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\,;1)$ et $(-1\,;\,3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x, $f(x)=x+1+axe^{-x^2}$.

1. (a) Le point A a pour abscisse 0 ; $f(0)=1$ donc $\mathcal{C}$ passe par le point A $(0;1)$.

(b) Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{3-1}{-1-0}=-2$.

(c) D'après la formule $\left(e^u\right)'=u'e^u$ et la dérivée d'une somme et d'un produit :

$$f'(x)=1+0+ae^{-x^2}+ax(-2x)e^{-x^2}=1-a\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}$$

(d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A ; cela veut dire que le coefficient directeur de (AB) est égal au nombre dérivé de la fonction f en x_A soit $f'(0)$.

On a donc $f'(0)=-2 \iff 1-a(0-1)e^0=-2 \iff 1+a=-2 \iff a=-3$

2. D'après la question précédente, pour tout réel x, $f(x)=x+1-3xe^{-x^2}$ et $f'(x)=1+3\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}$.

(a)

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x^2}>0\\ \forall x\in]-1\,;\,0],\ -3x\geqslant 0\end{array}\right\}\overset{\text{par produit}}{\forall x\in]-1\,;\,0],\ -3xe^{-x^2}\geqslant 0} \quad \left.\begin{array}{l}\\ \\ \forall x\in]-1\,;\,0],\ x+1>0\end{array}\right\}\overset{\text{par somme}}{\forall x\in]-1\,;\,0],\ x+1-3xe^{-x^2}>0}$$

Donc, pour tout x de $]-1\,;\,0]$, $f(x)>0$.

(b) Si $x\leqslant -1$, alors $x^2\geqslant 1$ donc $2x^2\geqslant 2$, donc $2x^2-1\geqslant 1$ et donc $3\left(2x^2-1\right)\geqslant 3$.
Comme pour tout x, $e^{-x^2}>0$, on peut dire que pour tout $x\leqslant -1$, $3\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}>0$ (par produit). Donc, pour tout $x\leqslant -1$, $f'(x)=1+3\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}>0$.

(c) Sur $]-\infty;-1]$, $f'(x)>0$ donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle donc sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2};-1\right]$.

Or $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)\approx -0{,}026<0$ et $f(-1)\approx 1{,}10>0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2};-1\right]$; on l'appelle c.

Or $f\left(-\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}\right)\approx 0{,}017>0$ donc $c\in\left[-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}\right[$ et donc $c<-\dfrac{3}{2}+2.10^{-2}$.

3. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par :

$$c\leqslant x\leqslant 0 \quad\text{et}\quad 0\leqslant y\leqslant f(x)$$

(a) Comme $f(x)\geqslant 0$ sur $[c;0]$, alors $\mathcal{A}=\displaystyle\int_c^0 f(x)\,dx$.

(b) On admet que l'intégrale $I=\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^0 f(x)\,dx$ est une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-3} près.

Pour calculer la valeur exacte de I, il faut déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2};0\right]$.

La fonction $x\longmapsto x+1$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto\dfrac{x^2}{2}+x$.

La fonction $x\longmapsto -2xe^{-x^2}$ (forme $u'e^u$) a pour primitive la fonction $x\longmapsto e^{-x^2}$ donc la fonction $x\longmapsto -3xe^{-x^2}$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto\dfrac{3}{2}e^{-x^2}$.

La fonction f a donc pour primitive la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

D'après le cours : $\mathrm{I} = \mathrm{F}(0) - \mathrm{F}\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{9}{8} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}\right) = \dfrac{15}{8} - \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{9}{4}}$

EXERCICE 28 énoncé **Polynésie 2014**

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Intersection de deux courbes :

$$\mathrm{M}(x;y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g \iff f(x) = g(x) \iff \mathrm{e}^{x} = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \iff \begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \\ \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X}-1)^2 = 0 \end{cases} \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 1 \iff x = 0$$

Ainsi M a pour coordonnées $(0;1)$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x} \Longrightarrow f'(0) = 1 \quad ; \quad g'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \Longrightarrow g'(0) = 1$$

En M, leurs tangentes ont, toutes deux le même cœfficient directeur 1,

elles ont donc même tangente Δ d'équation $y - 1 = 1(x-0) \iff y = x+1$.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

(a) Limite de la fonction h en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0$$

(b) Pour tout réel x

$$x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right) = \cancel{x} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \times \frac{2}{\cancel{x}} - x - \cancel{x}\frac{2}{\cancel{x}} = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = h(x)$$

Limite de la fonction h en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty, \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{\mathrm{X}=\frac{x}{2}\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}} = +\infty$$

(c) Fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$$

$$h'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} > 1 \iff \frac{x}{2} > 0 \iff x > 0 \text{ et } h'(x) < 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} < 1 \iff \frac{x}{2} < 0 \iff x < 0$$

(d) Tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(e) La fonction h possède un minimum en 0 qui est 0. Donc :

$$\forall x,\ x \in \mathbb{R},\ h(x) \geqslant 0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 - x - 1 \geqslant 0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$$

(f) Ainsi la courbe $\mathcal{C}_g$ se trouve au dessus de la droite d'équation $y = x+1$ qui est la droite Δ.

3. Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

(a) On a vu plus haut (question 1.) que, pour tout réel x, $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = f(x) - g(x) \geqslant 0$.

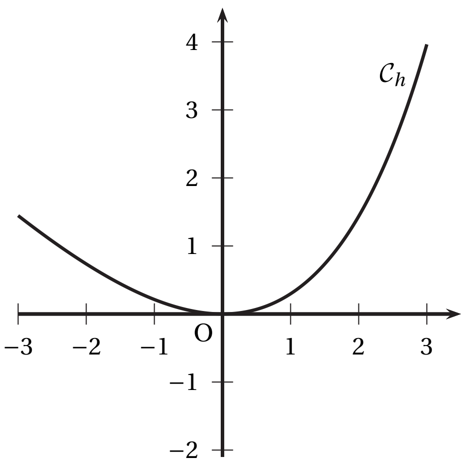
(b) Ainsi la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.

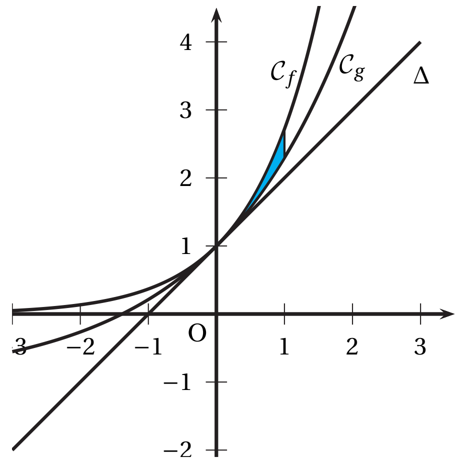
Ainsi, $|f(x) - g(x)| = (f(x) - g(x))$.

4. Aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$:

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x - 4\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x$$

$$= [\mathrm{e}^{x}]_0^1 - 4\left[\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right]_0^1 + [x]_0^1 = \mathrm{e} - 1 - 4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} + 4 + 1 = \mathrm{e} - 4\sqrt{\mathrm{e}} + 4 \simeq 0,123$$





Exercice 29 énoncé Pondichéry 2014

Commun à tous les candidats

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f' ; A $(0\ ;\ 2) \in \mathcal{C}_1$ et B $(0\ ;\ 1) \in \mathcal{C}_2$.

1. La fonction f est décroissante puis croissante, donc la fonction dérivée doit être négative puis positive, ce qui élimine la situation 3.

Si la fonction dérivée est représentée par une droite comme dans la situation 2, c'est que la fonction f est une fonction du second degré ; donc sa représentation graphique possède un axe de symétrie vertical. Ce n'est pas le cas donc on peut éliminer la situation 2.

La bonne situation est donc la situation 1.

2. La droite Δ tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ en A d'abscisse 0, a pour équation $y = f'(0)(x-0)+f(0)$.

$f(0)$ est l'ordonnée de A donc $f(0)=2$; $f'(0)$ est l'ordonnée du point B donc $f'(0)=1$.

L'équation réduite de la tangente est donc : $y = x+2$.

3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}+ax+b$ où a et b sont deux nombres réels.

(a) $f(0)=2 \iff \mathrm{e}^0+2\times 0+b=2 \iff 1+b=2 \iff b=1$

(b) $b=2$ donc $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+ax+1$ donc
$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}+a$; or $f'(0)=1 \iff -\mathrm{e}^0+a=1 \iff 1+a=1 \iff a=2$

Donc $f(x) = \mathrm{e}^{-x}+2x+1$

4. On a vu que $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}+a$ et comme $a=2$, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}+2$.

$f'(x)>0 \iff -\mathrm{e}^{-x}+2>0 \iff 2>\mathrm{e}^{-x} \iff \ln 2 > -x \iff -\ln 2 < x$

Donc :
- la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -\ln 2]$;
- la fonction f admet un minimum pour $x=-\ln 2$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln 2 ; +\infty[$.

5. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1=+\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)-(x+2)$.

1. (a) $g'(x) = f'(x)-1 = -\mathrm{e}^{-x}+2-1 = -\mathrm{e}^{-x}+1$.

$g'(x)>0 \iff -\mathrm{e}^{-x}+1>0 \iff 1>\mathrm{e}^{-x} \iff \ln 1 > -x \iff x>0$

Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; la fonction g admet donc un minimum en $x=0$. Ce minimum vaut $g(0)=f(0)-(0+2)=2-2=0$.

(b) D'après la question précédente, pour tout réel x : $g(x)\geqslant 0$ donc $f(x)-(x+2)\geqslant 0 \iff f(x)\geqslant x+2$ ce qui veut dire que la courbe $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$.

2. On a vu que la courbe $\mathcal{C}_1$ était au dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$ donc c'est vrai sur $[-2;2]$.

De plus, la courbe $\mathcal{C}_1$ et la droite Δ sont toutes les deux au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2;2]$.

L'aire de la partie grisée est égale à la différence de l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_1$ entre $x=-2$ et $x=2$, et l'aire sous la droite entre $x=-2$ et $x=2$.

Autrement dit cette aire est égale à $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2}(x+2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} f(x)-(x+2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x$

$g(x) = \mathrm{e}^{-x}+2x+1-x-2 = \mathrm{e}^{-x}+x-1$;

donc g a pour primitive la fonction G telle que $\mathrm{G}(x) = -\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{x^2}{2}-x$.

$$\int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{G}(2)-\mathrm{G}(-2) = \left[-\mathrm{e}^{-x}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-2}^{2} = \left(-\mathrm{e}^{-2}+\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(-\mathrm{e}^{-(-2)}+\frac{(-2)^2}{2}-(-2)\right)$$
$$= -\mathrm{e}^{-2}+2-2+\mathrm{e}^{2}-2-2 = \mathrm{e}^{2}-\mathrm{e}^{-2}-4$$
$$\approx 3{,}25 \text{ unités d'aire.}$$

EXERCICE 30 énoncé AmeriqueNordS2015-exo-4.tex

1. La fonction est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x-3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0\,;\,+\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.

Remarque. *On pouvait également dériver la fonction u et constater que la dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.*

2. Remarquons que la fonction $\ln$ conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.

Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ car $\mathrm{e} > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.

D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.

Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.

0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2\,;\,3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0\,;\,+\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0\,;\,+\infty[$.

Remarque. *Ici, on pouvait également expliquer que l'on constate à la calculatrice que $u(2) < 0$ et $u(3) > 0$. Mais cet argument est nettement moins satisfaisant d'un point de vue du raisonnement.*

3. Compte-tenu du sens de variation de u, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	-	0	+	

1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$. Par opérations sur les limites, on en déduit que :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$

2. (a) f est dérivable sur $]0;\,+\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;\,+\infty[$.

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2) + \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}. \text{ En réduisant au dénominateur } x^2 : \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3) \\ &= \frac{1}{x^2}u(x) \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty]$.

1. Un point $\mathrm{M}\left(x;\,y\right)$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& f(x) \\ y &=& \ln(x) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& \ln(x) \\ f(x) &=& \ln(x) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y &=& \ln(x) \\ 0 &=& f(x) - \ln(x) \end{array}\right.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} f(x) - \ln(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2) + 2 - \ln(x). \text{ On réduit au dénominateur } x : \\ &= \frac{1}{x}\left[(x-1)(\ln(x)-2) + 2x - x\ln(x)\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[x\ln(x) - 2x - \ln(x) + 2 + 2x - x\ln(x)\right] \\ &= \frac{1}{x}(2 - \ln(x)) \end{aligned}$$

Or $2 - \ln(x) = 0$ n'a qu'une solution qui est $x = \mathrm{e}^2$.

Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x = \mathrm{e}^2$ et d'ordonnée $y = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$.

2. On utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or ln est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et H est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= 2\,[\ln(x)]_1^{\mathrm{e}^2} - [\mathrm{H}(x)]_1^{\mathrm{e}^2} \\
&= 2\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right) - \ln(1)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)^2 - \ln(1)^2\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

L'aire délimitée par $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$ est donc égale à 2.

Exercice 31 énoncé **Antilles 2015**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour toutes les courbes, on a $g_a(1) = a$. Donc on a de bas en haut les courbes $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

2. Les courbes $\Gamma_{0,05}$ et $\Gamma_{0,1}$ semblent sécantes à $\mathcal{C}$ en deux points ;

La courbe $\Gamma_{0,19}$ semble être tangente à $\mathcal{C}$;

La courbe $\Gamma_{0,4}$ et $\mathcal{C}$ semblent ne pas être sécantes.

Il semble donc que :

- si $0 < a < 0,19$, Γ_a et $\mathcal{C}$ ont deux points communs ;

- si $a = 0,19$, $\Gamma_{0,19}$ et $\mathcal{C}$ ont un point commun ;

- si $a > 0,19$, Γ_a et $\mathcal{C}$ n'ont pas de point commun.

Partie B

1. $\mathcal{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$. Si $m(x\ ;\ y) \in \mathcal{C}cap\Gamma_a$, alors $\ln x = ax^2 \iff \ln x - ax^2 = 0 \iff h_a(x) = 0$.

Le nombre de points communs à $\mathcal{C}$ et Γ_a est donc égal au nombre de solutions de l'équation $h_a(x) = 0$.

2. (a)

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	$\searrow$	

On a en fait : $h'_a(x) = \dfrac{1}{x} - 2ax = \dfrac{1-2ax^2}{2ax}$.

Comme $x > 0$ et $a > 0$, le signe de $h'_a(x)$ est celui de $1 - 2ax^2$.

Or $1 - 2ax^2 = 0 \iff 1 = 2ax^2 \iff \dfrac{1}{2a} = x^2 \iff x = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

D'où le tableau de variation de h_a

(b) On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Comme $h_a(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - 2ax\right)$, on a donc :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - 2ax = -\infty$ et par produit de limites :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 2ax\right) = -\infty$.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

(a) $h_{0,1}(x) = 0 \iff \ln x - 0,1x^2 = 0$.

Soit i la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $i(x) = \ln x - 0,1x^2$; cette fonction est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

$i'(x) = \dfrac{1}{x} - 0,2x$.

or $i'(x) = 0 \iff \dfrac{1}{x} - 0,2x = 0 \iff 1 = 0,2x^2 \iff 5 = x^2 \iff x = \sqrt{5}$.

On a de même $i'(x) > 0 \iff \dfrac{1}{x} - 0,2x > 0 \iff 1 > 0,2x^2 \iff 5 > x^2 \iff x < \sqrt{5}$.

Sur l'intervalle $]0\ ;\ \sqrt{5}[$, la fonction i est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $\ln\sqrt{5} - 0,1 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\ln 5 - 0,5 \approx 0,3 > 0$: la fonction i s'annule donc une seule fois sur cet intervalle.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\sqrt{5}\ ;\ +\infty\right[$.

(b) D'après la question précédente la courbe $\Gamma_{0,}$ et $\mathcal{C}$ ont deux points communs : l'un sur $]0\ ;\ \sqrt{5}[$ et l'autre sur $\left]\sqrt{5}\ ;\ +\infty\right[$.

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.

(a) Le tableau de variations montre que le maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$ est égal à $\dfrac{-1-\ln\frac{1}{\mathrm{e}}}{2} = \dfrac{-1+\ln\mathrm{e}}{2} = 0$.

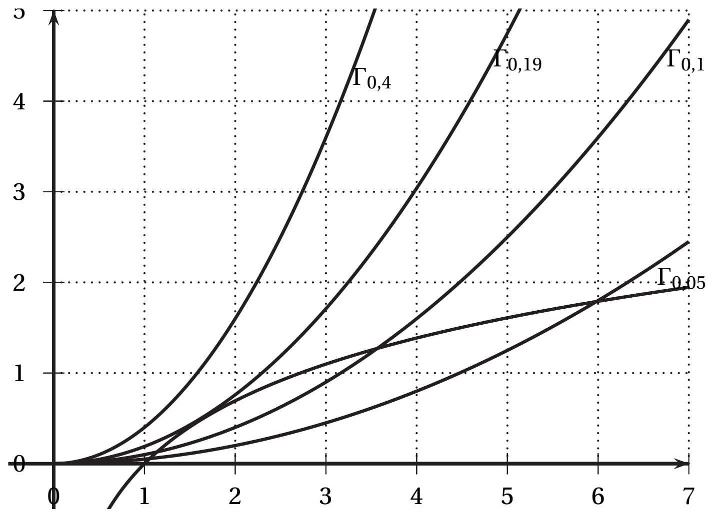
(b) Le maximum étant nul, on en déduit que $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}(x) \leqslant 0 \iff \ln x \leqslant \frac{1}{2\mathrm{e}}x^2$; autrement dit $\mathcal{C}$ est sous $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, sauf pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2\frac{1}{2\mathrm{e}}}} = \sqrt{\mathrm{e}}$ où elles ont un seul point commun.

5. On a vu que $\mathcal{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection lorsque l'équation $h_a(x) = 0$ n'a pas de solution, c'est-à-dire lorsque le maximum de la fonction h_a est inférieur à zéro, soit :

$\dfrac{-1-\ln(2a)}{2} < 0 \iff -1-\ln(2a) < 0 \iff \ln 2a > -1 \iff \mathrm{e}^{\ln 2a} > \mathrm{e}^{-1} \iff$

$2a > \mathrm{e}^{-1} \iff a > \dfrac{1}{2\mathrm{e}} \approx 0{,}18394 \approx 0{,}19$.

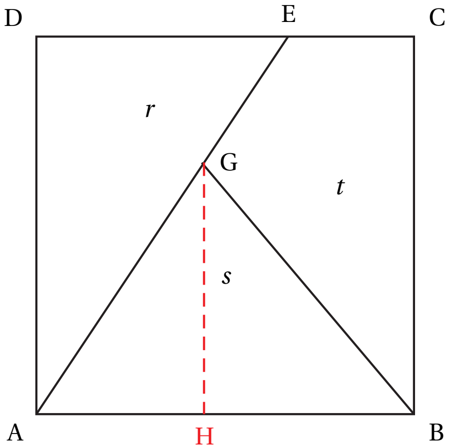
ANNEXE à rendre avec la copie



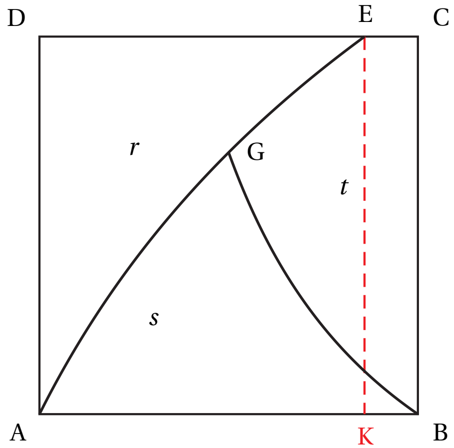
EXERCICE 32 énoncé Centres Étrangers 2015

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD}\right)$.

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \frac{1}{3}$.

- Le point E est situé sur la droite (CD) donc son ordonnée vaut 1.

  Le nombre r est l'aire du triangle ADE qui est égale à $\frac{AD \times DE}{2}$.

  De plus, cette aire doit valoir $\frac{1}{3}$ et on sait que $AD = 1$.

  Donc $\frac{AD \times DE}{2} = \frac{1}{3}$ entraîne $DE = \frac{2}{3}$.

  Les coordonnées de E sont donc $\left(\frac{2}{3}\,;1\right)$.

- Soit H le pied de la hauteur issue de G dans le triangle ABG ; donc GH est l'ordonnée du point G.

  L'aire s du triangle ABG est : $\frac{AB \times GH}{2}$. Or $AB = 1$ et $s = \frac{1}{3}$, donc : $\frac{1 \times GH}{2} = \frac{1}{3}$ donc $GH = \frac{2}{3}$. L'ordonnée y_G de G est $\frac{2}{3}$.

  Le point G est situé sur la droite (AE). Les points A et E ont pour coordonnées respectives $(0\,;0)$ et $\left(\frac{2}{3}\,;1\right)$. Donc la droite (AE) a pour équation $y = \frac{3}{2}x$.

  $G \in (AE)$ d'équation $y = \frac{3}{2}x$ donc $y_G = \frac{3}{2}x_G$. Comme $y_G = \frac{2}{3}$, on déduit que $x_G = \frac{4}{9}$.

  Le point G a pour coordonnées $\left(\frac{4}{9}\,;\frac{2}{3}\right)$.

1. (a) D'après le texte, l'ordonnée y_E du point E est égale à 1 et ce point appartient à $\mathcal{C}_f$ donc

$$f(x_E) = y_E \iff \ln(2x_E + 1) = 1 \iff 2x_E + 1 = e \iff x_E = \frac{e-1}{2}$$

(b) L'abscisse du point G vaut 0,5 et le point G appartient à $\mathcal{C}_f$; donc :

$$f(x_G) = y_G \iff f(0,5) = y_G \iff \ln 2 = y_G$$

Le point G appartient aussi à $\mathcal{C}_g$ donc :

$$g(x_G) = y_G \iff k\left(\frac{1-x_G}{x_G}\right) = y_G \iff k\left(\frac{1-0,5}{0,5}\right) = \ln 2 \iff k = \ln 2$$

2. (a) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$F'(x) = 1 \times \ln(2x+1) + (x+0,5) \times \frac{2}{2x+1} - 1 = \ln(2x+1) + 1 - 1 = \ln(2x+1) = f(x)$$

Donc f a pour primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Soit K le projeté orthogonal de E sur (AB). Comme le point E a pour abscisse $\frac{e-1}{2}$, et que la fonction f est positive, l'aire sous la courbe entre 0 et $\frac{e-1}{2}$ est donnée par :

$$\int_0^{\frac{e-1}{2}} f(x) = dx = [F(x)]_0^{\frac{e-1}{2}} = F\left(\frac{e-1}{2}\right) - F(0) = \frac{e}{2}\ln e - \frac{e-1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

L'aire du rectangle ADEK est $AD \times DE = 1 \times \frac{e-1}{2} = \frac{e-1}{2}$.

Donc $r = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1$

3. $g(x) = \ln 2 \times \frac{1-x}{x} = \ln 2 \times \left(\frac{1}{x} - 1\right)$

Donc une primitive de g sur $]0\,;+\infty[$ est donnée par : $G(x) = \ln 2 \times (\ln x - x)$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2) - 1}{2}$.

$r = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1 \approx 0,36 \in [0,3\,;\,0,4[$.

$s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2) - 1}{2} \approx 0,33 \in]0,3\,;\,0,4[$

$t = 1 - r - s \approx 0,31 \in]0,3\,;\,0,4[$.

Donc la proposition B vérifie les conditions imposées par le fabriquant.

Exercice 33 énoncé **Liban 2015**

1. $m = \mathrm{e}$.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$y - \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^1(x-1) \iff y = \mathrm{e}x$.

2. Il semble d'après la question précédente que :

- si $m = \mathrm{e}$, la droite est tangente à la courbe : il y a un point commun ;
- si $m < \mathrm{e}$, la droite et la courbe n'ont pas de point commun ;
- si $m > \mathrm{e}$, la droite et la courbe ont au moins un point commun.

3. Les points communs à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{D}_m$ ont une abscisse qui vérifie :

$\mathrm{e}^x = mx \iff \mathrm{e}^x - mx = 0$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - mx$; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = \mathrm{e}^x - m$.

Or $\mathrm{e}^x - m > 0 \iff \mathrm{e}^x > m \Rightarrow x > \ln m$; de même

$\mathrm{e}^x - m < 0 \iff \mathrm{e}^x < m \Rightarrow x < \ln m$ et $\mathrm{e}^x - m = 0 \iff \mathrm{e}^x = m \Rightarrow x = \ln m$ (ce nombre existe puisque $m > 0$).

La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,\ln m[$ et croissante sur $]\ln m\,;\,+\infty[$. Elle a donc un minimum $g(\ln m) = \mathrm{e}^{\ln m} - m\ln m =$

$m - m\ln m = m(1 - \ln m)$. De plus :

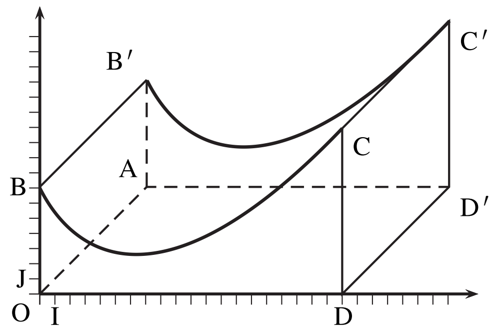
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$;
- En écrivant $g(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - m\right)$, on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\ln m$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$m(1-\ln m)$	↗ $+\infty$

- Si $0 < m < \mathrm{e}$, alors $\ln m < 1 \iff 1 - \ln m > 0$ et $m(1-\ln m) > 0$: le minimum de la fonction est supérieur à zéro donc la fonction ne s'annule pas ; la droite et la courbe n'ont pas de point commun.
- Si $m = \mathrm{e}$ on a vu que la droite est tangente à la courbe.
- Si $m > \mathrm{e}$ alors $\ln m > 1 \iff 1 - \ln m < 0$ et $m(1-\ln m) < 0$: la fonction g s'annule deux fois d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc la droite et la courbe ont deux points communs.

EXERCICE 34 énoncé **Métropole 2015**



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Partie 1

1. $f = u\ln(u) + v$ avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = -2x+7$.

f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.

$f' = u'\ln(u) + u \times \dfrac{u'}{u} + v'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -3$ d'où $f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1)\dfrac{1}{x+1} - 3 =$ $\ln(x+1) + 1 - 3$ donc $\boxed{f'(x) = \ln(x+1) - 2}$.

2. $f'(x) = 0 \iff \ln(x+1) = 2 \iff x+1 - e^2 \iff x = e^2 - 1$.

$f'(x) > 0 \iff \ln(x+1) > 2 \iff x+1 > e^2$ (croissance de la fonction exp) d'où $x > e^2$ -1.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		e^2-1		20
Sgn. $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Var. f	7	↘	$\approx 2,6$	↗	$\approx 10,93$

3. $f'(0) = 1\ln(1) - 2 = \boxed{-2}$.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle [0 ; 20] par
$g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
g est donc une primitive de $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$.
Une primitive de $x \mapsto 3x-7$ est $x \mapsto \dfrac{3x^2}{2} + 7x$.
une primitive de f est donc définie par :
$\mathrm{F}(x) = g(x) - \dfrac{3x^2}{2} + 7x = \dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3x^2}{2} + 7x =$
$\boxed{\dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \dfrac{7x^2}{4} + \dfrac{13}{2}x}$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P_1 : La différence entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est $f(20) - f\left(e^2-1\right) \approx 10,93 - 2,6 \approx 8,3 > 8$ donc P_1 est **vraie** ;

P_2 : L'inclinaison en B est 2. L'inclinaison en 20 est $f'(20) = \ln(21) - 2$ $\approx 1,04$, donc P_2 est **vraie**.

2. f est continue, donc la face avant, en unités d'aire, vaut

$\mathcal{A}_1 = \int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(20) - \mathrm{F}(0)$.

$\mathrm{F}(21) = \dfrac{21^2 \ln 21}{2} - 700 + 130 = \dfrac{441 \ln 21}{2} - 570$.

$\mathrm{F}(0) = 0$.

On en déduit $\boxed{\mathcal{A}_1 = \dfrac{441 \ln 21}{2} - 570 \approx 101,3}$.

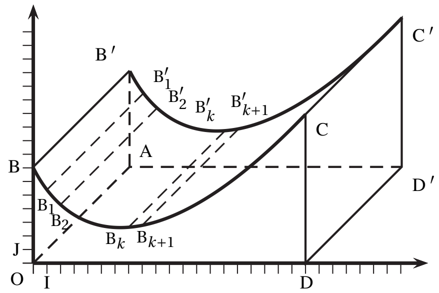
L'aire latérale gauche vaut $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(\mathrm{OAB'B}) = \boxed{10 f(0) = 70}$.

L'aire latérale droite vaut $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}(\mathrm{DD'C'C}) = \boxed{10 f(20) = \approx 109,3}$.

L'aire à peindre en rouge est donc $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \approx \boxed{381,9 \text{ m}^2}$.

Le nombre de litres de peinture à prévoir est $\dfrac{381,9}{5} \approx \boxed{77}$

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module. Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $\mathrm{B}_k(k\,;\,f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}$.



(a) $\mathrm{B}_k\mathrm{B}_{k+1} = \sqrt{1^2 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2} = \boxed{\sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}}$.

(b) La partie de l'algorithme à compléter est :

S prend la valeur 0.

Pour K allant de 0 à 19

S prend la valeur $\mathrm{S} + 10\sqrt{1 + \left(f(k+1) - f(k)\right)^2}$

Afficher S

EXERCICE 35 énoncé **Métropole septembre 2015**

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}(1+\ln x)$

1. Comme F est une primitive de f, alors f est la dérivée de F donc les variations de F sont données par le signe de f : F est croissante si et seulement f est positive

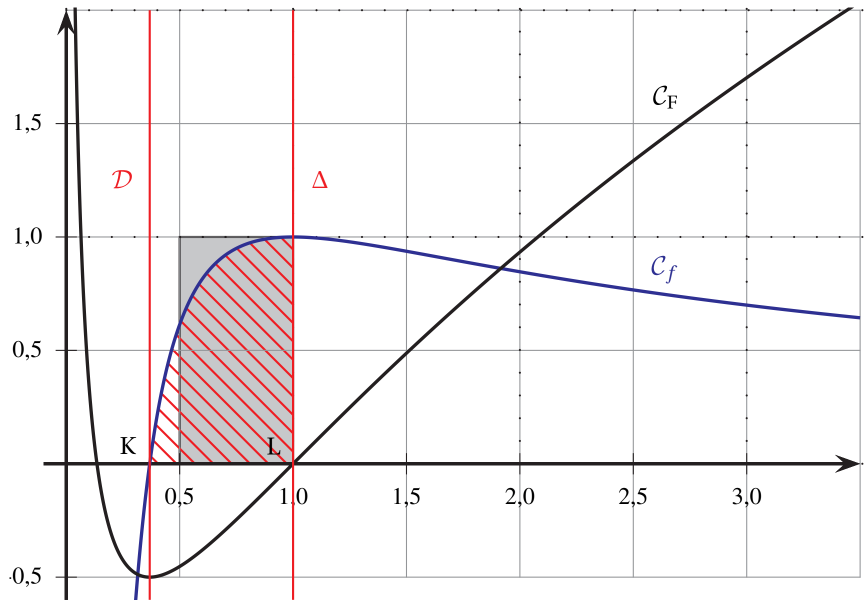
C'est donc dans la situation 2 que la courbe C_F est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f.

2. Dans la situation 2, on appelle :

- K le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathcal{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées. Ce point K a pour abscisse la solution de l'équation $f(x)=0$ ce qui équivaut à $\dfrac{1}{x}(1+\ln x)=0 \iff \ln x=-1 \iff x=\mathrm{e}^{-1}$; donc $\mathrm{K}\left(\mathrm{e}^{-1}\,;\,0\right)$.

- L le point d'intersection de $\mathcal{C}_F$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\dfrac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

  Remarque : les primitives d'une fonction étant définies à une constante près, on ne peut pas déterminer l'expression de F*, primitive de* f*, et on ne peut donc pas déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point* L.



(a) L'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathcal{D}$ et Δ, par la courbe $\mathcal{C}_f$ et par l'axe des abscisses a une valeur approchée de 0,5 (aire du rectangle coloré en gris sur le graphique).

(b) Rien dans le texte ne permettant de déterminer l'abscisse du point L, on ne peut donc pas calculer la valeur exacte de l'aire du domaine défini précédemment.

Il serait intéressant de savoir ce que les consignes officielles de correction suggéraient comme réponse à cette question !

Exercice 36 énoncé Polynésie 2015

Commun à tous les candidats

Partie A Modélisation

1. On sait que le coefficient directeur de la tangente en un point est égal au nombre dérivé de la fonction en ce point. Il faut donc que $f'(1)=0$.

Or f est dérivable sur [1 ; 8] et sur cet intervalle :

$f'(x)=a\mathrm{e}^{-x}+(ax+b)\times(-1)\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(a-ax-b)$.

Donc $f'(1)=0 \iff \mathrm{e}^{-1}(a-a-b)=0 \iff -b\mathrm{e}^{-1}=0 \iff b=0$, car $\mathrm{e}^{-1}\neq 0$.

2. Le haut de la courbe est obtenu pour $x=1$. Or :

$3,5<f(1)<4 \iff 3,5<a\mathrm{e}^{-1}<4 \iff 3,5\mathrm{e}<a<4\mathrm{e}$.

Or $3,5\mathrm{e}\approx 9,5$ et $4\mathrm{e}\approx 10,9$: le seul entier compris entre ces deux valeurs est $a=10$.

On a donc sur [1 ; 8], $f(x)=10x\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

1. En dérivant g comme un produit, on a pour tout réel de [1 ; 8] :

$g'(x)=10\times(-1)\mathrm{e}^{-x}+10(-x-1)\times(-1)\mathrm{e}^{-x}=-10\mathrm{e}^{-x}(1-x-1)=10x\mathrm{e}^{-x}=f(x)$.

g est donc une primitive de f sur [1 ; 8].

2. Comme $x>0$ et $\mathrm{e}^{-x}>0$, on a $f(x)>0$ sur [1 ; 8]. Donc l'aire de la surface hachurée est égale en unités d'aire $\left(\text{soit } 1\times 1=1\ \text{m}^2\right)$ à l'intégrale :

$$\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x=[g(x)]_1^8=g(8)-g(1)=10(-8-1)\mathrm{e}^{-8}-10(-1-1)\mathrm{e}^{-1}=20\mathrm{e}^{-1}-90\mathrm{e}^{-8}.$$

D'après les conditions du peintre son devis sera donc d'un montant de :

$\mathrm{D}=300+50\left(20\mathrm{e}^{-1}-90\mathrm{e}^{-8}\right)\approx 666,37$ €.

Partie C Une contrainte à vérifier

1. La fonction f' est dérivable sur [1 ; 8] et sur cet intervalle [1 ; 8] :

$f''(x)=10\times(-1)\mathrm{e}^{-x}+10(1-x)\times(-1)10\mathrm{e}^{-x}=10\mathrm{e}^{-x}(-1-1+x=10(x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$ quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-2$.

- Si $1\leqslant x<2$, $x-2<0$: la fonction f' est donc décroissante sur [1 ; 2[;
- Si $2<x\leqslant 8$, $x-2>0$: la fonction f' est donc croissante sur]2 ; 8[;
- Si $x=2$, $f'(2)=-10\mathrm{e}^{-2}\approx -1,35$ est donc le minimum de la fonction f' sur [1 ; 8].

2. Une équation de la tangente $(\mathrm{T_M})$ au point $\mathrm{M}(x\ ;\ y)$ est :

$\mathrm{P}(\mathrm{X}\ ;\ \mathrm{Y})\in(\mathrm{T_M}) \iff \mathrm{Y}-f(x)=f'(x)(\mathrm{X}-x)$.

Le point L est le point de cette droite d'ordonnée nulle donc son abscisse X vérifie :

$$-f(x)=f'(x)(\mathrm{X}-x) \iff \mathrm{X}-x=\frac{-f(x)}{f'(x)} \iff \mathrm{X}=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Dans le triangle MLP, on $\tan\alpha=\dfrac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PL}}=\dfrac{f(x)}{\left|x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}-x\right|}=\dfrac{f(x)}{\left|-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right|}=$

$|-f'(x)|=|f'(x)|$.

3. On a vu dans l'étude de la fonction f' que celle-ci décroit de

$f'(1)=10(1-1)\mathrm{e}^{-1}=0$ à $-1,35$ puis croissante de $f'(2)$ à $f'(8)=10(1-8)\mathrm{e}^{-8}=-70\mathrm{e}^{-8}\approx -0,023$.

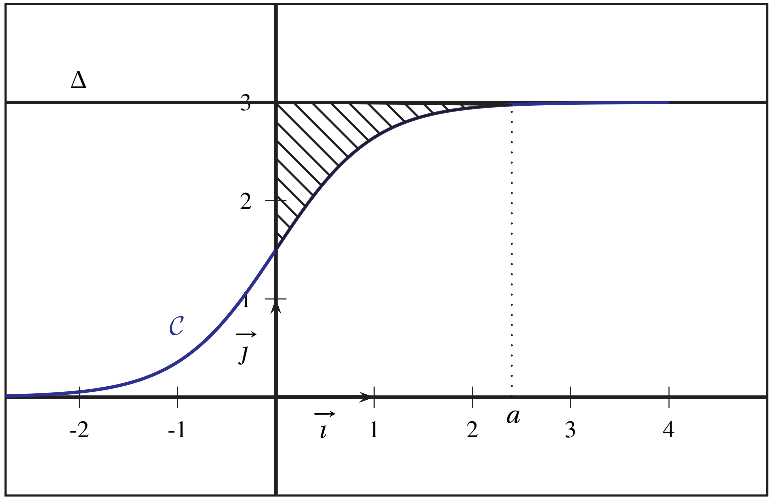
Le maximum de la fonction $|f'(x)|$ est donc $1,35\approx\tan 53,47$ °

Cette valeur est bien inférieure à la valeur 55 °. Le toboggan est conforme.

EXERCICE 37 énoncé Pondichéry 2015

Commun à tous les candidats

Partie A



1. On sait que $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ quel que soit le réel x, donc $1+\mathrm{e}^{-2x} > 1 > 0$. Le dénominateur étant non nul, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle la fonction étant de la forme $\dfrac{3}{u(x)}$, avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-2x}$, donc $u'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ on a :

$f'(x) = -\dfrac{3u'(x)}{(u(x))^2} = -\dfrac{3\times(-2)\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2} = \dfrac{6\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2} > 0$ car quotient de deux nombres supérieurs à zéro. la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (comme le laisse supposer le graphique).

2. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ et en posant $\mathrm{X} = -2x$, $\displaystyle\lim_{\mathrm{X}\to-\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{X}} = 0$, d'où

$\displaystyle\lim_{\mathrm{X}\to-\infty} 1+\mathrm{e}^{\mathrm{X}} = 1$ et enfin par quotient de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$: ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de plus l'infini.

3. Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante de $f(0) = \dfrac{3}{1+1} = 1{,}5$ à 3 : il existe donc un réel unique $\alpha \in [0 ; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2{,}999$.

La calculatrice donne :

$f(4) \approx 2{,}99899$ et $f(5) \approx 2{,}9999$, donc $4 < \alpha < 5$;

$f(4{,}0) \approx 2{,}99899$ et $f(4{,}1) \approx 2{,}9992$, donc $4{,}0 < \alpha < 4{,}1$;

$f(4{,}00) \approx 2{,}99899$ et $f(4{,}01) \approx 2{,}99901$, donc $4{,}00 < \alpha < 4{,}01$. (encadrement à 10^{-2} près.

Partie B

1. On a vu dans la partie A que $0 < f(x) < 3 \iff -f(x) < 0 < 3 - f(x)$, soit $h(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$\mathrm{H}'(x) = -\dfrac{3}{2}\times\dfrac{-2\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3-3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\mathrm{e}^{-2x}+3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{3\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)}{1+\mathrm{e}^{-2x}} - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = 3 - f(x) = h(x)$.

Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. (a) On a vu que sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[0 ; a]$ (avec $a >$), la fonction h est positive, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$ est égale en unités d'aire à la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de h, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

Mais comme $h(x) = 3 - f(x)$, cette surface est la surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ (voir l'aire hachurée ci-dessus.

(b) D'après la question **B. 2.**, on a :

$\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{H}(x)]_0^a = \mathrm{H}(a) - \mathrm{H}(0) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times 0}\right) = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2\times a}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

(c) D'après la question précédente, on sait que l'aire de $\mathcal{D}_a$, surface limitée par la droite Δ, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ est égale à $\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-2x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = 2$, donc finalement par composition, l'aire de $\mathcal{D}$ est égale à $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1{,}04$ (u. a.)

EXERCICE 38 énoncé **Amerique du Nord 2016**

Partie A

1. $f(x_B) = f(2e) = 2e \times \ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2e - 2e + 2 = 2 = y_B$ donc $B \in \mathcal{C}_f$

$f(x_I) = f(2) = 2 \times \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0 = y_I$ donc $I \in \mathcal{C}_f$

f est dérivable sur $[2\ ;\ 2e]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[2\ ;\ 2e]$

$$f = uv - u + 2 \Longrightarrow f' = u'v + uv' - u' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$\forall x \in [2\ ;\ 2e]$, $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ et on a $f'(2) = 0$ donc la tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale en I

L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point I .

2. (a) $\mathcal{T}\ :\ y = f'(2e)(x - 2e) + f(2e)$ or $f'(2e) = 1$ et $f(2e) = 2$

On a donc $\mathcal{T}\ :\ y = x + 2 - 2e$ et on en déduit $D(2e - 2\ ;\ 0)$

(b) $\mathcal{A}_{ABI} = \frac{1}{2} \times AB \times AI = (2e - 2)m^2$

$\mathcal{A}_{AIDB} = \frac{(AB + ID) \times AI}{2} = (4e - 6)m^2$

La longueur de la cuve étant de 5 m, on en déduit $10e - 10 \leqslant V \leqslant 20e - 30$

Autrement dit le volume de la cuve est compris entre 17,183 m^3 et 24,366 m^3

3. (a) G est dérivable sur $[2\ ;\ 2e]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[2\ ;\ 2e]$

$$G = uv - \frac{1}{2}u \Longrightarrow f' = u'v + uv' - \frac{1}{2}u' \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$\forall x \in [2\ ;\ 2e]$, $G'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = g(x)$

Donc G est bien une primitive de la fonction g sur $[2\ ;\ 2e]$

(b) $f(x) = g(x) - x + 2$

donc $F(x) = G(x) - \frac{x^2}{2} + 2x = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x$ est primitive de f sur $[2\ ;\ 2e]$.

(c) $S = \int_2^{2e} (2 - f(x))\, dx = \Big[2x - F(x)\Big]_2^{2e} = (4(e)F(2e)) - (4 - F(2)) = (e^2) - (3) = e^2 - 3$

$V = 5S \approx 22m^3$

Partie B

1. on cherche x_0 tel que $f(x_0) = 1$

On sait qu'il existe un unique x_0 vérifiant cette équation car f est continue et strictement croissante sur $[2\ ;\ 2e]$ à valeurs dans $[0\ ;\ 1]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, x_0 existe et est unique.

Par balayage on a $x_0 \approx 4,311$

$v(4,311) \approx 7m^3$

2. L'algorithme permet d'afficher la hauteur d'eau dans la cuve correspondant à $10^{-3}m^3$ près à un remplissage à moitié de la capacité totale.

Exercice 39 énoncé **AmeriqueSudS2016-exo-1.tex**

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, de deux fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$.
On considère les points A(0,5 ; 1) et $\text{B}\,(0\,;\,-1)$ dans le repère $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On sait que O appartient à $\mathcal{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x)=(ax+b)\text{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels.

On sait que le point O appartient à $\mathcal{C}_f$ donc $f(0)=0$ ce qui équivaut à $(0+b)\text{e}^0=0$ ou encore $b=0$.

Donc $f(x)$ s'écrit $f(x)=ax\text{e}^{-x^2}$.

La droite (OA) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en O, et elle a pour coefficient directeur 2, donc $f'(0)=2$.

$f(x)=ax\text{e}^{-x^2}$ donc $f'(x)=a\times\text{e}^{-x^2}+ax\times(-2x)\text{e}^{-x^2}=(a-2ax^2)\text{e}^{-x^2}$.

$f'(0)=2\iff(a-0)\text{e}^0=2\iff a=2$; donc $f(x)=2x\text{e}^{-x^2}$.

Désormais, on considère que $f(x)=2x\text{e}^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $cd0$; $+\infty[$

2. (a) On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\dfrac{2}{x}\times\dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \text{on pose X}=x^2\\ \lim\limits_{\text{X}\to+\infty}\dfrac{\text{X}}{\text{e}^{\text{X}}}=0\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}=0\\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}\times\dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}=0\iff\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$$

(b) La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on a déjà vu que $f(x)=(a-2ax^2)\text{e}^{-x^2}=(2-4x^2)\text{e}^{-x^2}$ puisque $a=2$.

Pour tout x, $\text{e}^{-x^2}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2-4x^2$ c'est-à-dire de $4\left(\dfrac{\sqrt2}{2}+x\right)\left(\dfrac{\sqrt2}{2}-x\right)$.

Sur $[0\,;\,+\infty[$, la dérivée s'annule et change de signe pour $x=\dfrac{\sqrt2}{2}$; $f\left(\dfrac{\sqrt2}{2}\right)=\sqrt2\text{e}^{-\frac12}\approx0,86$.

On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		$\frac{\sqrt2}{2}$		$+\infty$
$4\left(\frac{\sqrt2}{2}+x\right)$		$+$	0	$+$	
$\frac{\sqrt2}{2}-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt2\text{e}^{-\frac12}$	$\searrow$	0

3. La fonction g dont la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ passe par le point $\text{B}\,(0\,;\,-1)$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

(a) On sait que la dérivée de $x\longmapsto\text{e}^{u(x)}$ est $x\longmapsto u'(x)\text{e}^{u(x)}$, donc une primitive de $x\longmapsto u'(x)\text{e}^{u(x)}$ est $x\longmapsto\text{e}^{u(x)}$.

Donc la fonction $x\longmapsto-2x\text{e}^{-x^2}$ a pour primitive la fonction $x\longmapsto\text{e}^{-x^2}$ donc une primitive de la fonction f est g définie par $g(x)=-\text{e}^{-x^2}+k$ où $k\in\mathbb{R}$.

$\mathcal{C}_g$ contient le point B $(0\,;\,-1)$, donc $g(0)=-1$, ce qui équivaut à $-\text{e}^0+k=-1$ donc $k=0$.

La primitive de f dont la courbe représentative passe par le point B est donc la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=-\text{e}^{-x^2}$.

(b) Soit m un réel strictement positif.

$\text{I}_m=\displaystyle\int_0^m f(t)\,\text{d}t=g(m)-g(0)=-\text{e}^{-m^2}-(-1)=1-\text{e}^{-m^2}$

(c) On cherche $\lim\limits_{m\to+\infty}\text{I}_m$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{m\to+\infty}-m^2=-\infty\\ \text{on pose M}=-m^2\\ \lim\limits_{\text{M}\to-\infty}\dfrac{\text{X}}{\text{e}^{\text{M}}}=0\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim\limits_{m\to+\infty}\text{e}^{-m^2}=0\iff\lim\limits_{m\to+\infty}1-\text{e}^{-m^2}=1\iff\lim\limits_{m\to+\infty}\text{I}_m=1.$$

4. (a) La fonction f est
- continue sur I
- positive sur I
- telle que $\lim\limits_{m\to+\infty}\displaystyle\int_0^m f(t)\,\text{d}t=1$

donc la fonction f est une fonction de densité de probabilité sur $[0\,;\,+\infty[$.

(b) Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité.

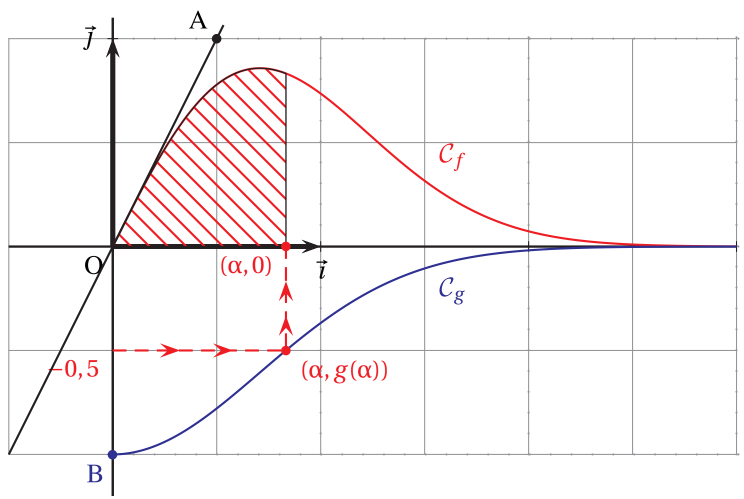
Pour tout x de I, $P(X \leqslant x) = \int_0^x f(t)\,dt = g(x) - g(0)$.

Or $g(0) = -e^0 = -1$, donc $P(X \leqslant x) = g(x) + 1$.

(c) Soit α le réel tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,5$.

$$\begin{aligned} P(X \leqslant \alpha) = 0,5 &\iff g(\alpha) + 1 = 0,5 \iff g(\alpha) = -0,5 \\ &\iff -e^{-\alpha^2} = -0,5 \iff -\alpha^2 = \ln 0,5 \\ &\iff -\alpha^2 = -\ln 2 \iff \alpha^2 = \ln 2 \\ &\iff \alpha = \sqrt{\ln 2} \text{ car } \alpha > 0 \end{aligned}$$

(d) On construit le point de coordonnées $(\alpha ; 0)$ et on hachure la région du plan correspondant à $P(X \leqslant \alpha)$:



Exercice 40 énoncé **Antilles 2016**

Partie A

1. Pour tout réel $x>0$, on a $f(x)=x\mathrm{e}^{1-x^2}=x\times\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-x^2}}=\dfrac{\mathrm{e}}{x}\times\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$. Par opérations :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{x}=0. \tag{1}$$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et par croissance comparée $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}=+\infty$. Par composée des limites on alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}=+\infty$, puis par inverse :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}=0, \tag{2}$$

enfin, par produit de (1) et (2) on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

2. (a) On utilise la dérivée d'un produit, ainsi que la dérivée des fonctions de la forme e^u :

$$f'(x)=1\mathrm{e}^{1-x^2}+x\times(-2x)\mathrm{e}^{1-x^2}=\mathrm{e}^{1-x^2}-2x^2\mathrm{e}^{1-x^2}=\left(1-2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

(b) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{1-x^2}>0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $1-2x^2$. Or :

$$1-2x^2\geqslant 0\Longleftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De plus $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{e}}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}}{2}}$; de même $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}}{2}}$. On en déduit de ce qui précède le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}$	↗	$\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}$	↘	0

Partie B

1. Il semble que $\mathcal{C}_f$ soit toujours au dessous de $\mathcal{C}_g$.

2. Soit x un réel tel que $x\leqslant 0$, alors $x\mathrm{e}^{1-x^2}\leqslant 0$, c'est-à-dire $f(x)\leqslant 0$, alors que $g(x)=\mathrm{e}^{1-x}>0$ par conséquent il est clair que $f(x)<g(x)$.

3. (a) Soit x un réel tel que $x>0$, alors, par application de la fonction $\ln$ qui est strictement croissante :

$$\begin{aligned} f(x)\leqslant g(x) &\Longleftrightarrow x\mathrm{e}^{1-x^2}\leqslant\mathrm{e}^{1-x}\\ &\Longleftrightarrow \ln x+1-x^2\leqslant 1-x\\ &\Longleftrightarrow \ln x-x^2+x\leqslant 0\\ &\Longleftrightarrow \Phi(x)\leqslant 0.\end{aligned}$$

(b) On a $\Phi'(x)=\dfrac{1}{x}-2x+1=\dfrac{-2x^2+x+1}{x}$. Comme $x>0$, $\Phi'(x)$ a le même signe que $-2x^2+x+1$. Ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta=9$ et pour racines $-\frac{1}{2}$ et 1. Ainsi :

$$-2x^2+x+1>0\Longleftrightarrow -\frac{1}{2}<x<1.$$

On a $\Phi(1)=\ln 1-1^2+1=0$. Sur $]0\,;\,+\infty[$ le tableau de variation (sans limite) de Φ est donc :

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$	‖	↗	0	↘	

(c) Le tableau de variation précédent montre que la fonction Φ possède en 1 un maximum qui vaut 0, autrement dit, pour tout réel $x>0$, on a $\Phi(x)\leqslant 0$.

4. (a) D'après B 1 et B 3 c, on a, pour tout réel x, $f(x)\geqslant g(x)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc toujours en dessous de $\mathcal{C}_g$.

(b) Sur $]-\infty\,;\,0]$, on a $f(x) < g(x)$ les courbes n'y ont donc aucun point commun.
Sur $]0\,;\,+\infty[$, on a $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$. Ces deux courbes ont donc un unique point commun A dont l'abscisse est 1.

(c) On a $f(1) = g(1) = 1$. De plus $f'(1) = (1-2\times 1^2)\mathrm{e}^{1-1^2} = -1$, et $g'(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$ donc $g'(x) = -\mathrm{e}^{1-1} = -1$, donc $f'(1) = g'(1)$. Au point d'abscisse 1, les tangentes respectives à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ passe par un même point, et ont même coefficient directeur, elles sont donc confondues.

Partie C

1. On pose $u(x) = 1 - x^2$; alors $u'(x) = -2x$ donc $x = -\dfrac{1}{2}u'(x)$ d'où $f = -\dfrac{1}{2}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Une primitive est $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{u(x)} = \boxed{-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}}$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 [g(x) - f(x)\ \mathrm{d}x]$.
Une primitive de $g - f$ est $\mathrm{G}-\mathrm{F}$ avec
$(\mathrm{G}-\mathrm{F})(x) = -\mathrm{e}^{1-x} - \left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2} - \mathrm{e}^{1-x}$.

$$\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = (\mathrm{G}-\mathrm{F})(1) - (\mathrm{G}-\mathrm{F})(0) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2}\mathrm{e} - \mathrm{e}\right) = \boxed{\frac{\mathrm{e}-1}{2}}.$$

3. Ce résultat correspond à l'aire en unités d'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 41 énoncé **Antilles septembre 2016**

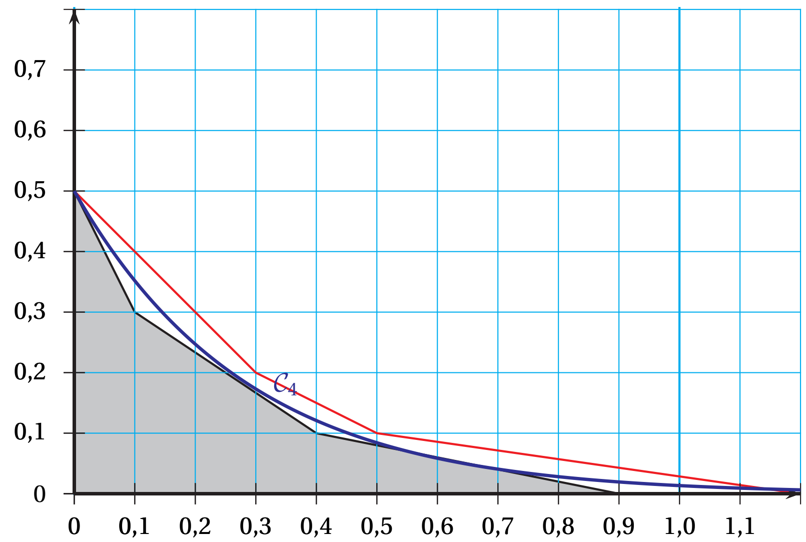
Commun à tous les candidats

Partie A - Étude graphique

1. Quel que soit n naturel et quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-(n-1)x} > 0$ et $1+\mathrm{e}^x > 1 > 0$: les fonctions f_n sont donc positives : les termes de la suite (u_n) sont des intégrales de fonctions positives sur [0 ; 1] : u_n est donc l'aire, en unités d'aire de la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2. D'après l'allure des courbes on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0.

3.



L'aire de la surface grisée s'obtient comme la somme des aires de deux trapèzes et d'un triangle : $4+6+2,5 = 12,5$ carrés d'aire 0,01.

L'aire de la surface limitée par les axes et la ligne rouge se décompose en $10,5+3+3,5 = 17$ aires de carrés d'aire 0,01.

On en déduit que $0,125 < u_4 < 0,17$.

On a donc

$$0,12 < u_4 < 0,17.$$

Partie B - Étude théorique

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

En posant $u(x) = 1+\mathrm{e}^x$ on obtient $u'(x) = \mathrm{e}^x$, donc :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln u(x)]_0^1 = \left[\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right).$$

2. Par linéarité de l'intégrale :

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + \frac{\mathrm{e}^{-(1-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1-0 = 1.$$

On en déduit que : $u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

3. L'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle [0 ; 1] est positive. Donc $u_n > 0$

4. (a) $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1-1)x}}{1+\mathrm{e}^x} - \dfrac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x} - \dfrac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^x} =$

$\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}(1-\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{-nx}\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

(b) On sait que pour tout naturel n et pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et que

$1+\mathrm{e}^x > 1 > 0$.

Le signe de $d_n(x)$ est donc celui de $1-\mathrm{e}^x$.

Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow \mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1$ par croissance de la fonction exponentielle, soit $1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}$, d'où $-\mathrm{e} \leqslant -\mathrm{e}^x \leqslant -1$ et enfin $1-\mathrm{e} \leqslant 1-\mathrm{e}^x \leqslant 0$.

Conclusion : $1-\mathrm{e}^x \leqslant 0 \Longrightarrow d_n(x) \leqslant 0$.

5. $d_n(x) < 0 \iff f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0 \iff f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

Il en résulte par intégration sur l'intervalle [0 ; 1]que $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

Comme on a vu qu'elle minorée par zéro, elle est donc convergente vers une limite ℓ supérieure ou égale à zéro.

6. **(a)** $u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{e^{-(n+1-1)x}}{1+e^x}$ et par linéarité de l'intégrale :
$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \left[\frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x} + \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\right] dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\left(e^x+1\right) dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 =$
$-\frac{e^{-n}}{-n} + \frac{1}{n} = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

(b) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e^{-n} = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$.

On a donc $\ell = 0$.

(c) Tant que $K < N$

Affecter $\frac{1-e^{-K}}{K} - U$ à U

Affecter $K+1$ à K

Fin Tant que

EXERCICE 42 énoncé **Asie 2016**

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = a\mathrm{e}^{ax} + a$.

On note $\mathrm{I}(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 : $\mathrm{I}(a) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

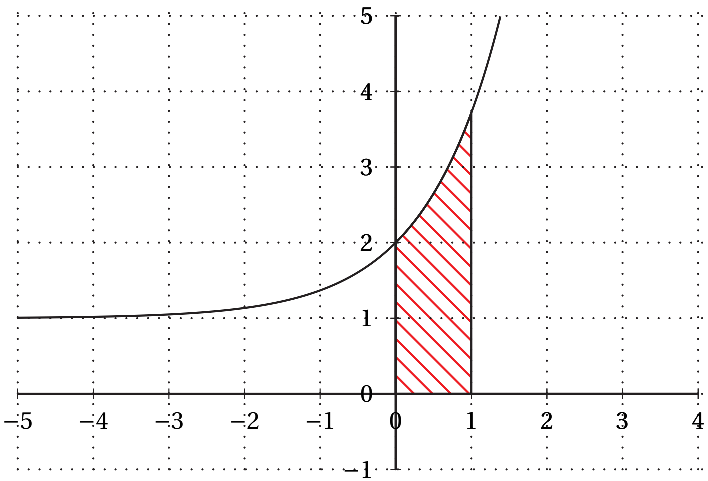
1. On pose dans cette question $a = 0$.

$f_0(x) = 0$ donc $\mathrm{I}(0) = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$

2. On pose dans cette question $a = 1$.

On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = \mathrm{e}^x + 1$.

(a) On représente la fonction f_1 dans un repère orthogonal :



On connaît la représentation graphique de la fonction exponentielle donc on peut, sans étude, représenter la fonction f_1.

(b) La fonction F_1 définie par $\mathrm{F}_1(x) = \mathrm{e}^x + x$ est une primitive de la fonction f_1.

Donc $\mathrm{I}(1) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{F}_1(x)\right]_0^1 = \mathrm{F}_1(1) - \mathrm{F}_1(0) = (\mathrm{e}^1 + 1) - (\mathrm{e}^0 - 0) = \mathrm{e} + 1 - 1 = \mathrm{e} \approx 2,7$

3. On cherche s'il existe une valeur de a pour laquelle $\mathrm{I}(a)$ est égale à 2.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}_a(x) = \mathrm{e}^{ax} + ax$ est une primitive de f.

Donc $\mathrm{I}(a) = \int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}_a(1) - \mathrm{F}_a(0) = (\mathrm{e}^a + a) - (\mathrm{e}^0 + 0) = \mathrm{e}^a + a - 1$

Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = \mathrm{e}^x + x - 1$.

g est dérivable donc continue et $g'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$ sur $[0;1]$.

$g(0) = \mathrm{e}^0 + 0 - 1 = 0 < 2$ et $g(1) = \mathrm{e}^1 + 1 - 1 = \mathrm{e} \approx 2,72 > 2$

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0;1]$; $g(0) < 2$ et $g(1) > 2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 2$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$.

Il existe donc une valeur unique de a dans $[0;1]$ telle que $\mathrm{I}(a) = 2$.

$\begin{cases} f(0,7) \approx 1,71 < 2 \\ f(0,8) \approx 2,03 > 2 \end{cases} \implies a \in [0,7;0,8]$ $\quad\quad$ $\begin{cases} f(0,79) \approx 1,99 < 2 \\ f(0,80) \approx 2,03 > 2 \end{cases} \implies a \in [0,79;0,80]$

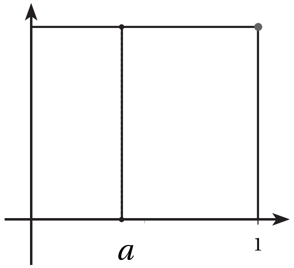
Exercice 43 énoncé **Centres Étrangers 2016**

Partie A

1. (a)

Dans la cas où f est une fonction constante strictement positive, on a :

$$A_1 = a \times f(0) \quad \text{u.a} \quad \text{et } A_2 = (1-a)\times f(0) \quad \text{u.a}$$



Par suite :

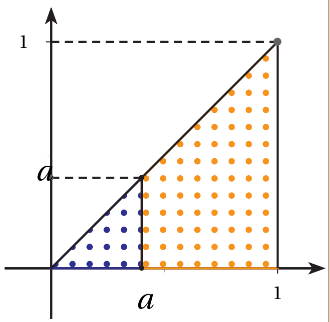
$$A_1 = A_2 \iff a\times f(0) = (1-a)\times f(0) \overset{f(0)\neq 0}{\iff} 1-a = a \iff a = \frac{1}{2}$$

La condition (E) est remplie pour un unique réel.

(b)

A_1 est l'aire d'un triangle rectangle, A_2 celle d'un trapèze :

$$A_1 = \frac{a^2}{2} \quad \text{u.a} \quad \text{et } A_2 = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \text{u.a}$$



Par suite :

$$A_1 = A_2 \iff \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \iff a^2 = \frac{1}{2} \overset{a>0}{\iff} a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La condition (E) est remplie pour un unique réel.

2. (a)

$$A_1 = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad A_2 = \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) Soit $a \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\iff \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\iff F(a) - F(0) = F(1) - F(a) \\ &\iff F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2} \end{aligned}$$

Puisqu'on a raisonné par équivalence, on a montré que

Le nombre réel a vérifie la condition (E) si et seulement si $F(a) = \dfrac{F(0)+F(1)}{2}$

3. (a) D'après ce qui précède, les valeurs de a pour lesquelles la condition (E) est vérifiée sont les solutions de l'équation

$$F(x) = \frac{F(0)+F(1)}{2} \text{ où F est une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de la fonction exponentielle.}$$

Puisqu'une primitive de la fonction exponentielle est elle-même, alors l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1}{2}$$

soit :

$$\mathrm{e}^x = \frac{1+\mathrm{e}}{2}$$

ou encore :

$$x = \ln\frac{1+\mathrm{e}}{2}$$

La condition (E) est vérifiée pour l'unique nombre réel $\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$

(b) Il suffit de prouver :

$$F\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{F(0)+F(1)}{2}$$

où F est une primitive sur $[0,1]$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$

Une primitive de f est F, définie sur $[0\,;\,1]$ par $F(x) = -\dfrac{1}{x+2}$.

Calculons chacun des deux nombres $\dfrac{F(0)+F(1)}{2}$ et $F\left(\frac{2}{5}\right)$:

$$\frac{F(0)+F(1)}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{12} \quad \text{et} \quad F\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{1}{\frac{2}{5}+2}=-\frac{1}{\frac{12}{5}}=-\frac{5}{12}$$

Par conséquent :

$$\text{La valeur } a=\frac{2}{5} \text{ convient}$$

Partie B

1. Puisqu'une primitive de f est la fonction F définie sur [0 ; 1] par $F(x)=4x-x^3$, on déduit de A. 2. a. que la condition (E) est vérifiée si et seulement si

$$4a-a^3=\frac{4-1}{2}$$

soit :

$$a=\frac{a^3}{4}+\frac{3}{8}$$

a est donc une solution de l'équation $x=\frac{x^3}{4}+\frac{3}{8}$.

2. (a)

$$u_1=g(0)=\frac{3}{8}$$

(b) La fonction g, en tant que fonction polynôme, est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ et on a, pour tout nombre réel x de $[0\ ;\ 1]$:

$$g'(x)=\frac{3}{4}x^2$$

Puisque $g'\geqslant 0$ sur [0 ; 1], la fonction g est croissante sur [0 ; 1].

(c) Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$$

• $\mathcal{P}_0$ s'écrit :

$$0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$$

Puisque $\begin{cases} u_0=0 \\ u_1=\frac{3}{8}\end{cases}$, on a $0\leqslant 0\leqslant\frac{3}{8}\leqslant 1$:

$$\mathcal{P}_0 \text{ est vraie}$$

• Supposons la propriété $\mathcal{P}_p$ vraie pour tout entier naturel p. On a donc :

$$0\leqslant u_p\leqslant u_{p+1}\leqslant 1$$

Montrons alors que $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie, i.e :

$$0\leqslant u_{p+1}\leqslant u_{p+2}\leqslant 1$$

On a, par hypothèse :

$$0\leqslant u_p\leqslant u_{p+1}\leqslant 1$$

La fonction g étant croissante sur [0,1], on en déduit :

$$g(0)\leqslant g(u_p)\leqslant g(u_{p+1})\leqslant g(1)$$

soit :

$$\frac{3}{8}\leqslant u_{p+1}\leqslant u_{p+2}\leqslant\frac{5}{8}$$

On en déduit bien sûr :

$$0\leqslant u_{p+1}\leqslant u_{p+2}\leqslant 1$$

. On a prouvé :

$$\forall p\in\mathbb{N} \quad \mathcal{P}_p \text{ est vraie} \Longrightarrow \mathcal{P}_{p+1} \text{ est vraie}$$

• On a prouvé d'après le principe de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad 0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$$

(d) La suite u est croissante et majorée par 1 : elle converge donc, en vertu du théorème de la limite monotone, vers une limite ℓ comprise entre 0 et 1.

Puisque la fonction g est continue sur [0 ; 1], alors

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n)=g(\ell)$$

On a par ailleurs :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$

Puisque $u_{n+1} = g(u_n)$, on en déduit :

$$\ell = g(\ell)$$

soit

$$\ell = a$$

puisque l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution d'après la question 1.

(e) Une valeur approchée de u_{10} à 10^{-8} près est $0{,}389\,807\,84$

Exercice 44 énoncé Liban 2016

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1-x}}$.

Partie A

1. Étudions le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1].

f est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ avec pour tout $x\in[0\ ;\ 1]$: $f'(x)=\dfrac{-(-1)e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}=\dfrac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}$.

Pour tout $x\in[0\ ;\ 1]$, $e^{1-x}>0$ et $(1+e^{1-x})^2>0$.

On en déduit que pour tout $x\in[0\ ;\ 1]$, $f'(x)>0$ et donc que f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

2. En remarquant que $e=e^1$, et que pour tout réel x, $e^{-x}\times e^x=1$, on peut écrire :

$f(x)=\dfrac{1}{1+e\times e^{-x}}=\dfrac{e^x}{(1+e\times e^{-x})e^x}=\dfrac{e^x}{e^x+e}$.

3. f est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ donc continue et est de la forme $\dfrac{u'}{u}$; elle admet donc comme primitive pour tout $x\in[0\ ;\ 1]$ la fonction F définie par : $F(x)=\ln(e^x+e)$.

On en déduit que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\left[\ln(e^x+e)\right]_0^1=\ln(2e)-\ln(1+e)=\ln(2)+\ln(e)-\ln(1+e)=\ln(2)+1-\ln(1+e)$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur [0 ; 1] par : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+ne^{1-x}}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5.

Pour tout $x\in[0\ ;\ 1]$, on a : $f_0(x)=\dfrac{1}{1+0\times e^{1-x}}=1$.

La courbe $\mathcal{C}_0$ représentative de la fonction f_0 est le segment d'équation $y=1$ avec $x\in[0;1]$.

2. Soit n un entier naturel.

Pour tout $x\in[0\ ;\ 1]$, on a : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+ne^{1-x}}>0$. On en déduit que u_n représente l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_n$ délimitée par l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

On a en particulier $u_0=\displaystyle\int_0^1 1\,dx=[x]_0^1=1$

3. Il semble que la suite (u_n) soit décroissante car les aires sont de plus en plus petites. Démontrons-le.

Soit n un entier naturel.

Pour tout réel $x\in[0\ ;\ 1]$, on a : $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\dfrac{1}{1+(n+1)e^{1-x}}-\dfrac{1}{1+ne^{1-x}}=\dfrac{-e^{1-x}}{(1+ne^{1-x})(1+(n+1)e^{1-x})}<0.$

On en déduit que pour tout réel $x\in[0;1]$, on a : $f_{n+1}(x)<f_n(x)$ et comme par intégration sur un intervalle, l'ordre est conservé, on a pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx<\int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $u_{n+1}<u_n$.

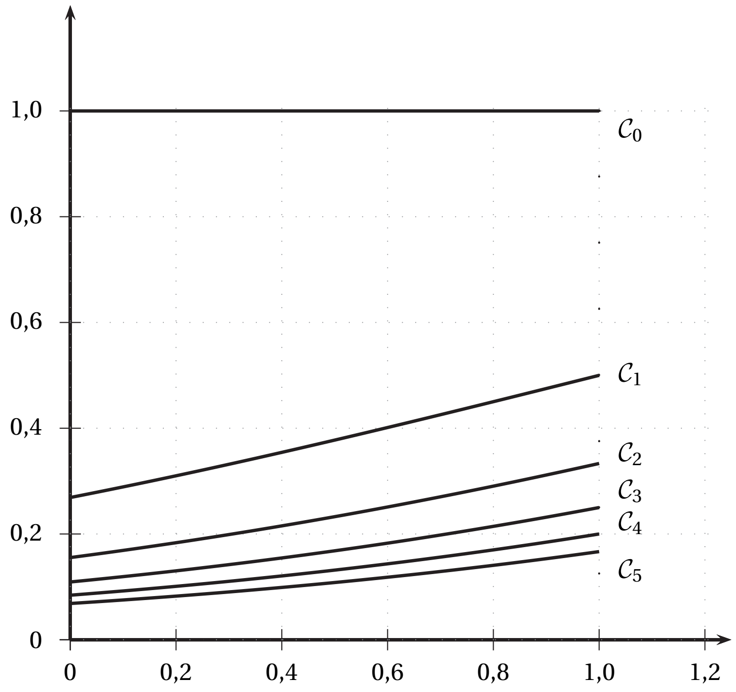
Ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement décroissante.

4. Soit n un entier naturel.

Pour tout réel $x\in[0\ ;\ 1]$, on a : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+ne^{1-x}}>0$ et donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx>0$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est minorée par 0.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge et par conséquent elle admet une limite finie.


1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
$\mathcal{C}_0$
$\mathcal{C}_1$
$\mathcal{C}_2$
$\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_4$
$\mathcal{C}_5$

Exercice 45 énoncé Métropole 2016

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rlcl} & f(x) & = & x \\ \iff & x - \ln(x^2+1) & = & x \\ \iff & \ln(x^2+1) & = & 0 \\ \iff & x^2+1 & = & \mathrm{e}^0 \\ \iff & x^2 & = & 0 \\ \iff & x & = & 0 \end{array}$$

L'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution

2. • Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

La fonction $u : x \mapsto x^2+1$ est une fonction trinôme, donc dérivable là où elle est définie, i.e $\mathbb{R}$.

Puisque $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\ln \circ u = \ln u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\ln(x^2+1)$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, *sauf pour* $x = 1$: on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Montrons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$:

De $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2+1 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$ on déduit, par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$.

Il vient ensuite, par produit :

$$\lim_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$$

De $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty \end{cases}$ on déduit, par somme :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

3. La fonction f est (strictement) croissante sur $[0\,;\,1]$. Par suite :

$$\forall x \in [0,1] \qquad f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$$

On a $\begin{cases} f(0) = 0 - \ln(0^2+1) = 0 \\ f(1) = 1 - \ln(1^2+1) = 1 - \ln 2 \end{cases}$. Puisque $1 - \ln 2 < 1$, alors

$$\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leqslant f(x) < 1$$

On a prouvé :

$$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) \in [0,1]$$

4. (a) L'algorithme affiche la plus petite valeur de N pour laquelle $\mathrm{N} - \ln(\mathrm{N}^2+1)$ est supérieur ou égal à N.

(b)

Pour A = 100, l'algorithme affiche 110

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \in [0,1]$.

- Puisque $u_0 = 1$, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Supposons vraie la propriété $\mathcal{P}_n$ pour *un* entier naturel n.

On a alors : $u_n \in [0,1]$.

D'après la troisième question de la partie A, on en déduit :

$$f(u_n) \in [0,1]$$

soit :

$$u_{n+1} \in [0,1]$$

On a prouvé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n \text{ est vraie} \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}$$

- On a prouvé par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in [0,1]$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$.

Étudions le signe de $-\ln\left(u_n^2+1\right)$:

Puisque $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on en déduit, la fonction carré étant croissante sur $[0,1]$:

$$0^2 \leqslant u_n^2 \leqslant 1^2$$

soit :

$$u_n^2 \in [0,1]$$

Par suite :

$$u_n^2+1 \in [1,2]$$

La fonction $\ln$ est croissante sur $[1,+\infty[$:

De $u_n^2+1 \geqslant 1$, on déduit $\ln(u_n^2+1) \geqslant \ln 1$, soit $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$.

Puisque $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2+1) \leqslant 0$, alors

La suite u est décroissante

3. La suite u est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc, en vertu du théorème de la limite monotone, vers un nombre réel ℓ.

4. Puisque l'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution, on en déduit :

$$\ell = 0$$

Exercice 46 énoncé Métropole 2016

Commun à tous les candidats

1.

$$\tan\alpha = \frac{\text{EA}}{\text{ET}} = \frac{25}{x} \qquad \tan\beta = \frac{\text{EB}}{\text{ET}} = \frac{30,6}{x}$$

2. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies et dérivables sur $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$. Puisque la fonction cosinus ne s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit, par quotient, que la fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$.

Pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\cos x)}{(\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Puisque $\tan' > 0$ sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$, alors

La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

3. On a $\widehat{\text{ATB}} = \widehat{\text{ETB}} - \widehat{\text{ETA}}$, soit $\gamma = \beta - \alpha$. Par suite :

$$\tan\gamma = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \times \frac{25}{x}}$$

$$= \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{\frac{x^2+765}{x^2}} = \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2+765}$$

$$= \frac{5,6x}{x^2+765}$$

$$\tan\gamma = \frac{5,6x}{x^2+765}$$

4. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximal lorsque sa mesure γ l'est. Puisque γ appartient à l'intervalle $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ on en déduit, la fonction tangente étant strictement croissante sur $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$, que γ est maximal si et seulement si $\tan\gamma$ est maximal.

S'il existe, le maximum de $\tan\gamma$ est ainsi le maximum, sur $]0,50]$, de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.

Remarque :

> Pour démontrer que g admet, sur]0 ; 50], un maximum atteint pour une unique valeur de x, il su
> d'étudier les variations de g, ce qui ne pose aucun problème...

On peut aussi procéder de la manière suivante :

Puisque la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]0\,;\,50]$, on peut définir, sur $]0\,;\,50]$, la fonction $\dfrac{1}{g}$.

La fonction g est strictement positive sur $]0\,;\,50]$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$: les fonctions g et $\dfrac{1}{g}$ ont donc des sens de variation contraires.

Puisque $f = 5,6 \times \dfrac{1}{g}$, les fonctions f et $\dfrac{1}{g}$ ont les mêmes variations : les fonctions f et g ont donc des variations contraires.

Le maximum de g[1] sur]0 ; 50] est obtenu en une valeur de x pour laquelle f admet un minimum.

La fonction f est dérivable sur $]0,50]$ et, pour tout nombre réel x appartenant à $]0\,;\,50]$:

$$f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2-765}{x^2} = \frac{x+\sqrt{765}}{x}(x-\sqrt{765})$$

Puisque $x \in]0\,;\,50]$, alors $x + \sqrt{765} > 0$:

le signe de f'(x) est donc celui de $x - \sqrt{765}$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{765}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{765}\,;\,50]$:

f admet donc, sur $]0\,;\,50]$, un minimum atteint pour $x = \sqrt{765}$.

L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximal pour une unique valeur de x, égale à $\sqrt{765}$ m.

Une valeur approchée de x, au mètre prés, est 28 m

1. Sous réserve d'existence

Une valeur approchée de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$, à 0,01 radian près est $0,1$, soit environ $5,78$ř.

Exercice 47 énoncé **Métropole septembre 2016**

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $v_1(t) = 5 \times \dfrac{\mathrm{e}^{0,3t}-1}{\mathrm{e}^{0,3t}+1}$.

1. La fonction v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$v_1'(t) = 5 \times \frac{0,3\mathrm{e}^{0,3t}\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)-\left(\mathrm{e}^{0,3t}-1\right)\times\left(0,3\mathrm{e}^{0,3t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2} = 5 \times \frac{0,3\mathrm{e}^{0,3t}\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1-\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2}$$
$$= 5 \times \frac{0,3\mathrm{e}^{0,3t}\times 2}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2} = \frac{3\mathrm{e}^{0,3t}}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2}$$

Pour tout t, $\mathrm{e}^{0,3t}>0$ donc $v_1(t)>0$ donc la fonction v_1 est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.

On résout l'inéquation $v_1(t)<6$:

$$v_1(t)<6 \iff 5\times\frac{\mathrm{e}^{0,3t}-1}{\mathrm{e}^{0,3t}+1}<6 \iff 5\times\frac{\mathrm{e}^{0,3t}-1}{\mathrm{e}^{0,3t}+1}-6<0$$
$$\iff \frac{5\mathrm{e}^{0,3t}-5-6\mathrm{e}^{0,3t}-6}{\mathrm{e}^{0,3t}+1}<0 \iff \frac{-\mathrm{e}^{0,3t}-11}{\mathrm{e}^{0,3t}+1}<0$$

Pour tout t, $\mathrm{e}^{0,3t}>0$ donc $-\mathrm{e}^{0,3t}-11<0$ et $\mathrm{e}^{0,3t}+1>0$, donc l'inéquation est toujours vérifiée : $v_1(t)<6$ pour tout t. Donc le colis ne risque pas d'être endommagé si le parachute s'ouvre normalement.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t) = 32,7\left(1-\mathrm{e}^{-0,3t}\right)$.

1. La vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes est $v_2(10)$:

$$v_2(t) = 32,7\left(1-\mathrm{e}^{-0,3\times 10}\right)\approx 31,1.$$

La valeur approchée à 10^{-1} de vitesse atteinte par le colis au bout de 10 secondes est 31,1 m.s^{-1}.

2. On résout l'équation $v_2(t)=30$ m.s^{-1}.

$$v_2(t)=30 \iff 32,7\left(1-\mathrm{e}^{-0,3t}\right)=t \iff 1-\mathrm{e}^{-0,3t}=\frac{30}{32,7}$$
$$\iff 1-\frac{30}{32,7}=\mathrm{e}^{-0,3t} \iff \frac{2,7}{32,7}=\mathrm{e}^{-0,3t}$$
$$\iff \ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right)=-0,3t \iff \frac{\ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right)}{-0,3}=t$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right)}{-0,3}\approx 8,3$ donc au bout d'environ 8,3 secondes, le colis atteint la vitesse de 30 m.s^{-1}.

3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes.

On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $d(\mathrm{T}) = \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} v_2(t)$.

(a) $d(\mathrm{T}) = \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} 32,7\left(1-\mathrm{e}^{-0,3t}\right)\mathrm{d}t$

La fonction v_2 a pour primitive la fonction $t\longmapsto 32,7\left(t-\dfrac{\mathrm{e}^{-0,3t}}{-0,3}\right)$;

on a $32,7\left(t-\dfrac{\mathrm{e}^{-0,3t}}{-0,3}\right)=32,7\left(t+\dfrac{\mathrm{e}^{-0,3t}}{0,3}\right)=\dfrac{32,7}{0,3}\left(0,3t+\mathrm{e}^{-0,3t}\right)=109\left(0,3t+\mathrm{e}^{-0,3t}\right)$.

Donc $d(\mathrm{T}) = \left[109\left(0,3t+\mathrm{e}^{-0,3t}\right)\right]_0^{\mathrm{T}} = 109\left(0,3\mathrm{T}+\mathrm{e}^{-0,3\mathrm{T}}\right)-109\left(0+\mathrm{e}^{-0,3\times 0}\right) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3\mathrm{T}}+0,3\mathrm{T}-1\right)$.

(b) Le colis atteint le sol au bout de 20 secondes donc la distance qu'il parcourt est

$$d(20) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3\times 20}+0,3\times 20-1\right)\approx 545 \text{ m}.$$

4. Le temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres est la valeur de T solution de l'équation $d(\mathrm{T})=700$.

On étudie les variations de la fonction d sur $[0\,;\,+\infty[$:

$d'(\mathrm{T}) = 109\left(-0,3\mathrm{e}^{-0,3\mathrm{T}}+0,3\right)=32,7\left(1-0,3\mathrm{e}^{-0,3\mathrm{T}}\right)$

$\mathrm{T}\geqslant 0 \Longrightarrow -0,3\mathrm{T}\leqslant 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{-0,3\mathrm{T}}\leqslant 1 \Longrightarrow 1-0,3\mathrm{e}^{-0,3\mathrm{T}}\geqslant 0 \Longrightarrow d'(\mathrm{T})\geqslant 0$

Donc la fonction d est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Or $d(0) = 0 < 700$ et $d(30) \approx 872 > 700$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires on peut dire que l'équation $d(\mathrm{T}) = 700$ admet une solution unique α sur $[0\ ;\ 30[$:

$$\left.\begin{array}{lcl} d(24) & \approx & 675,9 < 700 \\ d(25) & \approx & 708,6 > 700 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [24\ ;\ 25] \qquad \left.\begin{array}{lcl} d(24,7) & \approx & 698,8 < 700 \\ d(24,8) & \approx & 702,0 > 700 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [24,7\ ;\ 24,8]$$

Le temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres est comprise entre 24,7 et 24,8 secondes.

EXERCICE 48 énoncé Nouvelle Calédonie 2017

Partie A

1. On justifie les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

- La dérivée de f est $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}+x(-1)\mathrm{e}^{-x}=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

  Pour tout s, $\mathrm{e}^{-x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$, donc $f'(x)>0$ sur $[0\,;\,1[$ et $f'(x)<0$ sur $]1\,;\,+\infty[$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, et elle est strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
- $f(0)=0$
- On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

  $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}$; on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}=0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

$\mathrm{F}'(x)=-1\times\mathrm{e}^{-x}+(-x-1)(-1)\mathrm{e}^{-x}=(-1+x+1)\mathrm{e}^{-x}=x\mathrm{e}^{-x}=f(x)$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit a un nombre réel tel que $0<a<1$. On considère la droite D_a d'équation $y=ax$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe $\mathcal{C}_f$. On note x_{M} l'abscisse du point M.
On note $\mathcal{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$ au-dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x=0$ et $x=x_{\mathrm{M}}$.

1. La droite D_a et la courbe $\mathcal{C}_f$ se coupent en des points dont les abscisses sont solutions de l'équation $ax=x\mathrm{e}^{-x}$. On résout cette équation :

$ax=x\mathrm{e}^{-x}\iff ax-x\mathrm{e}^{-x}=0\iff x(a-\mathrm{e}^{-x})=0\iff x=0$ ou $a-\mathrm{e}^{-x}=0\iff x=0$ ou $a=\mathrm{e}^{-x}$

$\iff x=0$ ou $\ln(a)=-x\iff x=0$ ou $x=-\ln(a)$

Donc la droite D_a et la courbe $\mathcal{C}_f$ se coupent au point O et en un autre point d'abscisse $-\ln(a)$.

On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_{\mathrm{M}}=-\ln(a)$ et que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;\,-\ln(a)]$.

2. La courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;\,-\ln(a)]$, donc l'aire $\mathcal{H}(a)$ du domaine hachuré est $\displaystyle\int_0^{-\ln(a)}\big(f(x)-ax\big)\,\mathrm{d}x$.

$$\mathcal{H}(a)=\int_0^{-\ln(a)}\big(f(x)-ax\big)\,\mathrm{d}x=\int_0^{-\ln(a)}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{-\ln(a)}ax\,\mathrm{d}x=\Big[\mathrm{F}(x)\Big]_0^{-\ln(a)}-\left[a\frac{x^2}{2}\right]_0^{-\ln(a)}$$

$$=\Big[(\ln(a)-1)\mathrm{e}^{-(-\ln(a))}-(-1)\mathrm{e}^{0}\Big]-\left[a\frac{(\ln(a))^2}{2}-0\right]=a\ln(a)-a+1-\frac{1}{2}a(\ln(a))^2$$

3. Soit la fonction $\mathcal{H}$ définie sur $]0\,;\,1]$ par $\mathcal{H}(x)=x\ln(x)-\frac{1}{2}x(\ln(x))^2+1-x$.

On admet que $\mathcal{H}$ est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et que son tableau de variations correspond à celui qui est proposé ci-dessous.

x	0		1
$\mathcal{H}(x)$	$\Vert$ 1	$\searrow$	0

La fonction $\mathcal{H}$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,1]$. D'après le tableau de variations, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\mathcal{H}(x)=1$ et $\mathcal{H}(1)=0$. Or $0{,}5\in]0\,;\,1[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\mathcal{H}(x)=0{,}5$ admet une solution unique α dans $]0\,;\,1[$.

4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous.

```
VARIABLES :       A, B et C sont des nombres ;
                  p est un entier naturel.
INITIALISATION :  Demander la valeur de p
                  A prend la valeur 0
                  B prend la valeur 1
TRAITEMENT :      Tant que B − A > 10^(−p)
                  |  C prend la valeur (A + B)/2
                  |  Si H(C) > 0,5
                  |  |  Alors A prend la valeur de C
                  |  |  Sinon B prend la valeur de C
                  |  Fin de la boucle Si
                  Fin de la boucle Tant que
SORTIE :          Afficher A et B.
```

Cet algorithme, dit de « dichotomie », permet de déterminer un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-p} de la solution de l'équation $\mathcal{H}(x) = 0,5$; le nombre A est la borne inférieure de l'encadrement, le nombre B en est la borne supérieure.

5. On utilise la calculatrice pour déterminer les encadrements suivants :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \mathcal{H}(x) = 1 \\ \mathcal{H}(0,1) \approx 0,40 < 0,5\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in]0\ ;\ 0,1[\qquad \left.\begin{array}{l}\mathcal{H}(0,06) \approx 0,534 > 0,5 \\ \mathcal{H}(0,07) \approx 0,496 < 0,5\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in]0,06\ ;\ 0,07[$$

Exercice 49 énoncé **Nouvelle Calédonie novembre 2016**

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} - 0,1$.

1. D'après le cours, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$; donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -0,1$.

2. La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{-x} + x\times(-1)\mathrm{e}^{-x} - 0 = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

$f(0) = -0,1$; $f(1) = \mathrm{e}^{-1} - 0,1 \approx 0,27 > 0$

On construit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-0,1$	↗	$\mathrm{e}^{-1}-0,1$	↘	$-0,1$

3. $f(0) = -0,1 < 0$ et $f(1) \approx 0,27 > 0$; on complète le tableau de variations

x	0		α		1		$+\infty$
$f(x)$	$-0,1$	↗	0	↗	$\mathrm{e}^{-1}-0,1$	↘	$-0,1$

D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathcal{C}'$ la courbe symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.

4. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ par $\mathrm{F}(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x} - 0,1x$.

La fonction F est dérivable sur $[\alpha\,;\,\beta]$ et

$\mathrm{F}'(x) = -1\times\mathrm{e}^{-x} - (x+1)\times(-1)\mathrm{e}^{-x} - 0,1 = (-1+x+1)\mathrm{e}^{-x} - 0,1 = x\mathrm{e}^{-x} - 0,1 = f(x)$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[\alpha\,;\,\beta]$.

5. La fonction f est positive sur $[\alpha\,;\,\beta]$ donc l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$ est $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour des raisons de symétrie, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est $\mathcal{A} = 2\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\mathcal{A} = 2\times\left[\mathrm{F}(\beta) - \mathrm{F}(\alpha)\right] \approx 2\times\left[\mathrm{F}(3,577) - \mathrm{F}(0,112)\right] \approx 1,04$

L'aire du domaine compris entre les deux courbes est approximativement de $1,04$ unité d'aire.

6. L'unité sur chaque axe représente 5 mètres, donc une unité d'aire est égale à 25 m^2.

L'aire du domaine entre les deux courbes est donc approximativement de $1,04\times25 = 26$ m^2.

On peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré donc sur 26 m^2 on en disposera $26\times36 = 936$ plants de tulipes.

Exercice 50 énoncé **Polynésie 2016**

Partie A

1. La vitesse est visiblement maximale pour $t=0$ car c'est la tangente aux courbes en $O(0\ ;\ 0)$ qui semble avoir le coefficient directeur le plus élevé parmi toutes les tangentes.

On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Le coefficient directeur de la tangente en O à la courbe $\mathcal{C}_1$ est supérieur à celui de la tangente en O à la courbe $\mathcal{C}_2$. C'est donc la personne P_1 la moins corpulente qui subit plus vite les effets de l'alcool.

3. **(a)** Première méthode (longue mais utilisable dans la partie B) :

f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$$f=uv\Longrightarrow f'=u'v+uv' \text{ avec } \begin{cases} u(t)=At \\ v(t)=e^{-t}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t)=A \\ v'(t)=-e^{-t}\end{cases}$$

$\forall t\in[0\ ;\ +\infty[\ ,\ f'(t)=A(1-t)e^{-t}$ et $f'(0)=A$

Deuxième méthode (peut-être un peu plus astucieuse) :

$$\lim\limits_{x\to h}0\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{x\to h}0Ae^{-h}=A \text{ (limite finie)}$$

On en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0)=A$

(b) L'affirmation est FAUSSE

- On a vu que le nombre dérivé en 0 est égal à $f'(0)=A$: c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe à l'origine et on sait que les personnes de faible corpulence subissent plus vite les effets de l'alcool. Donc plus A est grand et plus la personne est de faible corpulence.
- Autre méthode mathématique : si $A_1>A_2$ alors $A_1te^{-t}>A_2te^{-t}$ car $te^{-t}>0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$

On en déduit que la courbe associée à A_1 est au dessus de celle associée à A_2 donc la personne associée à A_1 est de plus faible corpulence que la personne associée à A_2.

Partie B - Un cas particulier

1. On a vu dans la partie précédente que $\forall t\in[0\ ;\ +\infty[\ ,\ f'(t)=A(1-t)e^{-t}$ or $Ae^{-t}>0$ donc $f'(t)$ est du signe de $1-t$, on peut donc déterminer les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	

2. La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale 1h après l'absorption.

Elle est alors d'environ 0,74 $g.l^{-1}$

3. $\lim\limits_{x\to t}+\infty\frac{e^t}{t}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to t}+\infty f(t)=\lim\limits_{x\to t}+\infty 2\times\frac{t}{e^t}=\lim\limits_{x\to t}+\infty 2\times\frac{1}{\left(\frac{e^t}{t}\right)}=0$ par quotient

On en déduit que l'alcool finit par s'éliminer totalement.

4. **(a)** f est continue et strictement croissante sur $[0\ ,\ 1]$ à valeurs dans $\left[0\ ;\ \frac{2}{e}\right]$

or $0{,}2\in\left[0\ ;\ \frac{2}{e}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(t)=0{,}2$ admet une unique solution t_1 sur $[0\ ,\ 1]$

de même, f est continue et strictement décroissante sur $[1\ ,\ +\infty[$ à valeurs dans $\left]0\ ;\ \frac{2}{e}\right]$

or $0{,}2\in\left]0\ ;\ \frac{2}{e}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(t)=0{,}2$ admet une unique solution t_2 sur $[1\ ,\ +\infty[$

(b) Par balayage, on obtient $t_1\approx0{,}112$ et $t_2\approx3{,}577$

donc Paul doit attendre au minimum 3 heures et 35 minutes avant de reprendre le volant.

5. **(a)** On sait que $\lim\limits_{x\to t}+\infty f(t)=0$ donc par définition de la limite, pour tout $\epsilon>0$ il existe $T\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t>T$, $f(t)\in]-\epsilon\ ;\ \epsilon[$

ici on pose $\epsilon=5\times10^{-3}$

Donc il existe un instant T à partir duquel l'alcool n'est plus détectable dans le sang

(b)

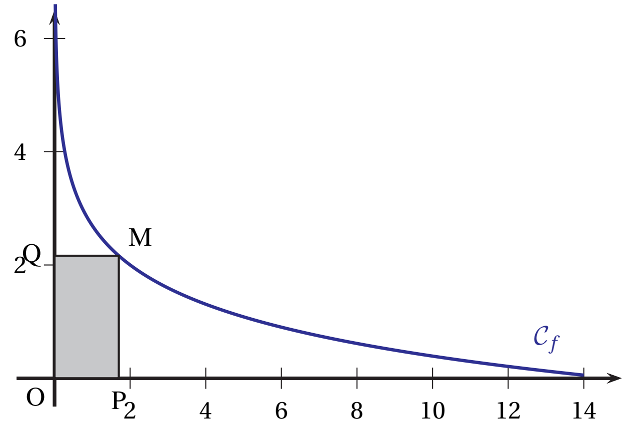
	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

La valeur affichée par l'algorithme est le temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.

Si on poursuit l'algorithme jusqu'à son terme, on obtient $8,25$ à l'affichage donc il faut 8 h et 15 minutes pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang

EXERCICE 51 énoncé **Pondichéry 2016**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathcal{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- On prend deux positions du point M et on compare les aires des rectangles obtenus.
  - Si M est d'abscisse 2, son ordonnée est $f(2) = 2 - \ln(1) = 2$ donc l'aire du rectangle OPMQ vaut 4 unités d'aire.
  - Si M est d'abscisse 4, son ordonnée est $f(4) = 2 - \ln(2)$ donc l'aire du rectangle OPMQ vaut $4 - 2\ln(2)$ qui est différente de 4.

  Donc l'aire du rectangle OPMQ n'est pas constante.

- Le point M a pour abscisse x et pour ordonnée $f(x)$ donc l'aire du rectangle OPMQ est $\mathcal{A}(x) = x \times f(x) = 2x - x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

  Étudions les variations de la fonction $\mathcal{A}$; on remarque que $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2$ donc $\left(\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)' = \dfrac{1}{x}$

$\mathcal{A}'(x) = 2 - \left(\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + x\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) > 0 \iff 1 > \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \iff \mathrm{e} > \dfrac{x}{2} \iff x < 2\mathrm{e}$

$\mathcal{A}(2\mathrm{e}) = 2 \times 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} \times \ln\dfrac{2\mathrm{e}}{2} = 2\mathrm{e}$ d'où le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$:

x	0		2e		14
$\mathcal{A}'(x)$	‖	+	0	−	
$\mathcal{A}(x)$	‖	↗	2e	↘	

$f(2\mathrm{e}) = 2 - \ln\dfrac{2\mathrm{e}}{2} = 2 - 1 = 1$. donc l'aire du rectangle OPMQ est maximale pour le point M de coordonnées $(2\mathrm{e}\,;\,1)$.

Exercice 52 énoncé **Pondichéry 2016**

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. On cherche T_3 :

$T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 = 36,25$; $T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 = 45,8125$; $T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 = 53,940625$

La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est approximativement de 54 ° C.

2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

- Pour $n = 0$: $100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 \times 1 = 25 = T_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $T_p = 100 - 75 \times 0,85^p$.

  D'après l'algorithme, on peut dire que, pour tout $n \geqslant 0$, $T_{n+1} = 0,85 \times T_n + 15$.

  Donc $T_{p+1} = 0,85\left(100 - 75 \times 0,85^p\right) + 15 = 85 - 75 \times 0,85^{p+1} + 15 = 100 - 75 \times 0,85^{p+1}$

  La propriété est donc vraie au rang $p+1$.

- La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $p \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Pour tout entier naturel n, $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

3. La stérilisation débute dès que la température est supérieure à 85 ° C, donc on cherche n tel que $T_n > 85$:

$$\begin{aligned}
T_n > 85 &\iff 100 - 75 \times 0,85^n > 85 \\
&\iff 15 > 75 \times 0,85^n \\
&\iff 0,2 > 0,85^n \\
&\iff \ln 0,2 > \ln\left(0,85^n\right) && \text{croissance de la fonction ln} \\
&\iff \ln 0,2 > n \times \ln 0,85 && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff \frac{\ln 0,2}{\ln 0,85} < n && \text{car } \ln 0,85 < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,85} \approx 9,9$ donc la stérilisation débute au bout de 10 minutes.

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec : $f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}$.

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(t) = -75 \times \left(-\dfrac{\ln 5}{10}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7,5 \times \ln 5\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} > 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(b) $f(10) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10} = 100 - 75\mathrm{e}^{-\ln 5} = 100 - \dfrac{75}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = 100 - \dfrac{75}{5} = 85$

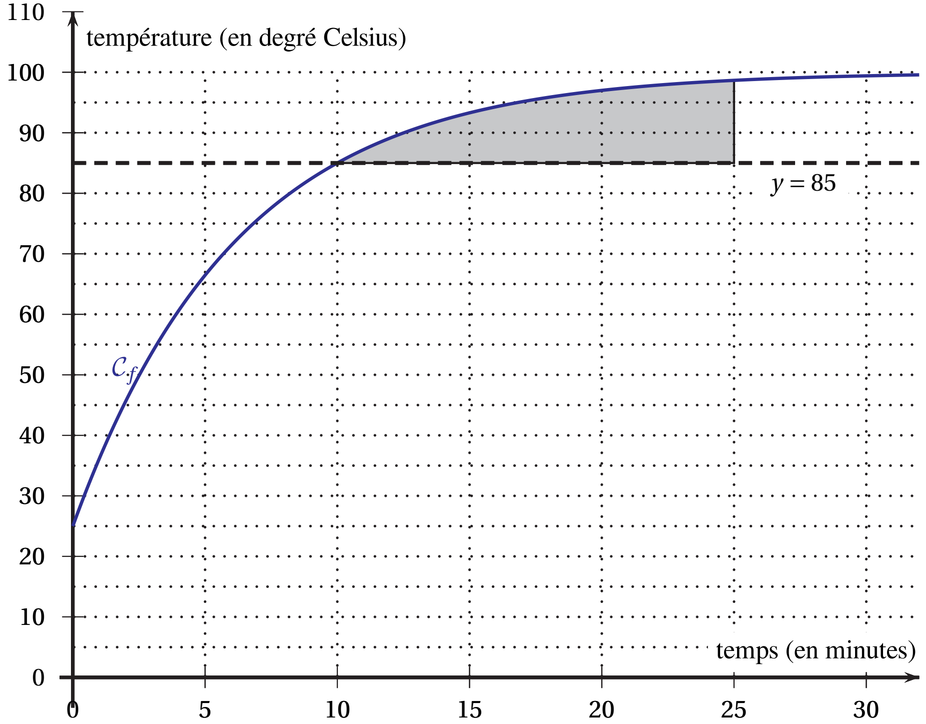
Or la fonction f est strictement croissante donc si $x \geqslant 10$, alors $f(x) \geqslant f(10)$ ce qui veut dire qque $f(x) \geqslant 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$,

$y = 85$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



(a) A(25) est représentée en gris sur le graphique ci-dessus. Chaque rectangle correspond à 5×5 unités d'aire. En comptant les rectangles inclus dans la partie grisée, on en compte 3 entiers plus un demi, ce qui fait $3,5 \times 25 = 87,5$ unités d'aire. Donc $\mathcal{A}(25) > 80$.

(b) $\mathrm{A}(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} \left(f(t) - 85\right) \mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} \left[\left(100 - 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10} t}\right) - 85\right] \mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10} t}\right) \mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_{10}^{\theta} 15 \,\mathrm{d}t - \int_{10}^{\theta} 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10} t} \mathrm{d}t = 15 \left[t\right]_{10}^{\theta} - 75 \int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10} t} \mathrm{d}t = 15(\theta - 10) - 75 \int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10} t} \mathrm{d}t$

(c) La stérilisation est finie au bout de 20 minutes si $\mathcal{A}(20) > 80$.

$$\mathcal{A}(20) = 15(20 - 10) - 75 \int_{10}^{20} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10} t} \mathrm{d}t = 150 - 75 \left[-\frac{10}{\ln 5} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10} t}\right]_{10}^{20} = 150 + \frac{750}{\ln 5} \left[\mathrm{e}^{-2\ln 5} - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right]$$

$$= 150 + \frac{750}{\ln 5} \left[\left(\mathrm{e}^{-\ln 5}\right)^2 - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5} \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5} \left[\frac{1}{25} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= 150 + \frac{750}{\ln 5} \times \frac{-4}{25} = 150 - \frac{120}{\ln 5} \approx 75,44 < 80$$

Donc la stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes.