Annales 2011-2016 : probabilités

Exercice 1 correction Amerique du Nord 2011

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.

2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

(a) On considère un lot de 10 ordinateurs.

Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

(b) Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à $0,999$?

EXERCICE 2 correction Amerique du Sud 2011

Commun à tous les candidats

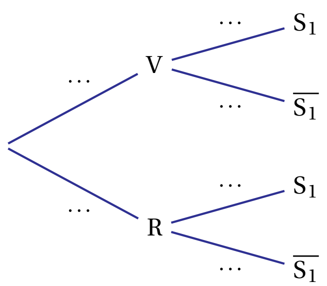
Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

- V l'évènement : « le dé tiré est vert »
- R l'évènement : « le dé tiré est rouge »
- S_1 l'évènement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

1. On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.

(a) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



(b) Calculer la probabilité $P(S_1)$.

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

(a) Démontrer que :

$$P(S_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers.

Démontrer que :

$$p_n = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$

(c) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p_n \geqslant 0,999$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Exercice 3 correction Asie 2011

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par :

$$F(t) = p(X \leqslant t) = p([0\,;\,t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

(a) $p_B(A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$) ;

(b) $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (où A est un évènement) ;

(c) $p([a\,;\,b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s, on a :

$$p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s]) = \frac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)},$$

et que $p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0,4}$.

3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.

Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.

(a) Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.

(b) Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

EXERCICE 4 correction Antilles septembre 2011

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne.

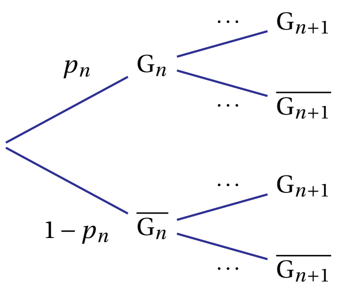
Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

(a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

(b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

(c) Déterminer la limite de p_n.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

(b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

(c) Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.

(a) Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.

(b) Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 € ? Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

Exercice 5 correction **Métropole 2011**

Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. **(a)** Préciser les valeurs des probabilités $P(V), P_V(T), P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

(b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.

3. **(a)** Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

(b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

EXERCICE 6 correction **Antilles 2011**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

a. 6 **b.** 7 **c.** 10 **d.** 12

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(\mathrm{X} \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

a. 0,271 **b.** 0,135 **c.** 0,865 **d.** 0,729

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

a. $\dfrac{125}{3888}$ **b.** $\dfrac{625}{648}$ **c.** $\dfrac{25}{7776}$ **d.** $\dfrac{3}{5}$

4. Soient A et B deux évènements indépendants d'une même univers Ω tels que $p(\mathrm{A}) = 0{,}3$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}65$. La probabilité de l'évènement B est :

a. 0,5 **b.** 0,35 **c.** 0,46 **d.** 0,7

Exercice 7 correction **Métropole septembre 2011**

Commun à tous les candidats

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à $0,12$.
Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.
On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.
On rappelle que pour tout réel positif t, $p(Y \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. Exprimer $p(Y \leqslant 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$.

2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?

3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?

4. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces moteurs est égale à $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$ où F est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.

(a) Calculer $F(t)$ en fonction de t.

(b) En déduire la valeur de d_m. On arrondira à 10^{-1}.

EXERCICE 8 correction **Nouvelle Calédonie 2011**

Commun à tous les candidats

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à $0,6$.

Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est $0,131$.

Dans les questions suivantes, on prendra $0,131$ pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à $0,52$.

3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.

5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.

(a) Quelle est la loi suivie par Y ?

(b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures

(c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

Exercice 9 correction Polynésie 2011

Enseignement obligatoire

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,
$p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

EXERCICE 10 correction **Nouvelle Calédonie mars 2011**

Commun à tous les candidats

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté. Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas et il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.

Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.

2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.

3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?

4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.

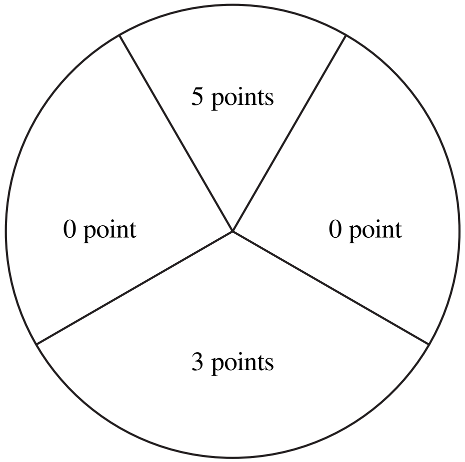
L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

Exercice 11 correction **Pondichéry 2011**

Commun à tous les candidats

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.

On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.

On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.

On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».

On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».

On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».

On note $p(\mathrm{A})$ la probabilité d'un évènement A.

(a) Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(\mathrm{G}_2) = \frac{5}{36}$.

On admettra dans la suite que $p(\mathrm{G}_3) = \frac{7}{36}$

(b) En déduire $p(\mathrm{P})$.

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.

Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.

Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

(a) Donner la loi de probabilité de X.

(b) Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

EXERCICE 12 correction **Polynésie septembre 2011**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2^{e} niveau et 100 vont au 3^{e} niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2^{e} niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau. »
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. (a) Montrer que la probabilité que la personne aille au 2^{e} niveau par l'escalier est égale à $\dfrac{1}{12}$.

(b) Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

(c) Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2^{e} niveau.

3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2^{e} niveau.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

(b) Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2^{e} niveau.

(c) En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2^{e} niveau ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un personne va au 2^{e} niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE 13 correction Amerique du Nord 2012

Commun à tous les candidats

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'évènement « le membre choisi est une femme »,
- T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.

2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.

Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

(a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

(b) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

(c) Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

(b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 14 correction Amerique du Sud 2012

Commun à tous les candidats

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.
Pour tout entier naturel non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.
Soit x_n la probabilité de R_n et y_n celle de $\overline{R_n}$.
La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à $0,7$.
On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées

- si le joueur réussit le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0,8$;
- si le joueur ne réussit pas le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0,7$.

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité)

(b) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On s'intéresse maintenant au cas général.

(a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$.

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 9x_n - 7$.

Dans ces deux questions, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

(a) Déterminer la nature de la suite (u_n).

(b) En déduire la limite de la suite (x_n).

EXERCICE 15 correction Asie 2012

Commun à tous les candidats

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k=7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.

Démontrer que $p=0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n>2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

(a) Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

(b) Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

(c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. (a) Justifier l'égalité : $p\left(\mathrm{Y}_k=5\right)=\dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

(b) Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k

2. On note $\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_k\right)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k

On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_k\right)$ est strictement positive.

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

Exercice 16 correction Liban 2012

Commun à tous les candidats.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'une U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.
On considère les évènements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question **4.b)** *où une valeur arrondie à* 10^{-2} *suffit.*

1. Calculer $P_{J_1}(B)$, probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement J_1 est réalisé.

Calculer de même la probabilité $P_{J_2}(B)$.

On admet dans la suite les résultats suivants :

$$P_{J_3}(B) = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad P_{J_4}(B) = \frac{1}{210}$$

2. Montrer que $P(B)$, probabilité de l'évènement B, vaut $\frac{1}{7}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?

4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.

(a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N ?

(b) Calculer la probabilité de l'évènement $(N = 3)$.

EXERCICE 17 correction **Métropole 2012**

Commun à tous les candidats

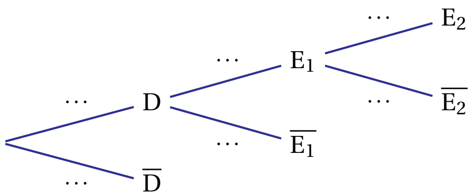
Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

On considère les évènements suivants :

- D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
- E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
- E_2 : « Le candidat est recruté ».

(a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



(b) Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

(c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».

Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

(b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

EXERCICE 18 correction **Métropole septembre 2012**

Commun à tous les candidats

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes*

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.

On prélève au hasard une boule de l'urne.

Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.

Si la première boule est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la boule tirée.

(a) Quelle est la probabilité que les boules tirées soient rouges ?

(b) Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.

Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher.

On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

La variable aléatoire X donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et p.

(a) Donner l'expression de p en fonction de n.

(b) Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1 - \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4$.

(c) Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à $0{,}999\,9$?

EXERCICE 19 correction Nouvelle Calédonie 2012

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Tous les résultats seront donnés sous la forme de fractions.

On dispose d'une urne U contenant trois boules blanches et deux boules rouges indiscernables au toucher.

Partie A

On considère l'expérience suivante : on tire successivement trois fois de suite une boule de l'urne U, en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
On appelle X le nombre de fois où on a obtenu une boule rouge.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois une boule rouge.

3. Déterminer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

Partie B

On procède maintenant à une nouvelle expérience :

- on tire une boule de l'urne U. Si elle est rouge on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule à nouveau ;
- si cette deuxième boule est rouge, on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule pour la troisième fois.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.

2. On appelle Y le nombre de boules rouges obtenues lors d'une expérience. La variable aléatoire Y prend donc la valeur 1 si la dernière boule est rouge et 0 sinon.

Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.

3. On appelle N le nombre de tirages effectués lors d'une expérience.

Déterminer la loi de probabilité de N et son espérance mathématique.

4. On appelle *proportion moyenne de boules rouges* le rapport de l'espérance du nombre de boules rouges obtenues sur l'espérance du nombre de tirages.

Montrer que la proportion moyenne de boules rouges dans l'expérience est la même que la proportion de boules rouges dans l'urne.

Exercice 20 correction **Polynésie 2012**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80].
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.

2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.

4. On suppose dans cette question que $x = 50$.

Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.
Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?

2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?

3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

Exercice 21 correction **Nouvelle Calédonie mars 2012**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1. **(a)** Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

(b) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{3}{8}$.

(c) Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

(a) Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

(b) Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

(c) On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».

À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\dfrac{1}{10}$?

EXERCICE 22 correction Amerique du Sud 2013

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :
M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. **(a)** Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.

(b) Calculer $P(C)$.

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X.

2. Déterminer $P(X = 35)$.

3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Partie C

1. On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \dfrac{X}{400}$, X étant la variable aléatoire de la **partie B**.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 23 correction Antilles 2013

Commun à tous les candidats

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \frac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n.
On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.
On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :

A l'évènement « l'étudiant répond A »,

B l'évènement « l'étudiant répond B »,

C l'évènement « l'étudiant répond C »,

R l'évènement « l'étudiant connait la réponse »,

$\overline{R}$ l'évènement contraire de R.

(a) Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

(b) Montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)$.

(c) Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

(a) Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.

(b) Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.

Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p.

En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.

(c) Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

(i) Donner les paramètres de cette loi normale.

(ii) Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 250)$ à 10^{-2} près.
On pourra s'aider de la table en annexe , qui donne une valeur approchée de $P(X \leqslant t)$ où X est la variable aléatoire de la question **2. c**.

Annexe

E12					=LOI.NORMALE($A12+E$1 ;240 ;RACINE(96) ;VRAI)						
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,330	0,334	0,338
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,360	0,364	0,368	0,372	0,376
4	237	0,380	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,480	0,484	0,488	0,492	0,496
7	240	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,533	0,537
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
10	243	0,620	0,624	0,628	0,632	0,636	0,640	0,643	0,647	0,651	0,655
11	244	0,658	0,662	0,666	0,670	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
12	245	0,695	0,699	0,702	**0,706**	0,709	0,713	0,716	0,720	0,723	0,726
13	246	0,730	0,733	0,737	0,740	0,743	0,746	0,750	0,753	0,756	0,759
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,810	0,813	0,815	0,818
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,860	0,863	0,865	0,867
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884	0,886	0,888
19	252	0,890	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936
22	255	0,937	0,938	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948
23	256	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958
24	257	0,959	0,960	0,960	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979
27	260	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984

Extrait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0,706 correspond à $P(X \leqslant 245{,}3)$.

EXERCICE 24 correction **Amerique du Nord 2013**

Commun à tous les candidats

Les parties A B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.

2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de $0,913$. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

EXERCICE 25 correction Antilles septembre 2013

Commun à tous les candidats

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 36$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,2$ et que Y suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0,05$.

1. Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$. Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur ?

2. Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre 5,88 mm et 6,12 mm. Le tableau donné ci-contre a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de k, la probabilité que Y soit inférieure ou égal à cette valeur.
Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

k	$p(Y \leqslant k)$
5,8	3,16712E − 05
5,82	0,000159109
5,84	0,000687138
5,86	0,00255513
5,88	0,008197536
5,9	0,022750132
5,92	0,054799292
5,94	0,11506967
5,96	0,211855399
5,98	0,344578258
6	0,5
6,02	0,655421742
6,04	0,788144601
6,06	0,88493033
6,08	0,945200708
6,1	0,977249868
6,12	0,991802464
6,14	0,99744487
6,16	0,999312862
6,18	0,999840891
6,2	0,999968329

3. On prélève une pièce au hasard. On appelle L l'évènement « la pièce est conforme pour la longueur » et D l'évènement « la pièce est conforme pour le diamètre ». On suppose que les évènements L et D sont indépendants.

(a) Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.

Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée (le résultat sera arrondi à 10^{-2}).

(b) Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2.

EXERCICE 26 correction **Antilles septembre 2013**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

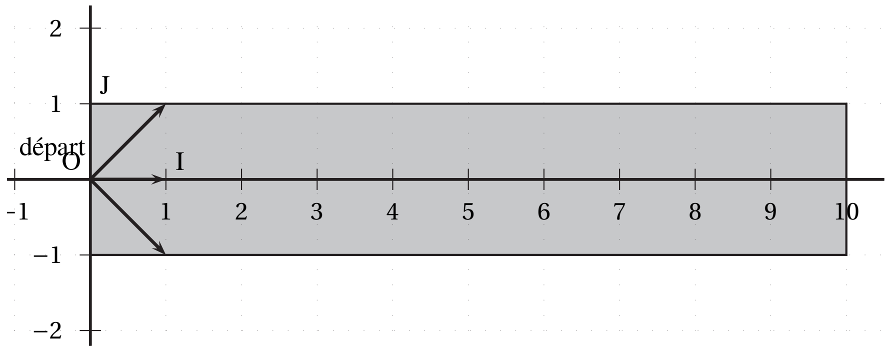
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O , I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées $(0 ; 0)$ au début de la traversée. On note $(x ; y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

```
x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que y ⩾ −1 et y ⩽ 1 et x ⩽ 9
        Affecter à n une valeur choisie au hasard entre −1, 0 et 1
        Affecter à y la valeur y + n
        Affecter à x la valeur x + 1
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » (x ; y)
```

1. On donne les couples suivants : $(-1 ; 1)$; $(10 ; 0)$; $(2 ; 4)$; $(10 ; 2)$.

Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x ; y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».

B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».

C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} & = & \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{array}\right.$$

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.
Donner une valeur approchée à $0,001$ près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-contre).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

EXERCICE 27 correction Asie 2013

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

2. **(a)** Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?

(b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à $0,88$.

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.

Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».
Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à $0,88$.
On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

EXERCICE 28 correction **Centres Étrangers 2013**

Commun à tous les candidats

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.
Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

Partie A

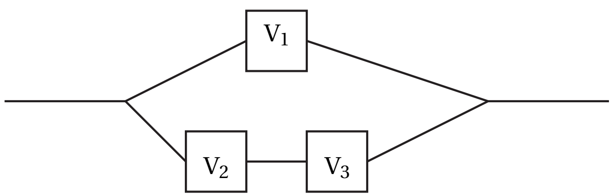
La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?

2. Calculer la probabilité, à $0{,}001$ près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6 000 heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-après.
Le circuit est en état de marche si V_1 est en état d arche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.



On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6 000 heures. On note :

- F_1 l'évènement : « la vanne V_1 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_2 l'évènement : « la vanne V_2 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_3 l'évènement : « la vanne V_3 est en état de marche après 6 000 heures ».
- E : l'évènement : « le circuit est en état de marche après 6 000 heures ».

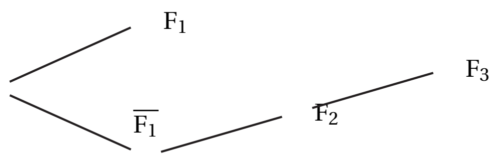
On admet que les évènements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à $0{,}3$.

1. L'arbre probabiliste ci-après représente une partie de la situation.

Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.

2. Démontrer que $P(E) = 0{,}363$.

3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.



Partie C

L'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1. Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F,

2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production, On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.

Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.

Au vu de ce résultat peut-on remettre en cause. au seuil de 95 %, l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.
L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients, La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Déterminer $P(760 \leqslant D \leqslant 840)$.

2. Déterminer $P(D \leqslant 880)$.

3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1 % de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

EXERCICE 29 correction **Liban 2013**

Commun à tous les candidats

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »
C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »

3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.

4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.

Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$.

Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

(a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

(b) Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].

(c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

Exercice 30 correction Pondichéry 2013

Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

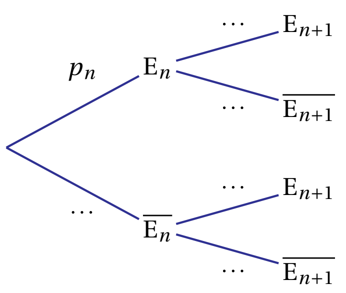
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n. On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. (a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



(b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

(c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

(d) En déduire la limite de la suite (p_n).

(e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$
	P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$
	J prend la valeur J +1
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

(a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

(b) On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

Exercice 31 correction Polynésie 2013

Commun à tous les candidats

Les 3 parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les évènements suivants :

C **:** « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

V **:** « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

J **:** « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H **:** « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

S **:** « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?

2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.

(a) Les évènements C et H sont-ils indépendants ?

(b) Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60.

2. Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage. Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

Partie 3

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque chanson stocké sur le lecteur MP3, associe sa durée exprimée en secondes et on établit que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

On pourra utiliser le tableau fourni en annexe dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

On écoute un morceau musical au hasard.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(180 \leqslant X \leqslant 220)$.

2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.

ANNEXE

X est une variable aléatoire normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

b	$P(X \leqslant b)$
140	0,001
150	0,006
160	0,023
170	0,067
180	0,159
190	0,309
200	0,500
210	0,691
220	0,841
230	0,933
240	0,977
250	0,994
260	0,999

EXERCICE 32 correction Métropole 2013

Commun à tous les candidats

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

(a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

(b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

(c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

(d) L'arbre choisi est un conifère.

Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

(a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?

On arrondira à 10^{-3}.

(c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?

On arrondira à 10^{-3}.

EXERCICE 33 correction **Métropole septembre 2013**

Commun à tous les candidats

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.

On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :

- A : « La pièce est produite par la machine A »
- B : « La pièce est produite par la machine B »
- D : « La pièce a un défaut ».
- $\overline{D}$, l'évènement contraire de l'évènement D.

(a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

(b) Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

(c) Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'évènement D est égale à $0,094$.

(d) On constate que la pièce choisie a un défaut.

Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2. On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes.

On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

(a) Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

(b) Dans cette question, on prend $n = 150$.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150}.

(c) Un test qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites.

Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

Exercice 34 correction Nouvelle Calédonie 2013

Commun à tous les candidats

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.
Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.

On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type $0,4$.

Montrer qu'une valeur approchée à 0,000 1 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4. On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.

2. On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartés et 99 % des billes correctes sont conservées.

On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'évènement : « la bille choisie est aux normes », A l'évènement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».

(a) Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.

(b) Calculer la probabilité de l'évènement A.

(c) Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.
On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,012 4.
On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.
On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?

2. Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?

4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

Annexe

	A	B
1	*d*	P(X < *d*)
2	0	3,06E-138
3	1	2,08E-112
4	2	2,75E-89
5	3	7,16E-69
6	4	3,67E-51
7	5	3,73E-36
8	6	7,62E-24
9	7	3,19E-14
10	8	2,87E-07
11	9	0,00620967
12	10	0,5
13	11	0,99379034
14	12	0,99999971
15	13	1
16	14	1
17	15	1
18	16	1
19	17	1
20	18	1
21	19	1
22	20	1
23	21	1
24	22	1
25		

Copie d'écran d'une feuille de calcul

EXERCICE 35 correction **Amerique du Nord 2014**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.
On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.

2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à $0,06$ la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.
On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$

(a) Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.

(b) Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$.

(c) En déduire la valeur attendue de σ'.

3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.

On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est $0,06$.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

(a) On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.

(b) Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème.
Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.
Estimer, par intervalle de confiance au seuil de $95\ \%$, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Exercice 36 correction **Amerique du Sud 2014**

Commun à tous les candidats

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de ballons de football. Cette entreprise propose deux tailles de ballons :

- une petite taille,
- une taille standard.

Les trois parties suivantes sont indépendantes.

Partie A

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).
En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[410\,;450]$ et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[68\,;70]$.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.

On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité

$P(410 \leqslant X \leqslant 450)$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.

On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ.

Déterminer la valeur de σ, au centième près, sachant que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, alors $P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta) = 0{,}97$ pour $\beta \approx 2{,}17$.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation. Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.

Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de l'entreprise ? Justifier la réponse. (On pourra utiliser l'intervalle de fluctuation)

Partie C

L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard. On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.
On considère les évènements :
A : « le ballon de football est de petite taille »,
B : « le ballon de football est de taille standard »,
C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et $\overline{C}$, l'évènement contraire de C.

1. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.

2. Calculer la probabilité que le ballon de football soit de petite taille et soit conforme à la règlementation.

3. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $0{,}962$.

4. Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation. Quelle est la probabilité que ce ballon soit de petite taille ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

EXERCICE 37 correction Antilles 2014

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près*

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1. Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.

On considère les évènements suivants :

- J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
- C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

(a) Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

(b) Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

(c) Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est $0,695$.

(d) Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

2. La masse d'une huître peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

(a) Donner la probabilité que l'huître prélevée dans la production de l'ostréiculteur ait une masse comprise entre 87 g et 89 g.

(b) Donner $P(X \geqslant 91)$.

Partie B

Cet ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g.
Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considèrera comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise.
Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

1. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.

Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F.

2. Que peut penser le restaurateur de l'affirmation de l'ostréiculteur ?

Exercice 38 correction **Antilles septembre 2014**

Commun à tous les candidats

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.

2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,876 3.

3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
Calculer la valeur exacte de λ.

2. On prendra ici $\lambda = 0,1733$.
Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. Soit $X = \frac{J-358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?

2. On sait que $P(J \leqslant 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

EXERCICE 39 correction Asie 2014

Commun à tous les candidats

Le taux d'hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne $\mu = 45,5$ et d'écart-type σ.

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-45,5}{\sigma}$.

1. (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?

(b) Déterminer $P(X \leqslant \mu)$.

2. En prenant $\sigma = 3,8$, déterminer $P(37,9 \leqslant X \leqslant 53,1)$. Arrondir le résultat au centième.

Partie B

Une certaine maladie V est présente dans la population française avec la fréquence 1 %. On sait d'autre part que 30 % de la population française a plus de 50 ans, et que 90 % des porteurs de la maladie V dans la population française ont plus de 50 ans.

On choisit au hasard un individu dans la population française.
On note α l'unique réel tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,995$, où X est la variable aléatoire définie au début de l'exercice. On ne cherchera pas à calculer α.
On définit les évènements :

M « l'individu est porteur de la maladie V » ;

S « l'individu a plus de 50 ans » ;

H « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

Ainsi $P(M) = 0,01$, $P_M(S) = 0,9$ et $P(H) = P(X > \alpha)$.
D'autre part, une étude statistique a révélé que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V.

1. (a) Déterminer $P(M \cap S)$.

(b) On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est égale à $0,03$.

2. (a) Calculer la probabilité $P(H)$.

(b) L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V. Arrondir au millième.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie V.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de la maladie V dans les échantillons de taille 1 000, prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millième.

2. Dans un échantillon aléatoire de 1 000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V.

Au regard de ce résultat, peut-on décider, au seuil de 95 %, que le gène a une influence sur la maladie ?

EXERCICE 40 correction **Centres Étrangers 2014**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,150 **c.** 0,462 **d.** 0,700

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à $0,3$. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,900 **b.** 0,092 **c.** 0,002 **d.** 0,267

Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \dfrac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,250 **c.** 0,472 **d.** 0,528

Question 4

Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 200 g.

La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à $0,954$.

La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième :

a. 0,16 **b.** 0,32 **c.** 0,84 **d.** 0,48

EXERCICE 41 correction **Liban 2014**

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans $99,4\%$ des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5% des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.

2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.

3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $0,0192$

4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée.
Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit le loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.

2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?

3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de $0,9$? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ'.
On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de $0,05$.
On note Z' la variable aléatoire égale à $\dfrac{T' - 15}{\sigma'}$

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?

2. Déterminer une valeur approchée à $0,01$ près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T'.

EXERCICE 42 correction **Métropole 2014**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

(a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

(b) Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

(c) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaine de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

(a) Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.

(b) Déterminer l'entier positif h tel que $P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1 000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1 000 tirages successifs avec remise.

Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.

Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

EXERCICE 43 correction **Métropole 2015**

Commun à tous les candidats

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} *près.*

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.

On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

(a) Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.

Démontrer que la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

(b) Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

(c) Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

(d) Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.

(e) Calculer la probabilité de l'évènement $(X > 18)$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

(a) Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.

(b) Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.

Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.

Ses doutes sont-ils justifiés ?

EXERCICE 44 correction **Métropole septembre 2014**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

(a) Déterminer la valeur de λ.

(b) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

(c) Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

(a) Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

(b) Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.

Calculer la probabilité p_1 de l'évènement $\{Z \leqslant 71\}$ à l'aide de la calculatrice.

(c) On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'évènement $\{Z \leqslant 70\}$.

Le restaurant a reçu 81 réservations.

Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

EXERCICE 45 correction **Nouvelle Calédonie 2014**

Commun à tous les candidats

*Les trois parties **A, B** et **C** sont indépendantes*

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,003$.
On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.
On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

2. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.

Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.
On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(110\ ;\ \sigma^2\right)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle [104 ; 116].
Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'évènement « la glace est commercialisable » soit égale à $0,98$.

Partie C

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.
En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.

Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?

Exercice 46 correction Nouvelle Calédonie mars 2014

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\ 1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\ +\infty[$ par

$$H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?

2. Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. À l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x, $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\,;\ +\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0\,;\ +\infty[$.

5. Démontrer alors le théorème énoncé.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.
60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.
Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'évènement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?

2. Montrer que $p(B \cap D) = 0{,}0224$.

3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

Partie C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres).
On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1{,}0424$.

1. Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ? On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice.

Contenance x (en mL)	95	96	97	98	99
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,000 00	0,000 04	0,001 65	0,025 06	0,163 68

Contenance x (en mL)	100	101	102	103	104
$P(X \leqslant x)$ (arrondi à 10^{-5})	0,5	0,836 32	0,974 94	0,998 35	0,999 96

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0{,}05$.

2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

(a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?

(b) Vérifier que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

(c) Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

EXERCICE 47 correction Polynésie 2014

Commun à tous les candidats

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.

Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.

Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à $0,6$.

Affirmation n° 1 :

« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.

Affirmation n° 2 :

« Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. »

3. On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,7$.

Affirmation n° 3 :

« La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est $0,7$ environ. »

Affirmation n° 4 :

« Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes. »

4. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+.

On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.

On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.

Affirmation n° 5 :

« On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population. »

EXERCICE 48 correction **Pondichéry 2014**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.

Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2. **(a)** Déterminer $P(X \geqslant 3)$.

(b) Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.

(c) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

(d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

3. **Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}**

L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.

Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

Exercice 49 correction AmeriqueNordS2015-exo-3.tex

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'évènement M : « la tablette est mise sur le marché ».

2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet évènement atteigne 0,97.

Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'évènement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à $0,97$.

Partie B Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.
L'entreprise a trois fournisseurs différents :
le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.
Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.
On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'évènement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'évènement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.

2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes.

Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

EXERCICE 50 correction Antilles 2015

Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right).$$

2. En déduire que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe** .

1. Sur le graphique de l'annexe (à rendre avec la copie) :

(a) Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

(b) Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

2. On suppose que $E(X) = 2$.

(a) Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

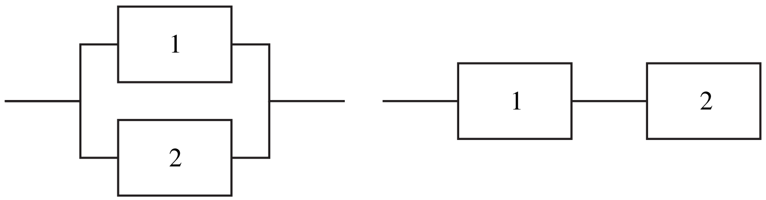
(b) Calculer la valeur de λ.

(c) Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à $0,01$ près.
Interpréter ce résultat.

(d) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que
$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE

Exercice 51 correction **Asie 2015**

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. Les probabilités seront arrondies au millième.

Partie A

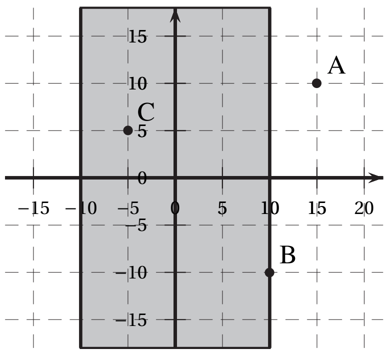
Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à $0,8$.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.

2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?

Partie B

Entre deux phases du concours, pour se perfectionner, le concurrent travaille sa précision latérale sur une autre cible d'entraînement, représentée ci-contre. Pour cela, il tire des flèches pour essayer d'atteindre une bande verticale, de largeur 20 cm (en grisé sur la figure), le plus près possible de la ligne verticale centrale.



On munit le plan contenant la bande verticale d'un repère : la ligne centrale visée est l'axe des ordonnées.

On note X la variable aléatoire qui, à toute flèche tirée atteignant ce plan, associe l'abscisse de son point d'impact.

Ainsi, par exemple :

- si la flèche atteint le point A, le tireur a raté la bande, et X prend la valeur 15 ;
- si elle atteint le point B, l'impact est à la limite de la bande, et X prend la valeur 10 ;
- si elle atteint le point C, l'impact est dans la bande et X prend la valeur -5.

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Lorsque la flèche atteint le plan, déterminer la probabilité que son point d'impact soit situé hors de la bande grisée.

2. Comment modifier les bords de la bande grisée pour faire en sorte que, lorsque la flèche atteint le plan, son point d'impact soit situé à l'intérieur de la bande avec une probabilité égale à $0,6$?

Partie C

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

1. Quelle est la probabilité que le panneau fonctionne au moins pendant 2 000 heures ?

2. *Restitution organisée des connaissances*

Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $E(T) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt$.

(a) On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$.

Démontrer que la fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie pour tout réel t par : $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

(b) En déduire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

Quelle est l'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents ?

Exercice 52 correction Centres Étrangers 2015

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?

On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.

2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*

Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin :

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme* ;
- 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux ;
- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- p la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux ;
- H l'évènement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* » ;
- D l'évènement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p.

Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?

3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.

Exercice 53 correction Liban 2015

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2. **(a)** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

(b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.

4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A. *estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?

5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est $0,4$.

L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.

Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

EXERCICE 54 correction Polynésie 2015

Commun à tous les candidats

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.
Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?

2. **(a)** Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.

(b) De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de $1,70$ m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

EXERCICE 55 correction Polynésie septembre 2015

Commun à tous les candidats

Partie A

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\text{ng.mL}^{-1}\right)$, d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.

Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL $^{-1}$.

2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL $^{-1}$ et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL $^{-1}$.

On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL $^{-1}$ chez une personne atteinte par la maladie étudiée.

On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

Préciser la valeur de μ' et déterminer la valeur de σ'.

Partie B

Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL $^{-1}$.
Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- M l'évènement « le patient est atteint par la maladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

On admet que :

- 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;
- 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1. Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de $0,325$.

2. Calculer $P_{\overline{D}}(M)$. Interpréter ce résultat.

3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez- vous ?

Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.
Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.
Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.
On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun.
Le dépistage se révèle positif pour 74 % d'entre elles.
Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?

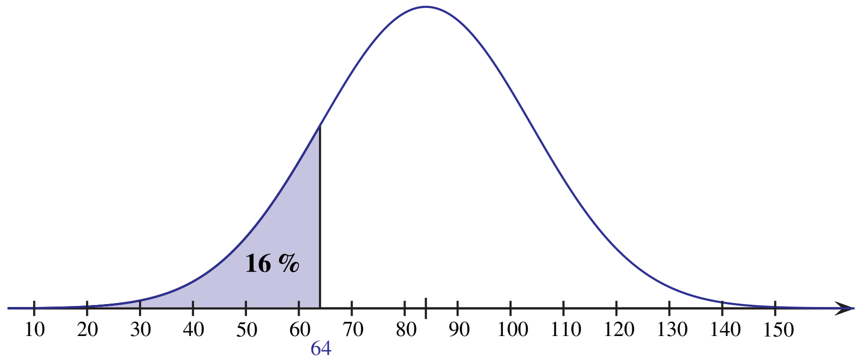
EXERCICE 56 correction **Pondichéry 2015**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. (a) En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

(b) Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X-84}{\sigma}$.

(a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?

(b) Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

(c) En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.

(a) Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.

(b) Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).

(a) Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.

(b) Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.

On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

(a) Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

(b) Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

Exercice 57 correction **Amerique du Nord 2016**

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

2. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.

A-t-il raison ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$.

Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.

2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.

Sachant que $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

(a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

(b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Exercice 58 correction AmeriqueSudS2016-exo-5.tex

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique.
Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ :

1. Déterminer l'arrondi à 10^{-4} de σ sachant que le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2{,}4$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.

3. Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur exacte de λ, sachant que le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0{,}00127$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.

3. **(a)** Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a :
$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.

(b) Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(D \geqslant 48)$ et $(T \geqslant 48)$ sont indépendants.
Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans. Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$? Justifier la réponse.

Exercice 59 correction Antilles 2016

Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

(a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.

(b) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.

(c) L'ampoule tirée est sans défaut.
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$.

(a) Montrer que $P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}$.

(b) Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a

$$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t + a) = P(T \geqslant a).$$

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

(a) Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

(b) Calculer la probabilité $P(T \geqslant 5000)$.

(c) Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

Exercice 60 correction Asie 2016

Commun à tous les candidats

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.
Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises, et dans la partie B leur conditionnement.

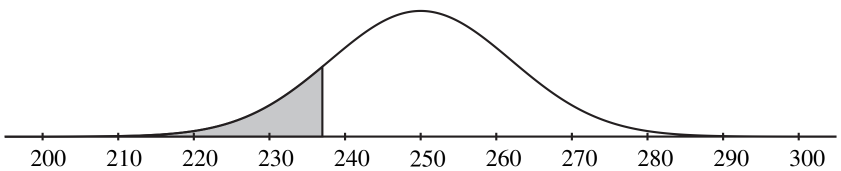
Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.
Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.
La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1. On donne $P(X \leqslant 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

(a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

(b) Démontrer que $P\left(Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.

(c) En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.

(a) Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n ; 250 + n]$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

(b) On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme,se trouve dans l'intervalle $[230 ; m]$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

EXERCICE 61 correction Centres Étrangers 2016

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

(a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

(b) Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

$0,92$ $\quad 0,93$ $\quad 0,94$ $\quad 0,95.$

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

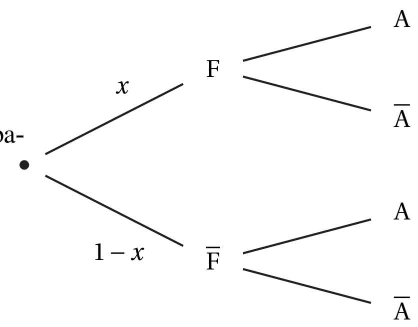
Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

2. On pose $x = P(F)$.

(a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

(b) En déduire une égalité vérifiée par x



3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

EXERCICE 62 correction **Liban 2016**

Commun à tous les candidats

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?

2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite.
Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est $0,24$;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est $0,235$.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

Exercice 63 correction **Métropole 2016**

Commun à tous les candidats

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées. La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. On note :

A l'évènement « le composant provient de la chaîne A »

B l'évènement « le composant provient de la chaîne B »

S l'évènement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'évènement S est $\mathrm{P(S)} = 0,89$.

2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A. Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de $0,92$.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

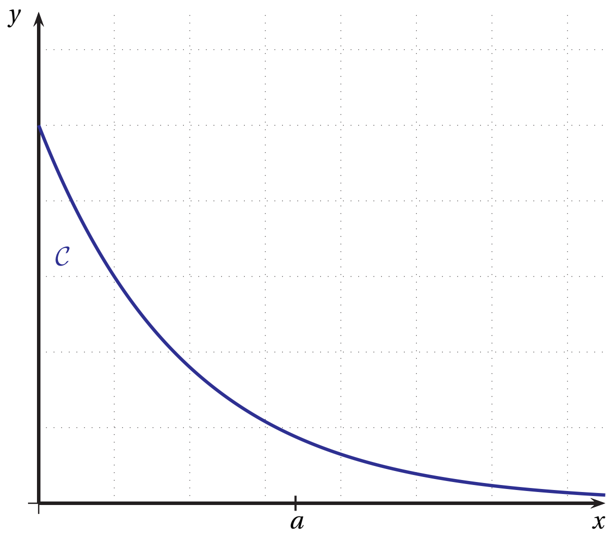
2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de $0,02$?

Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif). On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.
- pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, $p(\mathrm{T} \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



(a) Interpréter graphiquement $\mathrm{P(T} \leqslant a)$ où $a > 0$.

(b) Montrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $\mathrm{P(T} \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

(c) En déduire que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{P(T} \leqslant t) = 1$.

2. On suppose que $\mathrm{P(T} \leqslant 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

(a) On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

(b) On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans. Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

(c) Donner l'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près. Interpréter ce résultat.

Exercice 64 correction Métropole septembre 2016

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :       a, b, d, s sont des entiers
                  i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                  | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                  | entre 1 et 6
                  | Si d ⩽ 2
                  |     | alors a prend la valeur 1 − a
                  |     | sinon Si d ⩽ 4
                  |     |           | alors b prend la valeur 1 − b
                  |     |         FinSi
                  | FinSi
                  | s prend la valeur a + b
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $n=3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation	X	X			X
1[er] passage boucle Pour					
2[e] passage boucle Pour					
3[e] passage boucle Pour					

(b) Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

2. Pour tout entier naturel n, on note :

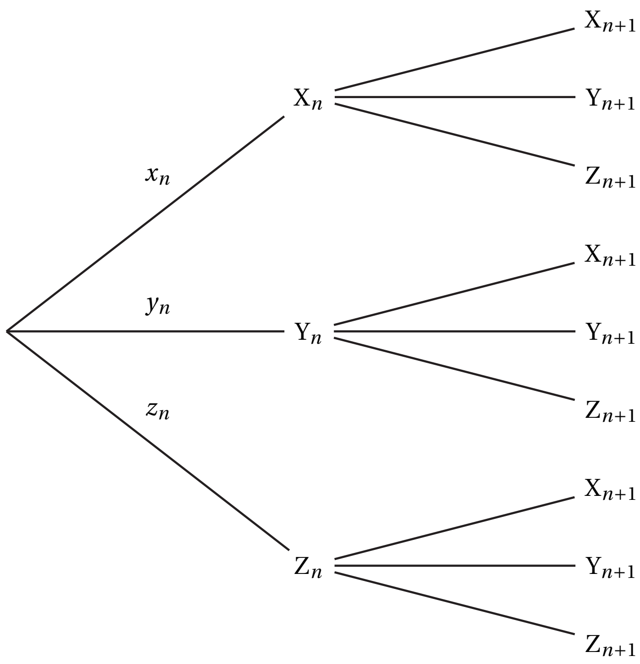
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

(a) Donner les probabilités x_0, y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

(b) Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

(c) Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



(d) Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

(e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}$.

(f) On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$.

Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(g) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

Interpréter le résultat.

Exercice 65 correction **Métropole septembre 2016**

Commun à tous les candidats

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.
En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.
On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :
R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,
D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

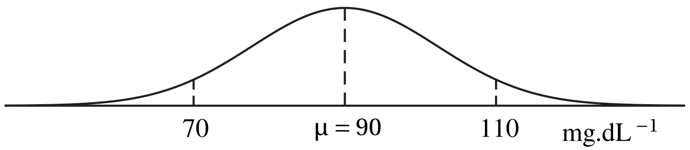
1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

2. (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.

(b) La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL^{-1}. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg. dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1}. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.rdL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.
On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à $0,052$.
On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1}, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



1. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?

2. Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.

3. Dans cette question, on prend $\sigma = 12$. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.
Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

1. À l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %, estimer la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans.

2. Quel doit être le nombre minimal de personnes à interroger si l'on veut obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 ?

Exercice 66 correction **Nouvelle Calédonie novembre 2016**

Commun à tous les candidats

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.
Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. **(a)** Pour tout nombre réel t positif, déterminer une relation entre

$P(X \leqslant 125 - t)$ et $P(X \geqslant 125 + t)$.

(b) On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture. En utilisant la relation précédente, déterminer

$P(121 \leqslant X \leqslant 129)$.

2. Déterminer une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que

$P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\sigma = 2$.

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

(a) On choisit au hasard un pot de confiture de la production. Déterminer la probabilité que ce pot soit conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

(b) On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

4. On admet que la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un pot de confiture soit conforme est $0,988$.

On choisit au hasard 900 pots dans la production. On constate que 871 de ces pots sont conformes. Au seuil de 95 % peut-on rejeter l'hypothèse suivante : « La machine est bien réglée » ?

EXERCICE 67 correction **Nouvelle Calédonie 2017**

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Des étudiants d'une université se préparent à passer un examen pour lequel quatre thèmes (A, B, C et D) sont au programme.

Partie A

Sur les 34 sujets de l'examen déjà posés, 22 portaient sur le thème A.
Peut-on rejeter au seuil de 95% l'affirmation suivante : « il y a une chance sur deux que le thème A soit évalué le jour de l'examen » ?

Partie B

Le thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maîtriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème.
Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A :

- 30% des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
- $\frac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

On sait de plus que 20% des étudiants participent au stage.

Lors des résultats de l'examen, un étudiant s'exclame : « Je n'ai pas du tout traité le thème A ».
Quelle est la probabilité que cet étudiant ait suivi le stage ? On arrondira le résultat à $0,001$ près.

Partie C

On suppose que la variable aléatoire T, associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance $\mu = 225$ et d'écart-type σ où $\sigma > 0$.
La probabilité qu'un étudiant finisse son examen en moins de 235 minutes est de $0,98$.
Déterminer une valeur approchée de σ à $0,1$ près.
(On pourra, par exemple, introduire la variable aléatoire $Z = \frac{T-225}{\sigma}$).

Exercice 68 correction Polynésie 2016

Commun à tous les candidats

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.
Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.
L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ $0,451$.

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à $0,95$? Arrondir ce temps à la minute près.

3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est $0,494$.

2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.
L' astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

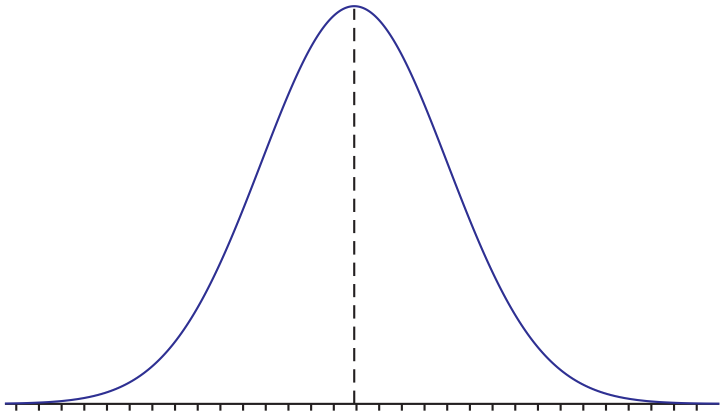
EXERCICE 69 correction **Pondichéry 2016**

Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ.
La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $p(T \geqslant 22) = 0,023$.

En exploitant cette information :

(a) hachurer sur le graphique donné un annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à $0,023$;

(b) déterminer $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est $4,1$.

2. On choisit un jeune en France au hasard.

Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.

Arrondir au centième.

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des Œuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.

Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole $(\mathcal{P})$ suivant :

> On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.
> Pour chaque jeune de cet échantillon :
>
> - le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
> - l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;
>
> ■ si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
> ■ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
> ■ si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

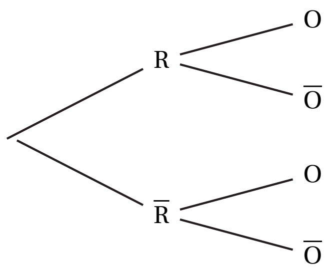
1. *Calculs de probabilités*

On choisit aléatoirement un jeune faisant partie du protocole $(\mathcal{P})$.

On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,

O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

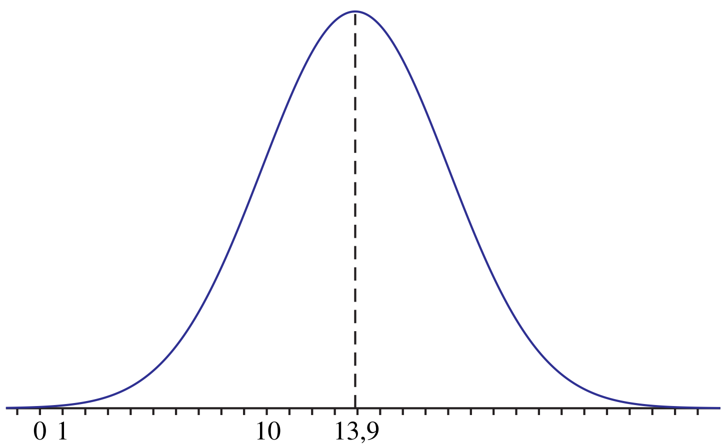
2. *Intervalle de confiance*

(a) À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole $(\mathcal{P})$. Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ».

Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

(b) Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

Annexe



Correction

Exercice 1 énoncé Amerique du Nord 2011

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Puisque tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis la probabilité est égale à :

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{25!}{2!\times 23!}} = \frac{3}{25\times 12} = \frac{1}{100} = 0,01\,.$$

Partie B

1. On a $p(X>5) = 1 - p(X \leqslant 5)$. Donc :

$p(X>5) = 0,4 \iff 1 - p(X \leqslant 5) = 0,4 \iff 0,6 = p(X \leqslant 5) \iff 0,6 = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x}\,dx \iff 0,6 = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5 \iff 0,6 = -e^{-5\lambda} + 1 \iff e^{-5\lambda} = 0,4 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $-5\lambda = \ln 0,4 \iff \lambda = \dfrac{\ln 0,4}{-5}$.

Or $\dfrac{\ln 0,4}{-5} \approx 0,183$ à 10^{-3} près.

2. Il faut calculer : $p_{(X>3)}(X>5) = \dfrac{p(X>5)}{p(X>3)} = \dfrac{e^{-5\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-2\lambda} = e^{-0,36} \approx 0,698$.

3. (a) On fait 10 fois le même tirage de façon indépendante. On a donc une loi binomiale de paramètre 10 et $0,4$. La probabilité cherché est donc le complément à 1 de la probabilité de n'avoir aucun ordinateur en état de marche soit :

$1-(0,6)^{10} \approx 0,994$ à 10^{-3} près.

(b) Avec n ordinateurs on a à résoudre l'inéquation :

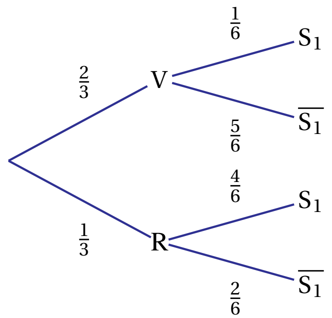
$1-0,6^n \geqslant 0,999 \iff 0,001 \geqslant 0,6^n \iff \ln 0,001 \geqslant n\ln 0,6 \iff$
$n \geqslant \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6}$. Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,6} \approx 13,5$.

Le nombre minimal est donc 14 ordinateurs.

Exercice 2 énoncé **Amerique du Sud 2011**

Commun à tous les candidats

1. (a) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



(b) D'après la loi des probabilités totales on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{S}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{S}_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{18} + \frac{4}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

2. (a) Le tirage d'un dé vert a une probabilité de $\frac{2}{3}$ et celui du dé rouge de $\frac{1}{3}$.

Dans chaque cas le lancer n fois de suite est un schéma de Bernouilli de paramètres n et $\frac{1}{6}$ pour le dé vert et de n et $\frac{4}{6}$ pour le dé rouge. La probabilité de tirer n 6 est donc :

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_n) = \overbrace{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}^{\text{dé vert}} + \overbrace{\frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^n}^{\text{dé rouge}} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) D'après la question précédente la probabilité d'avoir tiré le dé vert puis obtenu n fois 6 est égale à $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$ et la probabilité d'avoir tiré n fois de suite le 6 est égale à $\mathrm{P}(\mathrm{S}_n)$.

On a donc $p_n = p_{\text{tirer } n\, 6}(\text{tirer le dé rouge}) = \dfrac{\text{tirer } n\, 6 \text{ et tirer le dé rouge}}{\text{tirer } n\, 6} =$

$$\frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \text{ en multipliant par } 3 \times 3^n, \quad p_n = \frac{2^n}{2 \times \frac{1}{2^n} + 2^n} =$$

$$\frac{2^n}{2^{1-n} + 2^n} = \frac{1}{2^{1-2n} + 1} = \frac{1}{2 \times 2^{-2n} + 1} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2^{2n}} + 1} = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$

(c) On a $p_n \geqslant 0,999 \iff \dfrac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \geqslant 0,999 \iff 1 \geqslant 0,999\left[2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1\right] \iff 1 \geqslant 1,998\left(\frac{1}{4}\right)^n + 0,999 \iff 0,001 \dfrac{1,998}{4^n} \iff 1 \geqslant \dfrac{1\,998}{4^n} \iff 4^n > 1\,998 \iff n \ln 4 \geqslant \ln 1\,998 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 1\,998}{\ln 4} \approx 5,4$

Conclusion : $n_0 = 6$.

EXERCICE 3 énoncé Asie 2011

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Rappel :

$$\mathrm{F}(t)=p(\mathrm{X}\leqslant t)=p([0\ ;\ t])=\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

(a) $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})=\dfrac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{p(\mathrm{B})}$ (où A et B sont deux évènements tels que $p(\mathrm{B})\neq 0$) ;

(b) $p\left(\overline{\mathrm{A}}\right)=1-p(\mathrm{A})$ (où A est un évènement) ;

(c) $p([a\ ;\ b])=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a\leqslant b$).

- Montrons que $p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s])=\dfrac{\mathrm{F}(t+s)-\mathrm{F}(t)}{1-\mathrm{F}(t)}$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s])=\frac{p([t\ ;\ +\infty[\cap[t\ ;\ t+s])}{p([t\ ;\ +\infty[)}$$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s])=\frac{p([t\ ;\ t+s])}{p([t\ ;\ +\infty[)}$$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s])=\frac{p([0\ ;\ t+s])-p([0\ ;\ t[)}{1-p([0;t[)}$$

or $p([a\ ;\ b])=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=p([0;b])-p([0;a])=p(]a;b])$ donc que l'intervalle soit fermé ou ouvert, la probabilité ne change pas.

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s])=\frac{p([0\ ;\ t+s])-p([0\ ;\ t])}{1-p([0;t])}$$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s])=\frac{\mathrm{F}(t+s)-\mathrm{F}(t)}{1-\mathrm{F}(t)}$$

- Enfin montrons que : $p_{[t\ ;\ +\infty]}([t\ ;\ t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

$$\mathrm{F}(t)=[\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^t$$
$$\mathrm{F}(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

donc

$$p_{[t\ ;\ +\infty])}([t\ ;\ t+s])=\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}-(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

donc

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s])=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}-\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s])=1-\mathrm{e}^{-\lambda s}$$

$$p_{[t\ ;\ +\infty[}([t\ ;\ t+s])=p([0\ ;\ s])$$

$p_{[t\ ;\ +\infty]}([t\ ;\ t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda=0,2$.

2. La probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $p(]2\ ;\ +\infty[)=1-p([0\ ;\ 2])=1-\mathrm{F}(2)$
$p(]2\ ;\ +\infty[)=\mathrm{e}^{-0,2\times 2}=\mathrm{e}^{-0,4}$.

3. « Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans »
on cherche

$$p_{[2\ ;\ +\infty[}([6;+\infty[)=1-p_{[2\ ;\ +\infty[}([0;6])$$

$$p_{[2\ ;\ +\infty[}([6;+\infty[)=1-p_{[2\ ;\ +\infty[}([0;6])$$

$$p_{[2\ ;\ +\infty[}([6;+\infty[)=1-p_{[2\ ;\ +\infty[}([2;6])$$

$$p_{[2\ ;\ +\infty[}([6;+\infty[)=1-p_{[2\ ;\ +\infty[}([2;2+4])=1-p([0;4])=\mathrm{e}^{-0,2\times 4}=\mathrm{e}^{-0,8}$$

(on a utilisé la R.O.C. avec $t=2$ et $s=4$)

4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.

Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.

(a) La probabilité que pour un capteur, il ne tombe pas en panne au cours des deux premières années c'est $p=\mathrm{e}^{-0,4}$ (ceci est la probabilité qu'un capteur fonctionne encore après deux ans), or les 10 capteurs fonctionnent de manière indépendante, donc le nombre de capteurs encore en marche au bout de deux ans suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10\ ;\ \mathrm{e}^{-0,4}\right)$, la probabilité qu'il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au bout de 2 ans est
$\binom{10}{2}\times(\mathrm{e}^{-0,4})^2\times(1-\mathrm{e}^{-0,4})^8\simeq 0,000\,035$.

(b) La probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années, donc il y ait au moins un capteur en marche au bout de 2 ans, notons là $p(\mathrm{B})$.

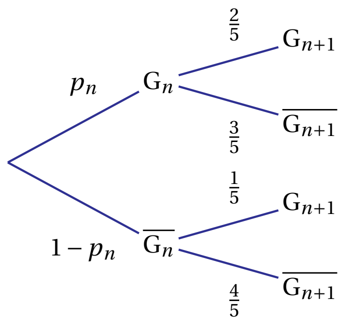
$\overline{\mathrm{B}}$ « tous les capteurs tombent en panne au cours des deux premières années », de probabilité $(1-\mathrm{e}^{-0,4})^{10}$
donc la probabilité demandée est $(1-(1-\mathrm{e}^{-0,4})^{10}) \simeq 0,999\,985$.

Exercice 4 énoncé **Antilles septembre 2011**

Commun à tous les candidats

Partie A :

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :

$p_{n+1} = p\left(G_{n+1}\right) = p\left(G_n \cap G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{1}{5}\left(1-p_n\right) = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5}$.

3. (a) Pour tout n entier naturel non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{4} =$ (d'après la question précédente) $\dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}p_n - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{5}u_n$.

L'égalité $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n$ montre que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

(b) On sait que pour tout naturel supérieur ou égal à 1 : $u_n = u_1 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} =$

$u_n = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Comme $u_n = p_n - \dfrac{1}{4} \iff p_n = u_n + \dfrac{1}{4}$, on a finalement :

$$p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}.$$

(c) Comme $\left|\dfrac{1}{5}\right| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$. Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{4}$.

Au bout d'un très grand nombre de parties, la probabilité de gagner sera proche d'une chance sur quatre.

Partie B :

1. (a) Les épreuves étant identiques et indépendantes, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X est une loi binomiale avec $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

(b) On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \dbinom{10}{0} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^0 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \dfrac{3^{10}}{4^{10}} \approx 0,943 \approx 0,94$, à 10^{-2} près.

(c) On a $E(X) = n \times p = 10 \times \dfrac{1}{4} = 2,5$.

2. (a) Le joueur doit payer 30 € pour les 10 parties et récupérera en moyenne $2,5 \times 8 = 20$ €. (espérance de gagner 2,5 parties sur 10).

En moyenne les 10 parties coûteront $30 - 20 = 10$ €, soit 1 € par partie. Le jeu est donc désavantageux.

(b) Pour réaliser un bénéfice supérieur à 40 €, vu la mise de 30 €, il faut gagner plus de 70 €. Comme $8 \times 8 = 64$, il faut donc gagner 9 parties au moins sur 10 ($9 \times 8 = 72$).

On a $p(X = 9) + p(X = 10) = \dbinom{10}{9}\left(\dfrac{1}{4}\right)^9\left(\dfrac{3}{4}\right) + \dbinom{10}{10}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}\left(\dfrac{3}{4}\right)^0 = 10 \times \dfrac{3}{4^{10}} + \dfrac{1}{4^{10}} = \dfrac{31}{4^{10}} \approx 0,000\,029\,56 \approx 0,000\,03$.

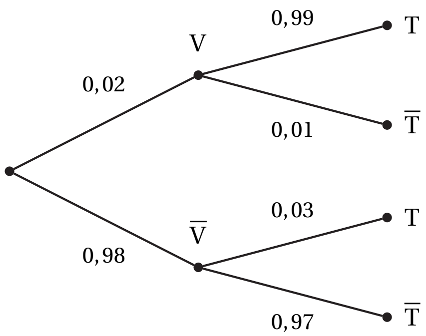
EXERCICE 5 énoncé Métropole 2011

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. (a) D'après l'énoncé, on a : $P(V)0,02$; $P_V(T) = 0,99$; $P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0,97$.

Traduisons la situation par un arbre de probabilités :



(b) $P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V) = 0,99 \times 0,02 = 0,0198$

2. Par conséquent : $P(V) = P(V \cap T) + P\left(V \cap \overline{T}\right) = P_T(V) \times p(T) + P_{\overline{V}}(T) \times P\left(\overline{V}\right)$ (formule des probabilités conditionnelles).
Alors : $P(T) = 0,99 \times 0,02 + 0,03 \times 0,98 = 0,0492$.

3. (a) Il faut calculer $P_T(V)$. Or : $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4024$, soit environ 40%.
Il n'y a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée », sachant que le test est positif.

(b) La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est $P_{(T)}\left(\overline{V}\right) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,97 \times 0,98}{1 - 0,0492} \approx 0,9997$, c'est-à-dire environ 99,97 %.

PARTIE B

1. On a répétition de 10 épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,02)$.

2. Pour tout k, ($0 \leqslant k \leqslant 10$), on a $P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,02^k \times (1 - 0,02)^{10-k}$.

Alors : $P(X \geqslant 2) = 1 - (P(X < 2)) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left[0,98^{10} + 10 \times 0,02 \times 0,98^9\right]$

$P(X \geqslant 2) \approx 0,0162$

Exercice 6 énoncé **Antilles 2011**

Commun à tous les candidats

1. L'évènement « le tireur atteint la cible au moins une fois » est le contraire de l'évènement « le tireur rate toujours sa cible ». On a donc $p_n = 1 - 0,7^n$. Par conséquent :

$$p_n \geqslant 0,9 \iff 1 - 0,7^n \geqslant 0,9 \iff 0,1 \geqslant 0,7^n \iff \ln(0,1) \geqslant n\ln(0,7) \iff$$

$\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,7)} \leqslant n.$

Or $\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,7)} \simeq 6,4$. La plus petite valeur possible de n est donc 7 : **réponse b)**.

2. La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de $10\,000$ heures est : $p(\mathrm{X} > 10000) = 1 - p(\mathrm{X} \leqslant 10000) = 1 - \int_0^{10000} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{10000} = e^{-0,0002 \times 10000} = e^{-2} \simeq 0,135$: **réponse b)**.

3. Le nombre X de fois où le joueur perd au cours d'une partie suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,,\,\frac{1}{6})$, donc : $p(\mathrm{X} = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{125}{3\,888}$: **réponse a)**.

4. A et B sont indépendants, donc $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A})p(\mathrm{B})$.

L'égalité $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ devient donc :

$0,65 = 0,3 + p(\mathrm{B}) - 0,3p(\mathrm{B})$, qui équivaut à $0,35 = 0,7p(\mathrm{B})$, d'où $p(\mathrm{B}) = 0,5$: **réponse a)**.

EXERCICE 7 énoncé Métropole septembre 2011

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La loi suivie par la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de moteurs tombant en panne est une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,12$.

On a $p(\mathrm{X} = 2) = \binom{20}{2} \times 0,12^2 \times (1 - 0,12)^{20-2} = 190 \times 0,12^2 \times 0,88^8 \approx 0,27403 \approx 0,274$ à 10^{-3} près.

2. On a $p(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0,88^{20} \approx 0,9224 \approx 0,922$ à 10^{-3} près.

Partie B

1. On a $p(\mathrm{Y} \leqslant 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^1 = -e^{-\lambda} + 1 = 1 - e^{-\lambda} = 0,12 \iff e^{-\lambda} = 0,88 \iff$ $-\lambda = \ln 0,88$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff -\lambda \approx -0,1278 \iff$ $\lambda \approx 0,128$ à 10^{-3} près.

2. On a $p(\mathrm{Y} > 3) = 1 - p(\mathrm{Y} \leqslant 3) = 1 - \int_0^3 0,128 e^{-0,128x}\,dx = 1 - \left[-e^{-0,128x}\right]_0^3 = 1 - \left(-e^{-0,128\times 3} - 1\right) = e^{-0,384} \approx 0,6811 \approx 0,681$ à 10^{-3} près.

3. On a $p_{\mathrm{Y}>1}(\mathrm{Y} > 4) = p_{\mathrm{Y}>1}(\mathrm{Y} > 1+3) = p(\mathrm{Y} > 3)$ puisqu'on a une loi exponentielle sans vieillissement, soit environ 0,681.

4. (a) Posons $\left\{\begin{array}{lllllll} u'(x) & = & \lambda e^{-\lambda x} & & v(x) & = & x \\ u(x) & = & -e^{-\lambda x} & & v'(x) & = & 1 \end{array}\right.$

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $\mathbb{R}_+$, on peut intégrer par parties :

$\mathrm{F}(t) = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-\lambda x}\,dx = \left[-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^t = -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} + 0 + \frac{1}{\lambda} =$

$\mathrm{F}(t) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - te^{-\lambda t}$.

(b)
- $\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} = 0$;
- $\lim_{t\to+\infty} te^{-\lambda t} = 0$;

Donc par somme de limites : $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{F}(t) = \frac{1}{\lambda}$.

Comme $\lambda \approx 0,128 \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} \approx 7,8125 \approx 7,8$.

Donc $d_m \approx 7,8$.

La durée moyenne de vie d'un moteur est légèrement inférieure à 7 ans et 10 mois.

Exercice 8 énoncé **Nouvelle Calédonie 2011**

Commun à tous les candidats

1. On a donc $0,6 = \int_0^7 \lambda e^{-\lambda x} dx \iff 0,6 = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^7 \iff 0,6 = -e^{-7\lambda} + 1 \iff e^{-7\lambda} = 0,4 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien $-7\lambda = \ln(0,4) \iff \lambda = \dfrac{\ln(0,4)}{-7} \approx 0,1308 \approx 0,131$ à 10^{-3} près.

2. On a $p(X > 5 = 1 - p(X \leqslant 5) = 1 - \int_0^t 0,131 e^{-0,131x} dx = 1 - \left[-e^{-0,131x}\right]_0^5 = 1 + e^{-0,131\times 5} - 1 \approx 0,519 \approx 0,52$ à 10^{-2} près.

3. Puisqu'on a une loi sans vieillissement :

$p_{X>4}(X > 9) = p_{X>4}(X > 4+5) = p(X > 5) \approx 0,52$.

4. On a $p(6 \leqslant X \leqslant 10) = p(X \leqslant 10) - p(X \leqslant 6) = \left(1 - e^{-0,131\times 10}\right) - \left(1 - e^{-0,131\times 6}\right) = e^{-0,131\times 6} - e^{-0,131\times 10} \approx 0,19$.

5. (a) Les temps sont supposés indépendants de durée supérieure ou égale à 5 heures (avec une probabilité égale à 0,52) ou inférieure à 5 heures (avec une probabilité égale à $1 - 0,52 = 0,48$).

La variable Y suit donc une loi binomiale de paramètres $p = 0,52$ et $n = 8$.

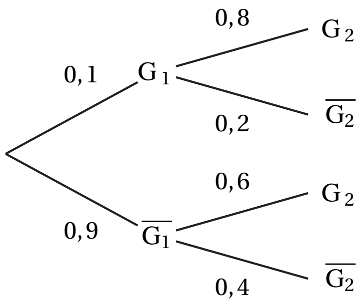
(b) On a $p(Y = 3) = \binom{8}{3} \times 0,52^3 \times 0,48^{8-3} = 56 \times 0,52^3 \times 0,48^5 \approx 0,20$.

(c) On a E(Y) $= n \times p = 8 \times 0,52 = 4,16 \approx 4$.

Exercice 9 énoncé **Polynésie 2011**

Enseignement obligatoire

1. On a l'arbre pondéré suivant :

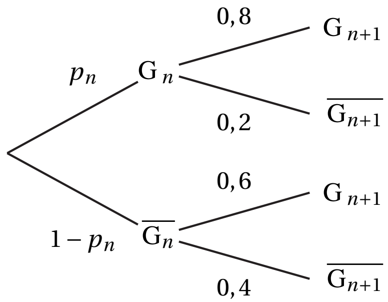


On a $p_2 = p(G_1 \cap G_2) + p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p\left(\overline{G_1}\right) \times p_{\overline{(G_1)}}(G_2) =$
$0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$.

2. Il faut trouver $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right) = \dfrac{p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right)}{p(G_2)} = \dfrac{0,54}{0,62} = \dfrac{27}{31}$.

3. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$. La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à $1 - 0,144 = 0,856$.

4. À la partie n, on a l'arbre suivant :



On a donc $p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) = p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p\left(\overline{G_n}\right) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) =$
$p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6 = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

5. *Initialisation* On a bien $\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{20} = \dfrac{15-13}{20} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1 = p_1$.

Hérédité

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}, a > 1$ tel que $p_a = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^a$.

D'après la formule démontrée à la question 4 :

$p_{a+1} = \dfrac{1}{5}p_a + \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^a\right] + \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1} = \dfrac{3}{20} + \dfrac{12}{20} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1} =$
$\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1}$. La propriété est vraie au rang $a+1$.

On a donc démontré par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

6. Comme $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

7. On a : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \iff \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right) < 10^{-7} \iff \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \iff \left(\dfrac{1}{5}\right)^n <$
$\dfrac{4}{13} \times 10^{-7} \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $n\ln\left(\dfrac{1}{5}\right) < \ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right) \iff$
$n > \dfrac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)}$.

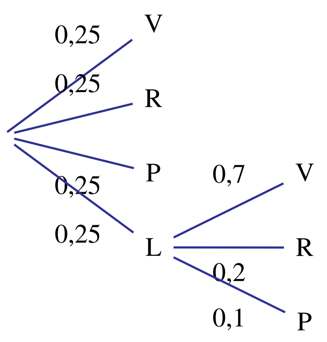
Or $\dfrac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)} \approx 10,7$.

Donc u_{11} approche la limite $\dfrac{3}{4}$ à moins de 10^{-7}.

Exercice 10 énoncé **Nouvelle Calédonie mars 2011**

Commun à tous les candidats

1.



2. On a $p(\mathrm{V}) = 0,25 + 0,25 \times 0,7 = 0,25 \times 1,7 = 0,425$.

3. On a $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{L}) = \dfrac{p(\mathrm{V} \cap \mathrm{L})}{p(\mathrm{V})} = \dfrac{0,25 \times 0,7}{0,425} = \dfrac{0,175}{0,425} = \dfrac{7}{17} \approx 0,412$.

4. On a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 6$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

La probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée 0 fois par un concurrent « non cycliste » est égale à $\binom{6}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^0 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^6$.

Donc la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste » est égale à :

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{3^6 - 2^6}{3^6} = \frac{665}{729} \approx 0,912.$$

Exercice 11 énoncé **Pondichéry 2011**

Commun à tous les candidats

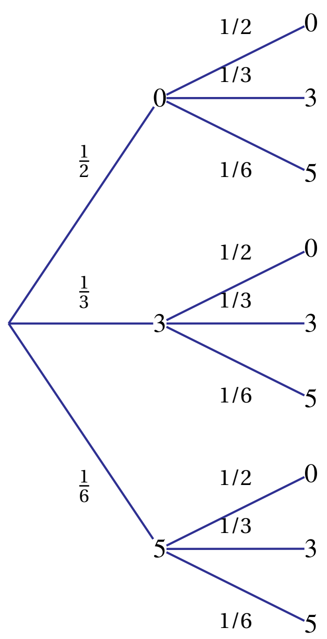
1. On a donc $p_3 = 2p_5$ et $p_0 = 3p_5$, donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1 \iff 3p_5 + 2p_5 + p_5 = 1 \iff 6p_5 = 1 \iff p_5 = \frac{1}{6}$.

Il en résulte que $p_3 = 2p_5 = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ et $p_0 = 3p_5 = 3 \times p_0 = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Remarque : il ne devait pas être très difficile de voir que les probabilités étaient proportionnelles à l'aire des secteurs, donc à des angles au centre de 180 ° (deux angles droits), un angle de 60 ° et un angle de 120 ° pour un total de 360 °.

On a donc $p_0 = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ et $p_5 = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ …

2. **(a)**



On obtient un total d'au moins 8 points en deux lancers à la 6ᵉ, 8ᵉ et 9ᵉ branche. Donc

$p(G_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$.

(b) En déduire $p(P)$. On a $p(P) = 1 - p(G_2) - p(G_3) = 1 - \frac{5}{36} - \frac{7}{36} = \frac{36}{36} - \frac{12}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

3. Les lancers sont indépendants ; on a une schéma de Bernoulli de paramètres $n = 6$ et de probabilité $p = \frac{2}{3}$.

La probabilité de ne gagner aucune partie est $\left(\frac{2}{3}\right)^6$, donc la probabilité de gagner au moins une partie est $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{3^6 - 2^6}{3^6} = \frac{665}{729}$

4. **(a)** On a le tableau de loi de probabilité de X suivant :

X	-2	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{24}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$

(b) $E(X) = -2 \times \frac{24}{36} + 1 \times \frac{7}{36} + 3 \times \frac{5}{36} = \frac{-48 + 7 + 15}{36} = -\frac{26}{36} = -\frac{13}{18} \approx -0,72$ €.

Un joueur perd en moyenne sur un grand nombre de parties 72 centimes par partie.

Le jeu est défavorable au joueur.

EXERCICE 12 énoncé **Polynésie septembre 2011**

1. Sur 300 personnes, 225 utilisent l'escalier ; $p\left(\overline{\mathrm{E}}\right) = \dfrac{225}{300} = \dfrac{3}{4}$. D'où

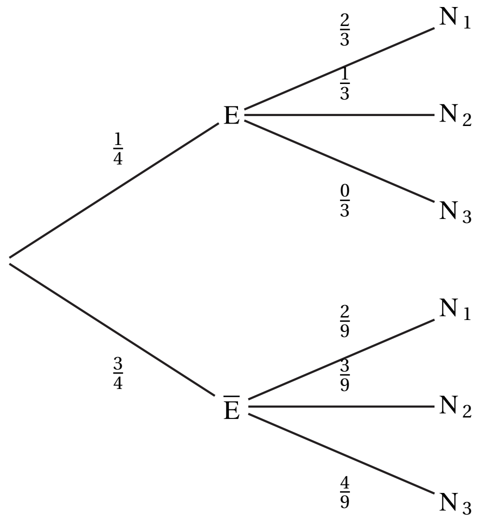
$p(\mathrm{E}) = 1 - p\left(\overline{\mathrm{E}}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Sur les 225 personnes empruntant l'ascenseur la répartition 50, 75, 100 suivant les étages conduit à :

$$p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_1) = \frac{50}{225} = \frac{2}{9}, \quad p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_2) = \frac{75}{225} = \frac{3}{9}, \quad p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_3) = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}$$

Sur les 75 personnes empruntant l'escalier, on obtient de même :

$$p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_1) = \frac{1}{3}, \quad p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_2) = \frac{2}{3}, \quad p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_3) = \frac{0}{3}$$



2. (a) On a $p(\mathrm{E} \cap \mathrm{N}_2) = p(\mathrm{E}) \times p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$.

(b) Vont au 1^er^ étage : 50 (ascenseur) + $75 \times \dfrac{2}{3} = 50 = 100$ personnes ;

Vont au 2^e^ étage : 75 (ascenseur) + $75 \times \dfrac{1}{3} = 25 = 100$ personnes ;

Vont au 3^e^ étage : 100 (ascenseur) personnes.

Les évènements N_1, N_2, N_3 sont bien équiprobables.

(c) Il faut trouver : $p_{\mathrm{N}_2}(\mathrm{E}) = \dfrac{p(\mathrm{E} \cap \mathrm{N}_2)}{p(\mathrm{N}_2)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{4}$.

3. (a) Une personne prise au hasard a une probabilité d'aller au 2^e^ étage égale à $p(\mathrm{N}_2) = \dfrac{1}{3}$.

Les réponses des 20 étant indépendantes les unes des autres, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p = \dfrac{1}{3}$ et $n = 20$.

(b) On a donc :

$$p(\mathrm{X} = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{20-5} = 15504 \times \frac{2^{15}}{3^{20}} \approx 0{,}1457.$$

(c) La moyenne pour les 20 personnes d'aller au 2^e^ étage est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, soit : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = n \times p = 20 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{20}{3} \approx 7$.

Un peu moins de 7 personnes sur 20 vont au 2^e^ étage.

4. On reprend la variable aléatoire suivant la loi binomiale de probabilité $\dfrac{1}{3}$ avec n personnes.

Il faut trouver : $p(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0)$ soit $p(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

La condition est réalisée si :

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}01 \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \iff \ln 0{,}01 \geqslant n \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{(par croissance de la fonction ln)} \iff \frac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{2}{3}} \leqslant n$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{2}{3}} \approx 11{,}3$. Il faut donc prendre au minimum 12.

Conclusion : sur 12 personnes, au moins une va au niveau 2 avec une probabilité supérieure ou égale à $0{,}99$.

EXERCICE 13 énoncé **Amerique du Nord 2012**

PARTIE A.

1. Un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis, donc $p_F(T) = \frac{1}{4}$ et $p_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{3}$. 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis, donc $p(T) = \frac{3}{10}$.
F et $\overline{F}$ forment une partition, d'après le théorème des probabilités totales, on a : $p(T) = p(T \cap F) + p(T \cap \overline{F}) = p_F(T)p(F) + p_{\overline{F}}(T)p(\overline{F}) = \frac{1}{4}p(F) + \frac{1}{3}(1 - p(F)) = \frac{3}{10}$. On en déduit que $\frac{1}{12}p(F) = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}$ soit $p(F) = \frac{2}{5}$.

2. Il s'agit de calculer $p_T(F)$. Or $p_T(F) = \frac{p(T\cap F)}{p(T)} = \frac{p(F)p_F(T)}{p(T)} = \frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$.

PARTIE B.

1. (a) C'est une répétition d'une expérience aléatoire à deux issues, identique et indépendante. La variable aléatoire X, donnant le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ (nombre d'épreuves) et $p = \frac{3}{10}$. On souhaite deux succès, la probabilité est donc $p(X = 2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{4-2} = \binom{4}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^{4-2} = \frac{1323}{5000} \approx 0,2646$.

(b) Il suffit de considérer l'évènement contraire qui consiste à ne choisir aucun membre du club de tennis n fois, soit $\left(\frac{7}{10}\right)^n$. Le résultat est donc $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

(c) $p_n \geqslant 0,99$, $1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geqslant 0,99$, $\left(\frac{7}{10}\right)^n \leqslant 0,01$, $\ln\left(\left(\frac{7}{10}\right)^n\right) \leqslant \ln(0,01)$ car la fonction ln est croissante.
$n\ln\left(\frac{7}{10}\right) \leqslant \ln(0,01)$, $n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{7}{10}\right)}$ car $\ln\left(\frac{7}{10}\right) < 0$. $n \geqslant 12,9$, i.e. $n \geqslant 13$.

2. (a) Les gains algébriques possibles sont -5, 15, et 35.

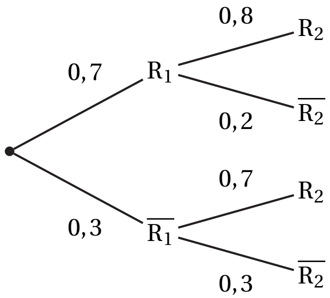
$Y = y_i$	-5	15	35
$p(Y = y_i)$	$\frac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{89}{110}$	$\frac{\binom{90}{1}\binom{10}{1}}{\binom{100}{2}} = \frac{2}{11}$	$\frac{\binom{10}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{1}{110}$

(b) L'espérance est donc $E(Y) = \sum_i y_i p\left(Y = y_i\right) = -5 \times \frac{89}{110} + 15 \times \frac{2}{11} + 35 \times \frac{1}{110} = -1$. Le jeu est en défaveur du joueur car l'espérance est négative ou encore qu'en moyenne, sur un grand nombre de partie, le joueur perd 1 euro par partie.

EXERCICE 14 énoncé **Amerique du Sud 2012**

Commun à tous les candidats

1. (a) On a l'arbre de probabilités suivant :



On a $p(\text{X}=2) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$;

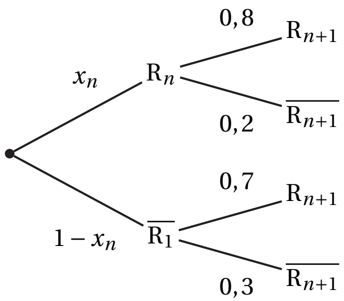
$p(\text{X}=1) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,7 = 0,14 + 0,21 = 0,35$;

$p(\text{X}=0) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$

(b) $\text{E}\,(\text{X}) = 2 \times 0,56 + 1 \times 0,35 + 0 \times 0,09 = 1,12 + 0,35 = 1,47 \approx 1,5$.

2. (a) D'après l'énoncé $\text{P}_{\text{R}_n}(\text{R}_{n+1}) = 0,8$ et $\text{P}_{\overline{\text{R}_n}}(\text{R}_{n+1}) = 0,7$.

(b) On construit un arbre analogue :



On a donc $x_{n+1} = x_n \times 0,8 + (1 - x_n) \times 0,7 = 0,8x_n - 0,7x_n + 0,7 = 0,7 + 0,1x_n$.

3. (a) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $u_{n+1} = 9x_{n+1} - 7 = 9\,(0,7 + 0,1x_n) - 7 = 6,3 + 0,9x_n - 7 = 0,9x_n - 0,7 = 0,1\,(9x_n - 7) = 0,1u_n$.

$u_{n+1} = 0,1u_n$ quel que soit le naturel n non nul signifie que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,1$, de premier terme $u_1 = 9x_1 - 7 = 9 \times 0,7 - 7 = -0,7$.

(b) On sait que pour tout naturel n, $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,7 \times 0,1^{n-1}$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,1^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

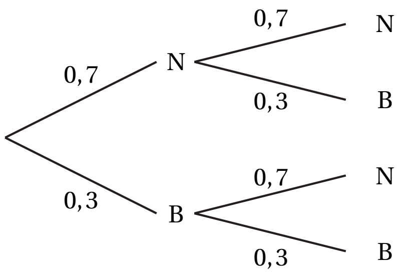
Par suite, comme $x_n = \dfrac{u_n + 7}{9}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{7}{9} \approx 0,777\,778$.

Sur un très grand nombre de services le pourcentage de services réussis se rapproche de 77,8 %.

Exercice 15 énoncé Asie 2012

Partie A

1.



D'où : $p = \mathrm{P}(\mathrm{G}) = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 \Longrightarrow \boxed{p = 0,42}$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

(a) L'expérience aléatoire a deux issues :

- succès : le joueur gagne avec une probabilité de $p = 0,42$
- échec : le joueur perd avec une probabilité de $q = 1 - p = 0,58$

On répète cette expérience n fois de manière indépendante. Donc, **la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p** .

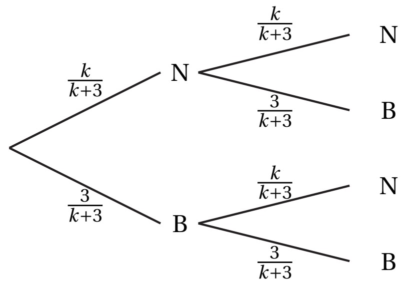
(b) $p_n = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \boxed{1 - 0,58^n = p_n} \Longrightarrow p_{10} = 1 - 0,58^{10} \approx \boxed{0,996 \approx p_{10}}$

(c) $1 - 0,58^n \geqslant 0,99 \Longrightarrow 0,01 \geqslant 0,58^n \Longrightarrow \ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,58^n\right) \Longrightarrow \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \leqslant n \Longrightarrow$

$\boxed{\textbf{le joueur doit jouer au moins 9 parties}}$.

Partie B

1. (a)



On en déduit que :

$$p\left(\mathrm{Y}_k = 5\right) = \frac{k}{(k+3)} \times \frac{3}{(k+3)} + \frac{3}{(k+3)} \times \frac{k}{(k+3)} \Longrightarrow \boxed{p\left(\mathrm{Y}_k = 5\right) = \frac{6k}{(k+3)^2}}$$

(b)

$y_i =$	-9	-1	$+5$
$\mathrm{P}\left(\mathrm{Y}_k = y_i\right) =$	$\dfrac{9}{(k+3)^2}$	$\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$	$\dfrac{6k}{(k+3)^2}$

2. $\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_k\right) = -9 \times \dfrac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \dfrac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \dfrac{6k}{(k+3)^2} = \dfrac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} = \dfrac{-(k-3)(k-27)}{(k+3)^2}$

D'où :

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_k\right) > 0 \Longleftrightarrow k \in]3\,;\,27[$$

$\boxed{\text{Le jeu est favorable au joueur pour } k \in]3\,;\,27[}$.

Exercice 16 énoncé Liban 2012

Commun à tous les candidats.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'une U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.
On considère les évènements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

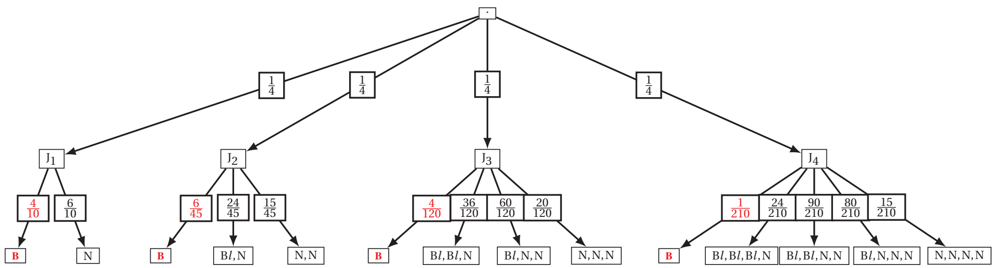
J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question **4.b)** *où une valeur arrondie à* 10^{-2} *suffit.*

Arbre complet, mais non demandé.



1. Probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement J_1 est réalisé :

$$P_{J_1}(B) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{10}{1}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

De même la probabilité $P_{J_2}(B)$ est :

$$P_{J_2}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

Et :

$$P_{J_3}(B) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad P_{J_4}(B) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{210}$$

2. Calcul de $P(B)$, probabilité de l'évènement B :

$$P(B) = P(B\cap J_1)+P(B\cap J_2)+P(B\cap J_3)+P(B\cap J_4) = P_{J_1}(B)\times P(J_1)+P_{J_2}(B)\times P(J_2)+P_{J_3}(B)\times P(J_3)+P_{J_4}(B$$

$$= \frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{15}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{30}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{210}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{84+28+7+1}{210}\right) = \frac{1}{7}$$

3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. La probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 correspond à $P_B(J_3)$

$$P_B(J_3) = \frac{P(B\cap J_3)}{P(B)} = \frac{P_{J_3}(B)\times P(J_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{30}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}$$

4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.

(a) La loi suivie par la variable aléatoire N est une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = P(B) = \frac{1}{7}$.

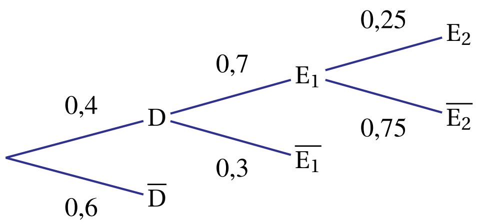
(b) Probabilité de l'évènement $(N = 3)$:

$$P(N=3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^7 = 120\times\frac{6^7}{7^{10}} \simeq 0,12$$

EXERCICE 17 énoncé **Métropole 2012**

Commun à tous les candidats

1. (a)



(b) On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

(c) Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit :
$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap E_1 \cap \overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93$. D'où $p\left(\overline{F}\right) = 1 - p(F) = 1 - 0,93 = 0,07$.

On peut directement calculer la probabilité d'être recruté, soit :
$p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$.

D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. (a) Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à $0,07$. La variable X suit donc une loi binomiale $(\mathcal{B}, n = 5,\ p = 0,07)$.

(b) On a $p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx 0,039$ à 10^{-3} près

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.

La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{n}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$.

La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $1 - 0,93^n$.

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n \ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln) $\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$.

Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx 95,1$.

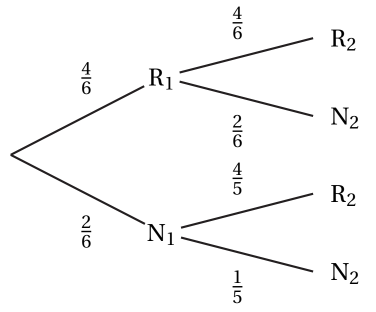
Il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

Exercice 18 énoncé **Métropole septembre 2012**

Commun à tous les candidats

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes*

1. (a) On peut dresser l'arbre suivant :



On a $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{4}{9}$.

(b) $p_{N_2} = p_{R_1}(N_2) + p_{N_1}(N_2) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{6} + \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{10+3}{45} = \dfrac{13}{45}$.

On a $p_{N_2}(R_1) = \dfrac{p(N_2 \cap R_1)}{p(N_2)} = \dfrac{p(R_1 \cap N_2)}{p(N_2)} = \dfrac{\frac{4}{6} \times \frac{2}{6}}{\frac{13}{45}} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{13}{45}} = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{45}{13} = \dfrac{10}{13}$.

2. (a) La probabilité de tirer une boule rouge, sachant qu'il y a 4 rouges et n noires pour un total de $n+4$ boules est égale à :

$p = \dfrac{4}{n+4}$.

(b) La probabilité de tirer quatre boules rouges est égale à $\left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4$, donc l'évènement contraire, soit l'une au moins des boules est noire, a une probabilité de $q_n = 1 - \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4$.

(c) On a $q_n \geqslant 0{,}9999 \iff 1 - \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4 \geqslant 0{,}9999 \iff 0{,}0001 \geqslant \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4 \iff 0{,}1 \geqslant \dfrac{4}{n+4} \iff 0{,}1(n+4) \geqslant 4 \iff 0{,}1n + 0{,}4 \geqslant 4 \iff 0{,}1n \geqslant 3{,}6 \iff n \geqslant 36$.

On a donc $q_{36} = 0{,}9999$.

Exercice 19 énoncé Nouvelle Calédonie 2012

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Les trois tirages sont indépendants, et à chaque tirage la probabilité de tirer une boule rouge est égale à $\dfrac{2}{3+2}=\dfrac{2}{5}$: on a donc une épreuve de Bernoulli et la vraiable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\dfrac{2}{5}$.

2. La probabilité de tirer k $(0\leqslant k\leqslant 3)$ boule(s) rouge(s) est égale à

$$p(\mathrm{X}=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(1-\frac{2}{5}\right)^{3-k}\qquad(\star).$$

En particulier : $p(\mathrm{X}=1)=\binom{3}{1}\left(\dfrac{2}{5}\right)^1\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^{3-1}=3\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3^2}{5^2}=\dfrac{54}{125}$.

3. On sait que $\mathrm{E}(\mathrm{X})=n\times p=3\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}=1,2$.

Vérification : on calcule avec la formule $(\star)$:

$p(\mathrm{X}=0)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$;

$p(\mathrm{X}=2)=\dfrac{3!}{2!}\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{36}{125}$;

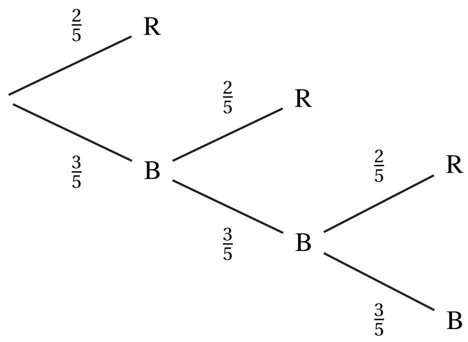
$p(\mathrm{X}=3)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$.

On a donc $\mathrm{E}(\mathrm{X})=0\times\dfrac{27}{125}+1\times\dfrac{54}{125}+2\times\dfrac{36}{125}+3\times\dfrac{8}{125}=\dfrac{54+72+24}{125}=\dfrac{150}{125}=\dfrac{6}{5}$.

Sur un grand nombre de tirages on tirera un peu plus d'une boule rouge en moyenne par tirage (en moyenne 150 boules rouges sur 125 tirages).

Partie B

1.



2. On a $p(\mathrm{Y}=1)=\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{6}{25}+\dfrac{18}{125}=\dfrac{50+30+18}{125}=\dfrac{98}{125}$.

$p(\mathrm{Y}=0)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{125}$.

Donc $\mathrm{E}(\mathrm{Y})=1\times\dfrac{98}{125}+0\times\dfrac{27}{125}=\dfrac{98}{125}$.

3. Toujours d'après l'arbre : $p(\mathrm{N}=1)=\dfrac{2}{5}$; $p(\mathrm{N}=2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$ et $p(\mathrm{N}=3)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{25}$.

On a donc $\mathrm{E}(\mathrm{N})=1\times\dfrac{2}{5}+2\times\dfrac{6}{25}+3\times\dfrac{9}{25}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{12}{25}+\dfrac{27}{25}=\dfrac{10+12+27}{125}=\dfrac{49}{25}$.

4. On a $\dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{Y})}{\mathrm{E}(\mathrm{N})}=\dfrac{\frac{98}{125}}{\frac{49}{25}}=\frac{98}{125}\times\frac{25}{49}=\frac{2}{5}$, soit la proportion de boules rouges dans l'urne.

Exercice 20 énoncé **Polynésie 2012**

Si on note les événements :

B : « le cube est bleu »

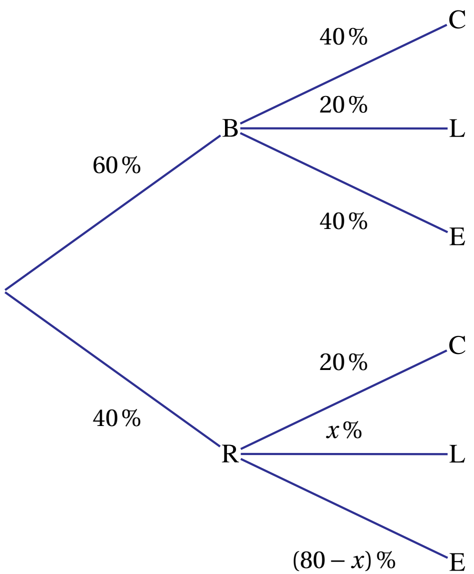
R : « le cube est rouge »

c : « le cube a ses faces marquées d'un cercle »

L : « le cube a ses faces marqués d'un losange »

E : « le cube a ses faces marquées d'une étoile ».

On a l'arbre suivant :



expérience 1

1. La probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à :

$60\,\% \times 20\,\% + 40\,\% \times x\,\% = 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times \dfrac{x}{100} = 0,12 + 0,004x$.

2. Notons $P(L)$ la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange et $P(E)$ celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

$$\begin{aligned} P(L) = P(E) &\iff 0,12 + 0,004x = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times \frac{80-x}{100} \\ &\iff 0,12 + 0,004x = 0,24 + 0,32 - 0,004x \\ &\iff 0,008x = 0,44 \\ &\iff x = 55 \end{aligned}$$

La probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile pour $x = 55$.

3. Les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » sont indépendants équivaut à $P_B(L) = P(L) = P_R(L)$ soit pour $x = 20$.

4. Dans cette question que $x = 50$. $P_L(B) = \dfrac{P(L \cap B)}{P(L)} = \dfrac{0,6 \times 0,2}{0,12 + 0,004 \times 50} = \dfrac{0,12}{0,32} = 0,375$

La probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est donc $0,375$.

expérience 2

1. La probabilité de ne tirer aucun cube rouge est :

$$\frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{\frac{60!}{57!3!}}{\frac{100!}{97!3!}} = \frac{60\times59\times58}{100\times99\times98} = \frac{3\times20\times59\times2\times29}{5\times20\times3\times3\times11\times2\times49} = \frac{1711}{8085} \simeq 0,212$$

La probabilité de tirer au moins un cube rouge est donc $1 - \frac{1711}{8085} = \frac{6374}{8085} \simeq 0,788$.

2. D'après les calculs précédents la probabilité que les trois cubes soient bleus est $\frac{1711}{8085}$.

La probabilité que les trois cubes soient rouges est :

$$\frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{\frac{40!}{37!3!}}{\frac{100!}{97!3!}} = \frac{40\times39\times38}{100\times99\times98} = \frac{2\times20\times3\times13\times2\times19}{5\times20\times3\times3\times11\times2\times49} = \frac{494}{8085} \simeq 0,061\,.$$

La probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur est donc $\frac{1711}{8085} + \frac{494}{8085} = \frac{2205}{8085} \simeq 0,273$

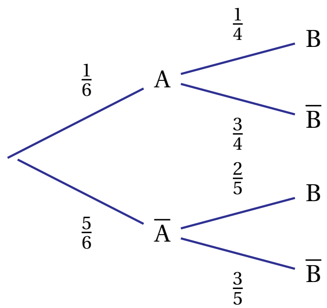
3. Il y a 32 cubes marqués d'un cercle donc la probabilité d'avoir tiré exactement un cube marqué d'un cercle est $\dfrac{\binom{32}{1}\times\binom{68}{2}}{\binom{100}{3}} = \dfrac{32\times68\times67}{100\times99\times98} = \dfrac{2^7\times17\times67}{2^3\times3^2\times5^2\times7^2\times11} = \dfrac{18224}{121275} \simeq 0,150$.

La probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle est environ $0,451$.

EXERCICE 21 énoncé Nouvelle Calédonie mars 2012

Commun à tous les candidats

1. (a)



(b) D'après la loi des probabilités totales : $p(\text{B}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{B}) + p\left(\overline{\text{A}}\right) \times p_{\overline{\text{A}}}(\text{B}) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{24} + \dfrac{8}{24} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.

(c) $p_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{B})}{p(\text{B})} = \dfrac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{1}{24} \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{1}{9}$.

2. (a) Les parties étant indépendantes la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{8}$.

La probabilité de gagner exactement trois parties est égale à :

$p(\text{X} = 3) = \dbinom{10}{3}\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \times \left(1 - \dfrac{3}{8}\right)^{10-3} = \dbinom{10}{3}\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^7 \approx 0{,}2357 \approx 0{,}236$ au millième près.

(b) On a $p(\text{X} \geqslant 1) = 1 - p(\text{X} = 0) = 1 - \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^0 \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^{10} = 1 - \left(\dfrac{5}{8}\right)^{10} \approx 0{,}9909 \approx 0{,}991$ au millième près.

(c) À partir du tableau donné on calcule les probabilités $\text{P}(\text{X} = k - 1)$ par différence entre deux valeurs consécutives. On constate que $\text{P}(\text{X} = 7)$ est la première valeur inférieure à $0{,}1$. Donc $\text{N} = 7$.

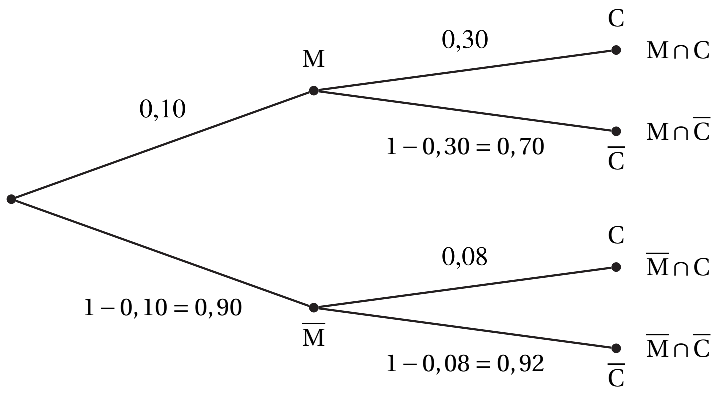
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{P}(\text{X} < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9
$\text{P}(\text{X} = k-1)$	0,009 1	0,054 6	0,147 3	0,235 7	0,247 6	0,178 2	0,089 1	0,030 6	0,006 8	0,000 9

EXERCICE 22 énoncé **Amerique du Sud 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

En utilisant les données du texte, on peut construire l'arbre pondéré suivant :



1. (a) $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,1 \times 0,3 = 0,03$

(b) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(M \cap C) + P\left(\overline{M} \cap C\right)$$
$$= P(M) \times P_M(C) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(C) = 0,1 \times 0,3 + 0,9 \times 0,08 = 0,03 + 0,072 = 0,102$$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.

La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C(M)$:

$$P_C(M) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,03}{0,102} \approx 0,2941$$

Partie B

1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de 400 personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.

Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M) = 0,1$ d'après le texte.

Donc on peut dire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,1$.

2. Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400;0,1)$, $P(X = 35) = \binom{400}{35} 0,1^{35}(1-0,1)^{400-35}$;

le résultat donné par la calculatrice est approximativement $0,0491$.

3. La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(X \geqslant 30)$ qui est égale à $1 - P(X < 30) = 1 - P(X \leqslant 29)$.

D'après la calculatrice, $P(X \leqslant 29) \approx 0,0357$, donc $P(X \geqslant 30) \approx 0,9643$.

Partie C

1. On sait que si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $F = \frac{X}{400}$ au seuil de 95 % est donné par :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
$$= \left[0,1 - 1,96\frac{\sqrt{0,1(1-0,1)}}{\sqrt{400}}\,;\, 0,1 + 1,96\frac{\sqrt{0,1(1-0,1)}}{\sqrt{400}}\right] = \left[0,0706\,;\,0,1294\right]$$

2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme ; $\frac{60}{400} = 0,15 \notin I$.

Le taux de malades dans cet échantillon est anormalement élevé.

Exercice 3 **5 points**

Exercice 23 énoncé **Antilles 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

On a :

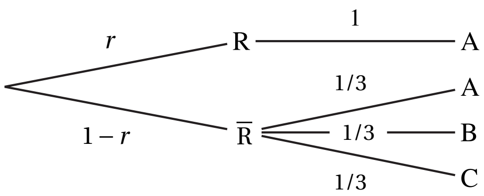
$$\begin{aligned} f \in \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\iff p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\iff -f-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant -p \leqslant -f+\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\iff f-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant f+\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\iff p \in \left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\mathrm{P}\left(f \in \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) = \mathrm{P}\left(p \in \left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 0{,}95$$

Partie B

1. (a) Arbre pondéré illustrant la situation :



(b) On a, d'après l'arbre précédent :

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{R}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{R}}) = r + \frac{1}{3}(1-r) = \frac{1}{3}(3r+1-r) = \frac{1}{3}(1+2r).$$

(c) On a : $\mathrm{P_A(R)} = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{R})}{\mathrm{P(A)}} = \dfrac{r}{\frac{1}{3}(1+2r)} = \dfrac{3r}{1+2r}$.

2. (a) L'expérience consiste en une répétition de 400 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, où la probabilité de « succès » (c'est-à-dire que l'étudiant ait la bonne réponse) est égale à $\mathrm{P(A)}$. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \mathrm{P(A)} = \frac{1}{3}(1+2r)$.

(b) On a $n = 400$ et $f = \frac{240}{400} = 0{,}6$, donc $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$, un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p est donc :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}55\ ;\ 0{,}65].$$

Ainsi, avec une probabilité supérieure à 95 % :

$$0{,}55 \leqslant p \leqslant 0{,}65$$

or $p = \frac{1}{3}(1+2r)$, donc :

$$0{,}55 \leqslant \frac{1}{3}(1+2r) \leqslant 0{,}65$$

d'où :

$$1{,}65 \leqslant 1+2r \leqslant 1{,}95$$

puis :

$$0{,}325 \leqslant r \leqslant 0{,}475$$

Un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r est donc : $[0{,}325\ ;\ 0{,}475]$.

(c) **(i)** Ici $r = 0{,}4$, donc $p = \frac{1}{3}(1+2r) = 0{,}6$. La loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}6$ a pour espérance $np = 240$ et pour variance $\mathrm{V} = np(1-p) = 96$. On peut alors l'approcher par la loi normale de paramètres $\mu = 240$ et $\sigma = \sqrt{96}$.

(ii) Par lecture de la table fournie (ou utilisation de la calculatrice) :

$$\mathrm{P(X} \leqslant 250) = 0{,}846.$$

EXERCICE 24 énoncé Amerique du Nord 2013

Commun à tous les candidats

Les parties A B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. $P(390 \leqslant X \leqslant 410) = P(X \leqslant 410) - P(X < 390) = 0,818 - 0,182 = 0,636$.

2. Un pain choisi au hasard dans la production est commercialisable si et seulement si

« $X \geqslant 385$ ».

« $X \geqslant 385$ » est l'événement contraire de « $X < 385$ ».

On a donc $p(X \geqslant 385) = 1 - p(X < 385) = 1 - 0,086 = 0,914$.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

Soit Y la variable aléatoire de paramètres $\mu = 400$ et σ, on a :

$p(X \geqslant 385) = 0,96 \Leftrightarrow 1 - p(Y < 385) = 0,96 \Leftrightarrow p(Y < 385) = 0,04$

Si Y suit une loi normale de paramètres $\mu = 400$ et σ, on sait que $Z = \dfrac{X - 400}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite et $p(Y < 385) = 0,04 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \dfrac{385 - 400}{\sigma}\right) = 0,04$.

Or $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040$. On a donc : $\dfrac{-15}{\sigma} = -1,751 \Leftrightarrow \sigma = \dfrac{15}{1,751} = 8,6$.

Pour $\sigma = 8,6$, au dixième près ; la probabilité qu'un pain soit commercialisable est de 96%

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 est de la forme

$$I_{300} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

avec $p = 0,96$ et $n = 300$.

On a donc : $I_{300} = [0,93\ ;\ 0,99]$

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. Ce qui représente 94 % de la production.

Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, on accepte que l'objectif a été atteint.

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de $p(T \geqslant 30) = 0,913$.

On a par ailleurs : $p(T \leqslant 30) = \int_0^{30} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{30} = 1 - e^{-30\lambda}$.

On en déduit : $p(T \geqslant 30) = 1 - p(T \leqslant 30) = e^{-30\lambda}$ et finalement :

$e^{-30\lambda} = 0,913 \Leftrightarrow -30\lambda = \ln(0,913) \Leftrightarrow \lambda = 0,003$.

Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.

2. Calculons $p_{T\geqslant 60}(T \geqslant 90)$.

On a $p_{T\geqslant 60}(T \geqslant 90) = \dfrac{p((T \geqslant 60)\cap(T \geqslant 90))}{p(T \geqslant 60)} = \dfrac{p(T \geqslant 90)}{p(T \geqslant 60)} = \dfrac{1-p(T \leqslant 90)}{1-p(T \leqslant 60)} = \dfrac{e^{-90\lambda}}{e^{-60\lambda}} = e^{-30\lambda}$.

Avec $\lambda = 0,003$, on a donc $p_{T\geqslant 60}(T \geqslant 90) = p(T \geqslant 30) = 0,913$.

La probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours est 0,913 (loi à durée de vie sans vieillissement !)

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. Calculons la durée maximale t_{max} pour laquelle la probabilité que la balance dérègle est inférieure à 0,5.

$p(T \leqslant t_{\text{max}}) \leqslant 0,5 \iff = \int_0^{t_{\text{max}}} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \leqslant 0,5 \iff [-e^{-\lambda x}]_0^{t_{\text{max}}} \leqslant 0,5 \iff 1 - e^{-\lambda t_{\text{max}}} \leqslant 0,5$

$1 - e^{-\lambda t_{\text{max}}} \leqslant 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t_{\text{max}}} \geqslant 0,5 \Leftrightarrow -\lambda t_{max} \geqslant \ln 0.5$

Avec $\lambda = 0,003$, on trouve $t_{\text{max}} = 231$. Le vendeur avait donc tort.

Exercice 4 **5 points**

EXERCICE 25 énoncé **Antilles septembre 2013**

Commun à tous les candidats

1. $p_1 = \mathrm{P}\left(\mu_1 - 3\sigma_1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mu_1 + 3\sigma_1\right) = \mathrm{P}(35,4 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 36,6) \approx 0,997$.

2. $p_2 = \mathrm{P}(5,88 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 6,12) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant 6,12) - \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant 5,88) \approx 0,984$.

3. (a) Les deux évènements D et L étant indépendants on a :

$\mathrm{P}(\mathrm{D} \cap \mathrm{L}) = \mathrm{P}(\mathrm{D}) \times \mathrm{P}(\mathrm{L}) \approx 0,981$.

La probabilité qu'une pièce ne soit pas acceptée est donc $1 - 0,981 \approx 0,02$ arrondi à 10^{-2}.

(b) D et L sont indépendants donc D et $\overline{\mathrm{L}}$ le sont aussi d'après le cours.

On a donc : $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{L}}}(\mathrm{D}) = \mathrm{P}(\mathrm{D}) = p_2$.

Exercice 26 énoncé **Antilles septembre 2013**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : modélisation et simulation

1. $(-1\ ;\ 1)$: non car $x<0$ ce qui n'est pas possible ;

(10 ; 0) : oui par exemple en choisissant 10 fois la valeur 0 pour y ;

(2 ; 4) : non car $y>2$;

(10 ; 2) : oui par exemple en choisissant dans cet ordre 8 fois la valeur 0 puis deux fois la valeur 1 pour y.

2. Pour que Tom ait réussi la traversée, il faut qu'il soit arrivé au bout des 10 étapes, c'est-à-dire que $x=10$ et qu'il ne tombe pas lors de cette dernière étape, ce qui est encore possible si sa position à l'étape précédente était $(9;1)$ ou $(9;-1)$; il faut donc tester également si y n'est pas plus grand que 1 ou plus petit que -1 en fin d'algorithme.

On remplace dans l'algorithme la ligne :

Afficher « la position de Tom est » $(x;y)$

par :

Si $x=10$ et $y\geqslant -1$ et $y\leqslant 1$
    alors Afficher « Tom a réussi la traversée »
    sinon Afficher « Tom est tombé »
Fin du si

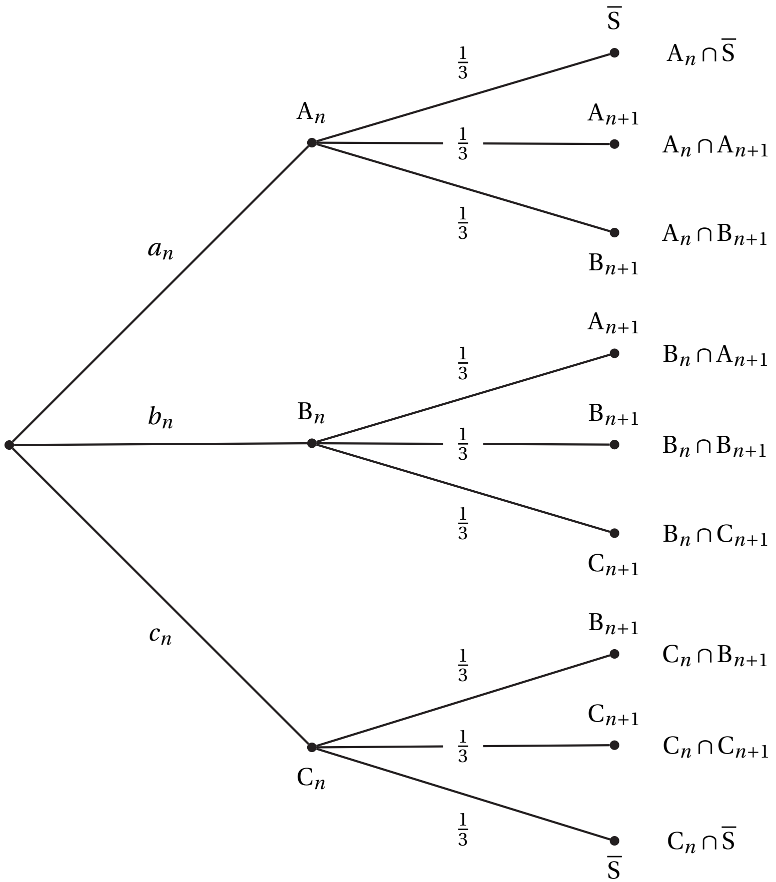
Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :
A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».
On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Au départ, Tom se trouve à l'origine O donc son ordonnée est 0 ; donc l'événement B_0 est réalisé : $a_0=0$, $b_0=1$ et $c_0=0$.

2. On va représenter sur un arbre pondéré le passage de l'état n à l'état $n+1$; une branche vers le haut signifie que le nombre choisi au hasard est -1, une branche du milieu signifie que le nombre est 0 et une branche vers le bas signifie que ce nombre vaut 1.

Il est dit dans le texte que S représente l'événement « Tom traverse le pont » donc $\overline{S}$ désigne l'événement « Tom est tombé à l'eau ».



D'après la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_n\cap A_{n+1})+P(B_n\cap A_{n+1})$$
$$=P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(A_{n+1})=a_n\times\frac{1}{3}+b_n\times\frac{1}{3}=\frac{a_n+b_n}{3}$$

De même $b_{n+1}=P(B_{n+1})=a_n\times\dfrac{1}{3}+b_n\times\dfrac{1}{3}+c_n\times\dfrac{1}{3}==\dfrac{a_n+b_n+c_n}{3}$

et $c_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{C}_{n+1}) = b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3} = \frac{b_n + c_n}{3}$

3. $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1) = a_1 = \frac{a_0 + b_0}{3} = \frac{1}{3}$; $\mathrm{P}(\mathrm{B}_1) = b_1 = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3} = \frac{1}{3}$;

$\mathrm{P}(\mathrm{C}_1) = c_1 = \frac{b_0 + c_0}{3} = \frac{1}{3}$.

4. Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements si l'ordonnée y de sa position vaut -1, 0 ou 1, autrement dit dans le cas de l'événement $\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{C}_2$. Les trois événements A_2, B_2 et C_2 sont incompatibles donc $\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{C}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{C}_2)$.

$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{3} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{2}{9}$; $b_2 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{3}$;

$c_2 = \frac{b_1 + c_1}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{2}{9}$.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{C}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{C}_2) = a_2 + b_2 + c_2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

La probabilité que Tom se trouve sur le pont après deux déplacements est $\frac{7}{9}$.

5. Pour la même raison que dans la question précédente, la probabilité que Tom traverse le pont est $\mathrm{P}(\mathrm{A}_{10} \cup \mathrm{B}_{10} \cup \mathrm{C}_{10}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{10}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_{10}) + \mathrm{P}(\mathrm{C}_{10}) = a_{10} + b_{10} + c_{10} \approx 0{,}040\,272 + 0{,}056\,953 + 0{,}040\,272 \approx 0{,}137\,497$ (d'après le tableau fourni).

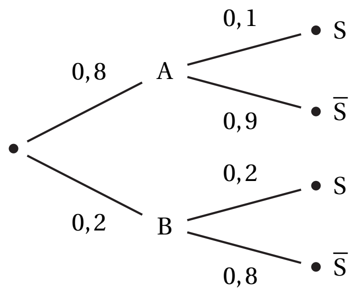
Une valeur approchée à $0,001$ près de la probabilité que Tom traverse le pont est $0,137$.

EXERCICE 27 énoncé **Asie 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Le grossiste a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des traces de pesticides ou non. On a donc un arbre 2×2 :



2. **(a)** En suivant la quatrième branche :

$p\left(B \cap \overline{S}\right) = p(B) \times p_B\left(\overline{S}\right) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$.

(b) On calcule de même :

$p\left(A \cap \overline{S}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{S}\right) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$.

$\{A ; B\}$ étant une partition de l'univers, on a donc :

$p\left(\overline{S}\right) = p\left(A \cap \overline{S}\right) + p\left(B \cap \overline{S}\right) = 0,72 + 0,16 = 0,88$.

Il faut donc calculer :

$p_S(B) = \dfrac{p(S \cap B)}{p(S)}$.

On a vu que $p\left(\overline{S}\right) = 0,88$, donc $p(S) = 1 - p\left(\overline{S}\right) = 0,12$.

Donc $p_S(B) = \dfrac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \dfrac{4}{12} \pm \dfrac{1}{3} \approx 0,33$ au centième près.

Partie B

3. 1. On a vu que la probabilité de tirer une boîte de façon aléatoire dans le stock du grossiste sans trouver de pesticides est égale à $0,88$. C'est une épreuve de Bernoulli.

Répéter de façon indépendante 10 fois cette expérience est donc une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

La variable X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(10 ; 0,88)$.

2. Il faut trouver $p(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times (1 - 0,88)^{10-10} = 0,88^{10} \approx 0,28$ au centième près.

3. Il faut trouver :

$p(X \geqslant 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{8} \times 0,88^8 \times (1 - 0,88)^{10-8} + \binom{10}{9} \times 0,88^9 \times (1 - 0,88)^{10-9} + \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times (1 - 0,88)^{10-10} \approx 0,233\,043 + 0,379\,774 + 0,278\,501 \approx 0,891\,318 \approx 0,89$ au centième près

Partie C

1. On vérifie tout d'abord que :

- $n = 50$ et $50 \geqslant 30$;
- $np = 50 \times 0,88 = 44$ et $44 \geqslant 5$;
- $n(1 - p) = 50 \times 0,12 = 6$ et $6 \geqslant 5$.

On sait qu'alors l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est égale à :

$I_f = \left[0,88 - \dfrac{1,96 \times \sqrt{0,88 \times (1 - 0,88)}}{\sqrt{50}} ; 0,88 + \dfrac{1,96 \times \sqrt{0,88 \times (1 - 0,88)}}{\sqrt{50}}\right]$, d'où au centième près :

$I_f = [0,79 ; 0,98]$.

2. L'inspecteur de la brigade de répression constate une proportion de lots sans pesticides de $\dfrac{50 - 12}{50} \approx 0,76$.

Or $0,76 \notin I_f$, donc il doit constater au risque de 5 % que la publicité est mensongère.

Exercice 28 énoncé **Centres Étrangers 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

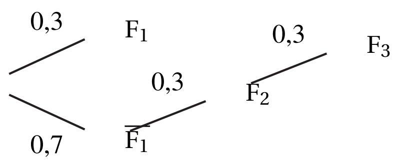
1. La durée de vie moyenne d'une vanne est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire T.

$E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,0002} = 5000$ (h).

2. On calcule $p(T > 6000) = e^{-6000\lambda} = e^{6000\times 0,0002} = e^{-1,2} \approx 0,301$.

Partie B

1.



2. On a $P(E) = P(F_1) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) =$

$P(E) = 0,3 + 0,7\times 0,3\times 0,3 = 0,3 + 0,063 = 0,363$.

3. Il faut calculer $P_E(F_1) = \dfrac{P(E\cap F_1)}{P(E)} = \dfrac{0,3}{0,363} \approx$ $0,8264 \approx 0,826$ (au millième).

Partie C

1. Les conditions :

- $n = 400 \geqslant 30$;
- $np = 8 > 5$;
- $n(1-p) = 392 > 5$

sont bien réalisées. Dans ces conditions on sait que l'intervalle de fluctuation à 95 % est égal à :

$$I_{400} = \left[0,02 - 1,96\frac{\sqrt{0,02\times 0,98}}{\sqrt{400}}\ ;\ 0,02 + 1,96\frac{\sqrt{0,02\times 0,98}}{\sqrt{400}}\right] = [0,00628\ ;\ 0,03372]$$

2. La fréquence observée est égale à $\dfrac{10}{400} = 0,025$ et $0,0025 \in I_{400}$.

L'affirmation de l'industriel ne peut être remise en cause.

Partie D

1. La calculatrice permet de trouver :

$P(760 \leqslant D \leqslant 840) = \approx 0,683$.

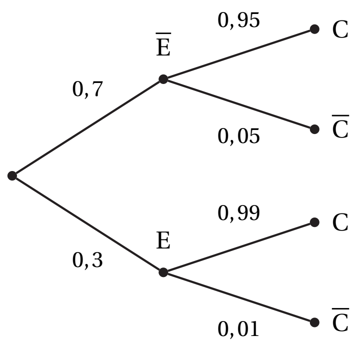
2. $P(D \leqslant 880) = \dfrac{1}{2} + P(800 \leqslant D \leqslant 880) \approx 0,5 + 0,477 \approx 0,977$.

3. On a $P(D > 880) = 1 - P(D \leqslant 880) \approx 0,023$ soit à peu près 2,3 %, soit beaucoup plus que 1 %. L'industriel a tord.

EXERCICE 29 énoncé **Liban 2013**

Partie A

1.



2. On cherche $P\left(C \cap \overline{E}\right) = P_{\overline{E}}(C) \times P\left(\overline{E}\right) = 0,95 \times 0,70 = 0,665$

3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(C) = P\left(C \cap \overline{E}\right) + P(C \cap E) = 0,665 + 0,99 \times 0,30 = 0,962$.

4. $P_C(E) = \dfrac{P(E \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,99 \times 0,30}{0,962} \approx 0,309$ à 10^{-3} près

Partie B

1. X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0,17 ; 0,006^2\right)$.
On cherche à calculer la probabilité $P(0,16 \leqslant X \leqslant 0,18)$ qui est égale à $0,9044$ d'après la table.

(a) D'après le cours, comme Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m_2 ; \sigma_2^2\right)$, alors $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

(b)

$$0,16 \leqslant Y \leqslant 0,18 \Longleftrightarrow \frac{0,16 - 0,17}{\sigma_2} \leqslant \frac{Y - 0,17}{\sigma_2} \leqslant \frac{0,18 - 0,17}{\sigma_2}$$

soit
$$-\frac{0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \frac{0,01}{\sigma_2}$$

Donc lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16 ; 0,18]$, alors Z appartient à l'intervalle $\left[-\dfrac{0,01}{\sigma_2} ; \dfrac{0,01}{\sigma_2}\right]$.

(c) On sait que cette probabilité doit être égale à $0,990$, le tableau donné permet d'obtenir

$$\beta = 2,5758$$

d'où
$$\frac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758 \Leftrightarrow \sigma_2 = 0,00385$$

En conclusion, à 10^{-3} près, $\sigma \approx 0,004$.

Exercice 30 énoncé **Pondichéry 2013**

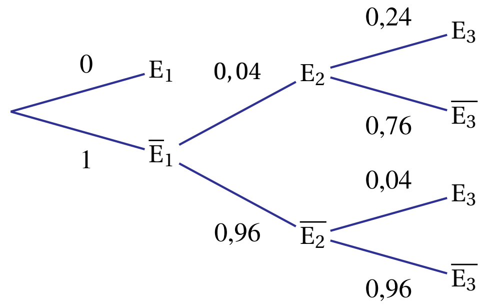
Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **(a)** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.



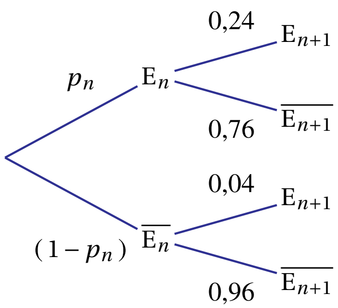
Théorème des probabilités totales : $\mathrm{E}_3 = \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3 \cup \overline{\mathrm{E}_2} \cap \mathrm{E}_3$ (union d'évènements disjoints)

$p_3 = \mathrm{P}(\mathrm{E}_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048$.

(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$\mathrm{P}_{\mathrm{E}_3}(\mathrm{E}_2) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3)}{\mathrm{P}(\mathrm{E}_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

2. **(a)** Complétons l'arbre



(b) En appliquant le théorème des probabilités totales :

$\mathrm{E}_{n+1} = \mathrm{E}_n \cap \mathrm{E}_{n+1} \cup \overline{\mathrm{E}_n} \cap \mathrm{E}_{n+1}$(union d'évènements disjoints)

$p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) = (0,24 - 0,04)p_n + 0,04 = 0,2p_n + 0,04$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n$$

donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $r = 0,2$.

Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$

et donc : $p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})$.

(d) Limite de la suite (p_n).

Comme $|0,2| < 1$ alors par théorème : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,05$.

(e) Le nombre J qui est affiché en sortie d'algorithme est le rang du premier terme de la suite (p_n) qui s'approche de la limite 0,05 à $10^{-\mathrm{K}}$ près, où K est un entier fixé au départ.

La convergence de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite vue en (d).

3. **(a)** • Une semaine donnée, on peut définir une épreuve de Bernoulli, où le succès est l'évènement E « un salarié est absent pour maladie. »

• L'état de chaque salarié étant supposé indépendant de l'état des autres, on obtient donc un Schéma de Bernoulli sur les 220 salariés de l'entreprise.

• La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit, par propriété, la loi binomiale $\mathcal{B}(220\,;\,0,05)$.

Par propriété,

$$\mu = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 220 \times 0,05 = 11 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{220 \times 0,05 \times 0,95} \simeq 3,23.$$

(b) On a bien :

$n \geqslant 30, np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, donc la loi de X peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}((\mu, \sigma^2)$.

Donc la loi de $\dfrac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}$ peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

La probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 » se note

$\mathrm{P}(7 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 15)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{7-11}{3,23} \simeq -1,238 \\[2ex] \dfrac{15-11}{3,23} \simeq 1,238 \end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad \mathrm{P}(7 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 15) \approx \mathrm{P}(-1,24 < \mathrm{Z} < 1,24)$$

Au moyen de la table fournie :

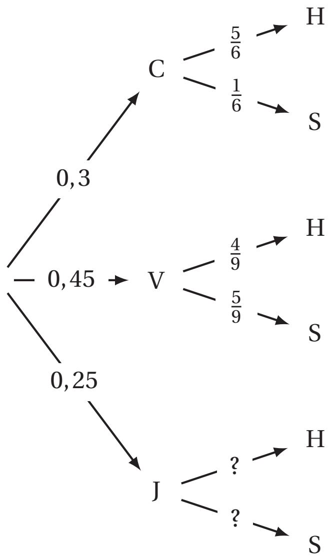
$$\mathrm{P}(-1,24 < \mathrm{Z} < 1,24) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1,24) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} < -1,24) = 0,892 - 0,108 = 0,784.$$

À 10^{-2} près, on a donc $\mathrm{P}(7 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 15) \simeq 0,78$.

Exercice 31 énoncé **Polynésie 2013**

Commun à tous les candidats

Partie 1



1. On veut $P(C\cap H) = P(C)\times P_C(H) = 0,3\times\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{4}$.

2. On sait que $P(H) = \dfrac{13}{20}$.

(a) Nous venons de calculer $P(C\cap H) = 0,25$ et
$P(C)\times P(H) = 0,3\times\dfrac{13}{20} = \dfrac{39}{200} \neq P(C\cap H)$
Les évènements C et H ne sont pas indépendants.

(b) d'après l'arbre, $P(H) = P(H\cap C) + P(H\cap V) + P(H\cap J)$.
On a donc $P(J\cap H) = \dfrac{13}{20} - \dfrac{1}{4} - 0,45\times\dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{5}$

et $P_J(H) = \dfrac{P(J\cap H)}{P(J)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$.

Partie 2

1. On répète 60 fois, de façon indépendantes, l'expérience « choisir un morceau de musique » qui compte 2 issues :

- « le morceau choisi est un morceau de musique classique » considéré comme succès, de probabilité 0,3
- ou pas...

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres 60 et 0,3.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60 est donc donné par :

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0,3 - 1,96\frac{\sqrt{0,3\times 0,7}}{\sqrt{60}}\ ;\ 0,3 + 1,96\frac{\sqrt{0,3\times 0,7}}{\sqrt{60}}\right] \\ &= [0,184\ ;0,416] \end{aligned}$$

2. La fréquence observée par Thomas est $\dfrac{12}{60} = 0,2$ est dans l'intervalle précédent. Donc NON, il n'y a pas de raison de penser que le baladeur est défectueux.

Partie 3

1. $P(180 \leqslant X \leqslant 220) = P(X\leqslant 220) - P(X \leqslant 180) \approx 0,841 - 0,159$. Réponse : $0,682$.

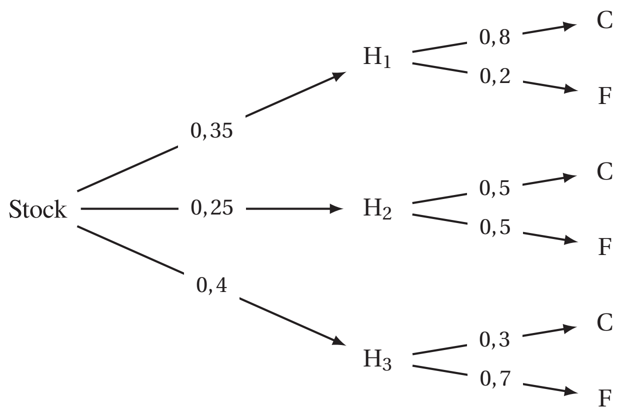
2. On veut $P(X > 4\times 60) = 1 - P(X\leqslant 240) \approx 1 - 0,977$. Réponse : $0,023$.

EXERCICE 32 énoncé **Métropole 2013**

Commun à tous les candidats

Puisque le choix de l'arbre se fait au hasard dans le stock de la jardinerie, on assimile les proportions données à des probabilités.

1. (a) L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



(b) On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, donc : $P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3$. On a donc $P(H_3 \cap C) = 0,12$.

(c) Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :

$P(C) = P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) =$

$0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525$.

(d) On cherche cette fois à calculer une probabilité conditionnelle :

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533.$$

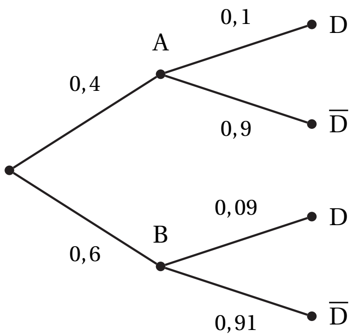
2. (a) Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est-il un conifère ?), avec une probabilité de succès de $0,525$ qui est répété 10 fois de façon indépendante (puisque l'on suppose que les choix successifs peuvent être assimilés à un tirage au sort avec remise), donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres 10 et $0,525$.

(b) La probabilité demandée ici est celle de l'événement $X = 5$, et donc : $P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times (1 - 0,525)^5$ Finalement $P(X = 5) \approx 0,243$.

(c) Cette fois, la probabilité demandée est celle de $X \leqslant 8$, qui est l'événement contraire de la réunion des événements disjoints $X = 9$ et $X = 10$. On a alors : $P(X \leqslant 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \approx 0,984$.

EXERCICE 33 énoncé **Métropole septembre 2013**

1.



(a) Voir ci-desssus.

(b) On demande $p(\text{A}\cap\text{D})$, selon l'arbre c'est $0,4\times 0,1$, donc $p(\text{A}\cap\text{D}) = 0,04$.

(c) On calcule aussi $p(\text{B}\cap\text{B})$ de la même façon, c'est $0,6\times 0,09 = 0,054$.

Enfin comme A et B sont des évènements formant une partition de l'ensemble des pièces,

$\text{P(D)} = p(\text{D}\cap(\text{A}\cup\text{B}))$
$p(\text{D}) = p((\text{D}\cap\text{A})\cup(\text{D}\cap\text{B})) = p(\text{D}\cap\text{A}) + p(\text{D}\cap\text{B})$ car les évènements $(\text{D}\cap\text{A})$ et $(\text{D}\cap\text{B})$ sont disjoints (= incompatibles) ainsi

$p(\text{D}) = 0,04 + 0,054 = 0,094$.

(d) On nous demande $p_{\text{D}}(\text{A})$, on utilise la formule :

$$p_{\text{D}}(\text{A}) = \frac{p(\text{D}\cap\text{A})}{p(\text{D})} = \frac{0,04}{0,094} = \frac{40}{94} = \frac{20}{47}.$$

2. (a) X_n est le compteur de pièces conformes ; on répète n fois la même expérience qui consiste à extraire une pièce ; elle est conforme : succès de probabilité $0,9$, elle est non conforme, probabilité $0,1$, chacune des n expériences est une expérience de Bernoulli, elles sont indépendantes entre elles puisque « on assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise. »

Donc X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,9$, notée $\mathcal{B}(n, 0,9)$.

(b) Si $n = 150 > 30$, $np = 135 > 5$ et $n(1-p) = 15 > 5$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique I est défini par $\text{I} = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$, on calcule avec $p = 0,9$ et $n = 150$ on trouve $1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \simeq 0,048$, donc $\text{I} \simeq [0,852\ ;\ 0,948]$.

(c) Ici on a $(150-21)$ pièces conformes donc $\text{F}_n = \frac{129}{150} = \frac{43}{50}$ soit $0,86$.

Au regard de l'intervalle de fluctuation de la question ci-dessus, ce test ne remet pas en cause le réglage de la machine A car $0,86 \in [0,852\ ;\ 0,948]$.

Exercice 34 énoncé **Nouvelle Calédonie 2013**

Commun à tous les candidats

Partie A

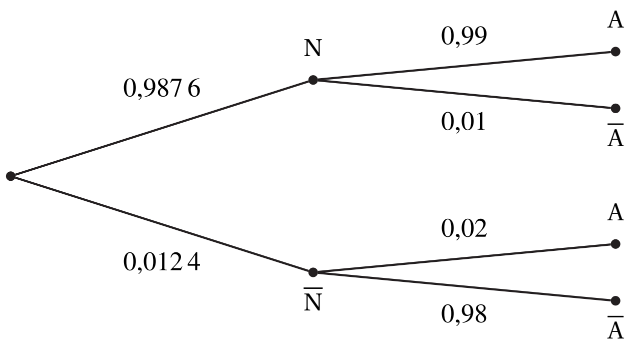
1. Une bille est dans la norme si son diamètre est entre 9 et 11 mm ; donc la probabilité qu'une bille soit dans la norme est

$P(9 \leqslant X \leqslant 11) = P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9)$.

La probabilité que la bille soit hors norme est donc :

$1 - (P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9)) = 1 - (0{,}99379034 - 0{,}00620967) = 1 - 0{,}98758067 = 0{,}01241933$; donc une valeur approchée à 0,000 1 de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4.

2. (a) On construit un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé :



(b) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) = P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) \\ &= 0{,}9876 \times 0{,}99 + 0{,}0124 \times 0{,}02 = 0{,}977724 + 0{,}000248 = 0{,}977972 \\ &\approx 0{,}9780 \end{aligned}$$

La probabilité de A est $0{,}9780$ (arrondie au dix-millième).

(c) On cherche : $P_A\left(\overline{N}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{N}\right)}{P(A)} = \dfrac{0{,}000248}{0{,}977972} \approx 0{,}0003$

La probabilité qu'une bille acceptée soit hors norme est 0,000 3 (arrondie au dix-millième).

Partie B

1. La probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4 : on admet que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

Donc la variable aléatoire Y qui, à tout sac de 100 billes, associe le nombre de billes hors norme, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}0124$.

2. L'espérance mathématique et l'écart type d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p sont respectivement np et $\sqrt{np(1-p)}$.

Donc $E(Y) = np = 100 \times 0{,}0124 = 1{,}24$

et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}0124 \times 0{,}9876} \approx 1{,}1066$.

3. La probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme est $P(Y = 2)$.

$$P(Y=2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \binom{100}{2} \times 0{,}0124^2 \times 0{,}9876^{98} =$$

$$50 \times 99 \times 0{,}0124^2 \times 0{,}9876^{98} \approx 0{,}224076 \approx 0{,}2241.$$

4. Un sac de billes contient au plus une bille hors norme est l'événement $(Y \leqslant 1)$.

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 1) &= P(Y=0) + P(Y=1) \\ &= \binom{100}{0} \times 0{,}0124^0 \times 0{,}9876^{100} + \binom{100}{1} \times 0{,}0124^1 \times 0{,}9876^{99} \\ &\approx 0{,}2871 + 0{,}3605 \approx 0{,}64768 \approx 0{,}6477. \end{aligned}$$

EXERCICE 35 énoncé **Amerique du Nord 2014**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie A : Conditionnement des pots

1. On veut $p(X \leqslant 49)$. Avec la calculatrice $p(X \leqslant 49) \approx 0.202$.

2. On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$

(a) La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.

(b) Une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0,06$ est $u \approx -1.555$.

(c) $Z = \dfrac{X-50}{\sigma'} \Leftrightarrow X = \sigma' Z + 50$

$p(X \leqslant 49) = 0,06 \Leftrightarrow p\left(\sigma' Z + 50 \leqslant 49\right) = 0,06 \Leftrightarrow p\left(Z \leqslant -\dfrac{1}{\sigma'}\right) = 0,06$

On doit donc avoir $-\dfrac{1}{\sigma'} = -1,555 \Leftrightarrow \sigma' = \dfrac{1}{1,555} \approx 0,643$

La valeur attendue de σ' est donc $0,643$.

3. (a) Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à tester si un pot est non conforme considéré comme succès de probabilité $0,06$,... ou pas.

On répète 50 fois cette épreuve. Y suit donc la loi binomiale de paramètres 50 et $0,06$.

(b) On calcule $p(Y \leqslant 2)$ avec la calculatrice. La probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes est d'environ $0,416$.

Partie B : Campagne publicitaire

On a $n = 140 > 30$, $f = \dfrac{99}{140}$ donc $nf = 99 > 5$ et $n(1-f) = 41 > 5$. Ainsi, $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit $[0,622 ; 0,792]$ est donc un intervalle de confiance au seuil de $95\ \%$ de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Exercice 2 **6 points**

EXERCICE 36 énoncé Amerique du Sud 2014

Commun à tous les candidats

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de ballons de football.
Cette entreprise propose deux tailles de ballons : une petite taille, et une taille standard.
Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).
En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle [410 ; 450] et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle [68 ; 70].

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.

On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.

À la calculatrice, on trouve $P(410 \leqslant X \leqslant 450) \approx 0,954$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.

On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ.

On sait que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation ce qui veut dire que $P(68 \leqslant Y \leqslant 70) \approx 0,97$.

Si Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 69$ et d'écart type σ, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y-69}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

De plus : $68 \leqslant Y \leqslant 70 \iff -1 \leqslant Y-69 \leqslant 1 \iff -\dfrac{1}{\sigma} \leqslant \dfrac{Y-69}{\sigma} \leqslant \dfrac{1}{\sigma} \iff -\dfrac{1}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{\sigma}$

On a donc $P(68 \leqslant Y \leqslant 70) = 0,97 \iff P\left(-\dfrac{1}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{1}{\sigma}\right) = 0,97$.

Or, d'après le texte, $P(-2,17 \leqslant Z \leqslant 2,17) = 0,97$.

On peut déduire que $\dfrac{1}{\sigma} = 2,17$ et donc que $\sigma \approx 0,46$.

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation.
Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard. Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$ d'une fréquence est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a $n = 250$ et $p = 0,98$.

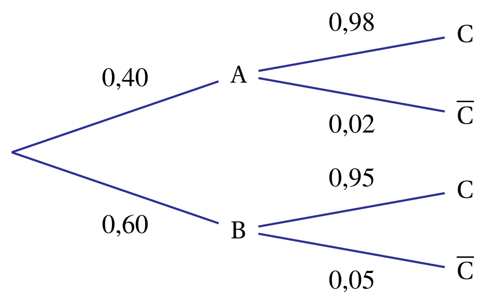
- $250 \geqslant 30$;
- $np = 250 \times 0,98 = 245 \geqslant 5$;
- $n(1-p) = 250 \times 0,02 = 5 \geqslant 5$

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$ de la fréquence de conformité des ballons est :

$$I = \left[0,98 - 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}\,;\, 0,98 + 1,96\frac{\sqrt{0,98 \times 0,02}}{\sqrt{250}}\right] = [0,962\,;\,0,998]$$

Il y a 233 ballons conformes sur 250 ce qui fait une fréquence de $f = \dfrac{233}{250} = 0,932$.
$0,932 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'affirmation de l'entreprise.
L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard.
On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.
On considère les évènements :
A : « le ballon de football est de petite taille »,
B : « le ballon de football est de taille standard »,
C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et $\overline{C}$, l'évènement contraire de C.

1. On représente la situation par un arbre pondéré :



2. « Le ballon est de petite taille et il est conforme à la règlementation » correspond à l'événement $A \cap C$. D'après l'arbre : $P(A \cap C) = 0,40 \times 0,98 = 0,392$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = 0,40 \times 0,98 + 0,60 \times 0,95 = 0,392 + 0,570 = 0,962$

4. Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation.

On cherche la probabilité qu'il soit de petite taille, autrement dit on cherche $P_{\overline{C}}(A)$.

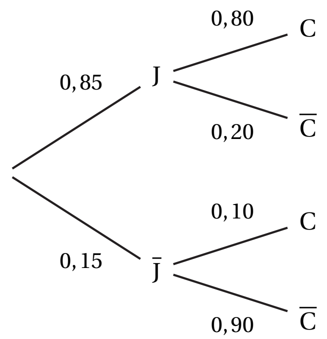
$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,962 = 0,038$ donc $P_{\overline{C}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,40 \times 0,02}{0,038} \approx 0,211$

EXERCICE 37 énoncé **Antilles 2014**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. (a) L'arbre pondéré est le suivant :



(b) D'après l'arbre :

$$p\left(\overline{J}\cap C\right)=0{,}15\times 0{,}10=0{,}015.$$

(c) J et $\overline{J}$ formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$p(C)=p\left(\overline{J}\cap C\right)+p(J\cap C)=0{,}015+0{,}85\times 0{,}80=0{,}695.$$

(d) Il s'agit de calculer une probabilité conditionnelle :

$$p_C(\overline{J})=\frac{p\left(\overline{J}\cap C\right)}{p(C)}=\frac{0{,}015}{0{,}695}\approx 0{,}0216.$$

2. À l'aide de la calculatrice : $p(87\leqslant X\leqslant 89)\approx 0{,}2417$.

3. De même $p(X\geqslant 91)\approx 0{,}3085$.

Partie B

1. L'échantillon est de taille $n=120$. L'hypothèse formulée est que la probabilité p qu'une huître possède une masse supérieure à 91 g est $p=0{,}60$. On a alors :

- $n\geqslant 30$;
- $np=72\geqslant 5$;
- $n(1-p)=48\geqslant 5$.

Les trois conditions pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont réalisées, et cet intervalle I est donné par :

$$I=\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=[0{,}5123\ ;\ 0{,}6877]$$

2. La fréquence observée d'huîtres pesant plus de 91 g est $F=\dfrac{65}{120}\approx 0{,}5417$.
On a $F\in I$, l'hypothèse selon laquelle $p=0{,}60$ ne peut être rejetée.

EXERCICE 38 énoncé **Antilles septembre 2014**

Commun à tous les candidats

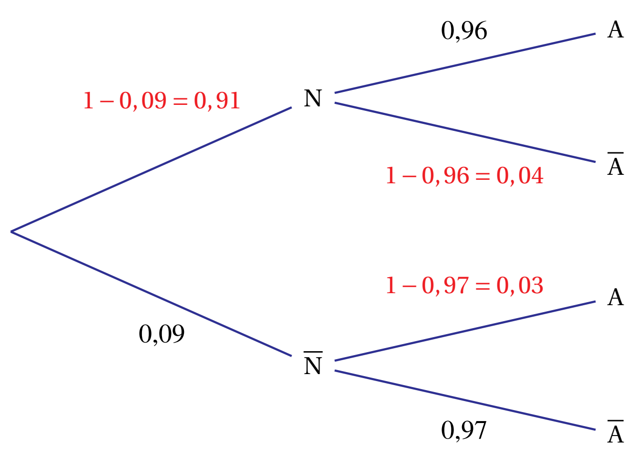
Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

1. On construit un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment :



2. La probabilité qu'une peluche soit acceptée est $P(A)$.

D'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(N \cap A) + P(\overline{N} \cap A)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(N \cap A) = P(N) \times P_N(A) = 0,91 \times 0,96 = 0,8736 \\ P\left(\overline{N} \cap A\right) = P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A) = 0,09 \times 0,03 = 0,0027 \end{array}\right\} \Longrightarrow P(A) = 0,8736 + 0,0027 = 0,8763$$

3. La probabilité qu'une peluche qui a été acceptée soit aux normes est $P_A(N)$:

$$P_A(N) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{0,8736}{0,8763} \approx 0,9969$$

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur. On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$.

Si D suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $P(Deqa) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

Donc $P(Deq4) = 0,5 \iff 1 - \mathrm{e}^{-4\lambda} = 0,5 \iff 0,5 = \mathrm{e}^{-4\lambda} \iff \ln 0,5 = -4\lambda \iff \lambda = -\dfrac{\ln 0,5}{4}$

2. On prendra ici $\lambda = 0,1733$.

Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.

La probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires est la probabilité conditionnelle $P_{D \geqslant 3}(D \geqslant 3 + 5)$.

On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » donc que, pour tous réels strictement positifs s et t : $P_{D \geqslant t}(D \geqslant s + t) = P(D \geqslant s)$.

Donc $P_{D \geqslant 3}(D \geqslant 3 + 5) = P(D \geqslant 5) = 1 - P(Deq5) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-5\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-5 \times 0,1733} \approx 0,4204$

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. D'après le cours, la variable aléatoire $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1.

2. On sait que $P(J \leqslant 385) = 0,975$.

$Jeq385 \iff J - 358eq27 \iff \dfrac{J - 358}{\sigma}eq\dfrac{27}{\sigma}$ car σ est un nombre strictement positif.

On cherche donc σ pour que $P\left(Xeq\dfrac{27}{\sigma}\right)eq0,975$ sachant que X suit la loi normale centrée réduite.

La calculatrice donne $\dfrac{27}{\sigma} \approx 1,96$ ce qui équivaut à $\sigma \approx 13,77$. On prendra donc $\sigma = 14$.

EXERCICE 39 énoncé **Asie 2014**

Commun à tous les candidats

On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française ; cette variable suit la loi normale de moyenne $\mu = 45,5$ et d'écart type σ.
On note Z la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-45,5}{\sigma}$.

1. (a) D'après le cours, la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite, d'espérance 0 et d'écart type 1.

(b) D'après le cours, si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ, $P(X \leqslant \mu) = 0,5$.

Cela résulte de la symétrie de la courbe de Gauss autour de la droite d'équation $x = \mu$.

2. En prenant $\sigma = 3,8$, $\mu - 2\sigma = 45,5 - 2 \times 3,8 = 37,9$ et $\mu + 2\sigma = 45,5 + 2 \times 3,8 = 53,1$.

Or on sait que si la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres μ et σ :
$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ donc $P(37,9 \leqslant X \leqslant 53,1) \approx 0,95$.

On définit les événements :

M **:** « l'individu est porteur de la maladie V » ;

S **:** « l'individu a plus de 50 ans » ;

H **:** « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

1. (a) On sait que 90 % des porteurs de la maladie V ont plus de 50 ans donc $P_M(S) = 0,9$.

$P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S) = 0,01 \times 0,9 = 0,009$.

(b) La probabilité qu'un individu ayant plus de 50 ans soit porteur de la maladie V est
$P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)}$.

On sait que 30 % de la population a plus de 50 ans, donc $P(S) = 0,3$.

On déduit : $P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,009}{0,3} = 0,03$.

2. (a) $P(H) = P(X > \alpha) = 1 - P(X \leqslant \alpha) = 1 - 0,995 = 0,005$

(b) L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α (événement $\overline{H}$) ; la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est $P_{\overline{H}}(M)$.

$P_{\overline{H}}(M) = \dfrac{P(M \cap \overline{H})}{P(\overline{H})}$

On sait que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V, donc $P_H(M) = 0,6$. On en déduit que $P(H \cap M) = P(H) \times P_H(M) = 0,05 \times 0,6 = 0,003$.

D'après la formule des probabilités totales, $P(M) = P(M \cap H) + P(M \cap \overline{H})$ donc
$P(M \cap \overline{H}) = P(M) - P(M \cap H) = 0,01 - 0,003 = 0,007$.

$P_{\overline{H}}(M) = \dfrac{P(M \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \dfrac{0,007}{0,995} \approx 0,007$.

La probabilité qu'un individu soir porteur de la maladie sachant qu'il a un taux d'hématocrite inférieur ou égale à α est de $0,007$.

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence p de la maladie V dans un échantillon de taille n est : $I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

$p = P(M) = 0,01$ et $n = 1000$ donc :

$I = \left[0,01 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,01 \times 0,99}}{\sqrt{1000}}\,;\, 0,01 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,01 \times 0,99}}{\sqrt{1000}}\right] \approx [0,003\,;\,0,017]$

2. Dans un échantillon aléatoire de 1 000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V donc $f = \dfrac{14}{1000} = 0,014$.

Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % donc l'échantillon étudié peut être considéré comme « normal » ; on peut conclure que le gène ne semble pas avoir d'influence sur la maladie.

EXERCICE 40 énoncé Centres Étrangers 2014

Commun à tous les candidats

Question 1

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,150 **c.** 0,462 **d.** 0,700

Avec des notations évidentes : $p_B(F) = \dfrac{p(B \cap F)}{p(B)}$.

Or $p(B) = p(B \cap F) + p(B \cap H) = 0,75 \times \frac{1}{5} + 0,25 \times \frac{7}{10} = 0,15 + 0,175 = 0,325$.

D'où $p_B(F) == \dfrac{0,15}{0,325} = \dfrac{150}{325} = \dfrac{6}{13} \approx 0,462$.

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à $0,3$. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,900 **b.** 0,092 **c.** 0,002 **d.** 0,267

On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.

On a donc $p(X = 3) = \binom{10}{3} 0,3^3 \times (1 - 0,3)^{10-3} = 120 \times 0,027 \times 0,823\,543 \approx 0,266\,8 \approx 0,267$.

Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \dfrac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,250 **c.** 0,472 **d.** 0,528

On a $p(X \geqslant 6) = 1 - \displaystyle\int_0^6 \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}t} \, dt = 1 - \left[-e^{-\frac{1}{8}t}\right]_0^6 = e^{-\frac{1}{8} \times 6} \approx 0,472\,3 \approx 0,472$.

Question 4

Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 200 g.

La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à $0,954$.

La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième :

a. 0,16 **b.** 0,32 **c.** 0,84 **d.** 0,48

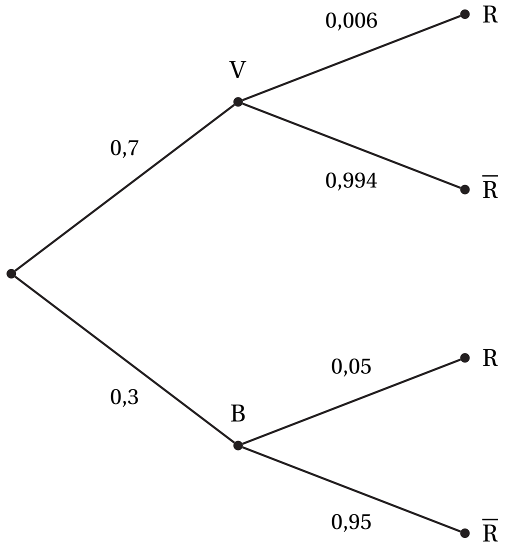
On sait que si X suit la loi normale $\mathcal{N}(200\,;\,\sigma^2)$, alors

$p(200 - 2\sigma \leqslant X \leqslant 200 + 2\sigma) = 0,954$. On en déduit que $2\sigma = 16 \iff \sigma = 8$.

On a donc $p(X \leqslant 192) = 0,5 - p(192 \leqslant X \leqslant 200) \approx 0,16$.

Exercice 41 énoncé **Liban 2014**

Partie A

1. 

2. D'après l'arbre ci-dessus $P(V\cap R)=0{,}7\times 0{,}006=0{,}0042$.

3. D'après l'arbre ci-dessus, la probabilité de l'évènement R est

$$P(R)=P(V\cap R)+P(B\cap R)=0{,}0042+0{,}3\times 0{,}05=0{,}0192$$

4. On cherche à déterminer $P_R(B)$:

$$P_R(B)=\frac{P(B\cap R)}{P(R)}=\frac{0{,}3\times 0{,}05}{0{,}0192}=0{,}78125$$

Partie B : le vélo

1. Cela revient à calculer $P(15\leqslant T\leqslant 20)$. À la calculatrice, nous obtenons, $P(15\leqslant T\leqslant 20)=0{,}946$

2. Il sera en retard au lycée si il met plus de 20 minutes pour effectuer le trajet. On cherche donc la probabilité de l'évènement « $T\geqslant 20$ ». À la calculatrice, nous obtenons

$$P(T\geqslant 20)=0{,}0062$$

3. On cherche la durée maximale de son temps de parcours T_0 (en minutes) tel que $P(T\leqslant T_0)=0{,}9$. À la calculatrice, nous obtenons

$$P(T\leqslant 18{,}5379)=0{,}9$$

Ce qui signifie qu'il a une probabilité de $0{,}9$ de mettre moins de 18 minutes et 30 secondes (environ). Il peut donc partir au plus tard à 8 heures moins 18 minutes et 30 secondes, soit à 7 h 41 minutes et 30 secondes. À une minute près, il peut partir au maximum à 7 h 41, de sorte à avoir une probabilité d'arriver à l'heure de $0{,}9$

Partie C : le bus

1. D'après le cours Z' suit une loi normale centrée-réduite.

2. Puisque $P(T'\geqslant 20)=0{,}05$, il vient

$$P\left(\frac{T'-15}{\sigma'}\geqslant\frac{20-15}{\sigma'}\right)=0{,}05\Leftrightarrow P\left(Z'\geqslant\frac{5}{\sigma'}\right)=0{,}05$$

À la calculatrice, en considérant une loi normale centrée-réduite Z', on trouve que

$$P\left(Z'\geqslant 1{,}6449\right)=0{,}05$$

D'où

$$\frac{5}{\sigma'}=1{,}6449$$

et donc

$$\sigma'=\frac{5}{1{,}6449}=3{,}04\quad\text{à}\quad 0{,}01\quad\text{près}$$

Exercice 42 énoncé **Métropole 2014**

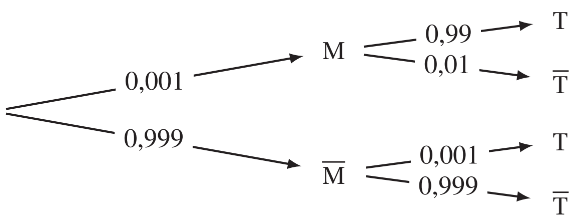
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Dans cette question (et la suivante), le choix de la personne dans la population étant fait au hasard, on est dans une situation d'équiprobabilité et donc les proportions sont assimilées à des probabilités.

(a) Le pourcentage de personnes malades étant de 0,1%, la probabilité de l'événement M sera donc de 0,001.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



(b) On applique la loi des probabilités totales, les événements M et $\overline{M}$ constituant une partition de l'univers :

$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,001$

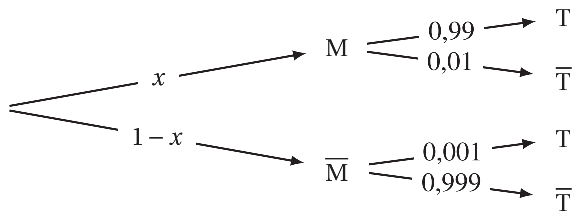
$P(T) = 0,001 \times (0,99 + 0,999) = 1,989 \times 10^{-3}$.

On obtient donc bien la valeur attendue.

(c) Puisque l'affirmation fait référence à la probabilité d'être malade *sachant que* le test est positif, on va calculer la probabilité conditionnelle suivante : $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{0,001 \times 0,99}{1,989 \times 10^{-3}} = \dfrac{0,99}{0,99 + 0,999} \approx 0,498$.

La probabilité est inférieure à 0,5 (le dénominateur étant supérieur au double du numérateur), l'affirmation est correcte : si une personne obtient un test positif, alors la probabilité qu'elle soit effectivement malade est (légèrement) inférieure à 0,5, soit un peu moins d'une chance sur deux.

2. On reprend la même démarche, mais en modifiant les probabilités portées sur les branches de l'arbre qui devient :



On a alors : $P(T) = 0,99x + 0,001 \times (1 - x) = 0,001 + 0989x$ et donc :

$P_T(M) = \dfrac{0,99x}{0,001 + 0,989x}$.

On rappelle que x est une proportion, donc un nombre réel compris entre 0 et 1, les probabilités données ci-dessus sont donc bien comprises entre 0 et 1 également.

La question est alors de résoudre l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned}
P_T(M) \geqslant 0,95 &\iff \frac{0,99x}{0,001 + 0,989x} \geqslant 0,95 \\
&\iff 0,99x \geqslant 0,95 \times (0,001 + 0,989x) \quad \text{car } 0,001 + 0,989x \geqslant 0. \\
&\iff 0,99x \geqslant 0,00095 + 0,93955x \\
&\iff 0,05045x \geqslant 0,00095 \\
&\iff x \geqslant \frac{0,00095}{0,05045} \quad \text{car } 0,05045 \text{ est positif.}
\end{aligned}$$

Le test sera donc commercialisable à condition que la proportion x soit supérieure à $\dfrac{0,00095}{0,05045} = \dfrac{19}{1009} \approx 0,01883$, c'est à dire quand le pourcentage de la population atteint par la maladie est supérieur à environ 1,88%.

Partie B

1. (a) On utilise la calculatrice, qui donne : $P(890 \leqslant X \leqslant 920) \approx 0,92$ à 10^{-2} près.

(b) On pose Z, variable aléatoire définie par : $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$. Comme X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, alors Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

On peut donc utiliser le nombre $u_{0,01} \approx 2,58$ tel que :

$P(-u_{0,01} \leqslant Z \leqslant u_{0,01}) \approx 1 - 0,01 = 0,99$ à 10^{-3} près.

$$\begin{aligned}
\text{Or : } -2,58 \leqslant Z \leqslant 2,58 &\iff -2,58 \leqslant \frac{X - 900}{7} \leqslant 2,58 \\
&\iff -18,06 \leqslant X - 900 \leqslant 18,06 \\
&\iff 900 - 18,06 \leqslant X \leqslant 900 + 18,06
\end{aligned}$$

Puisque le nombre h demandé est entier, on arrondit à $h = 18$.

On vérifie bien à la calculatrice que $P(882 \leqslant X \leqslant 918) \approx 0,9899 \approx 0,990$ à 10^{-3} près.

2. Puisque la sélection de l'échantillon est assimilée à un tirage au sort avec remise, on a donc 1000 répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $0,97$, ce qui conduit donc à un schema de Bernoulli qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1000\ ;\ 0,97)$. Le paramètre $n = 1000$ étant suffisamment élevé, on en déduit que la fréquence de succès pour ce schema de Bernoulli est comprise dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% : $\left[0,97 - 1,96 \times \dfrac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}\ ;\ 0,97 + 1,96 \times \dfrac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}\right]$. Le calcul des valeurs approchées donne, à 10^{-4} près : $[0,9594\ ;\ 0,9806]$.

Cela signifie que la proportion de comprimés conformes dans un lot de 1000 comprimés est comprise dans l'intervalle ci-dessus, avec une probabilité de 0,95. Comme la proportion de comprimés conformes constatée dans cet échantillon est de $\dfrac{1000-53}{1000} = 0,947$, c'est à dire en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique déterminé précédemment, on en déduit que les réglages faits par le laboratoire ont une forte probabilité d'être à revoir. La probabilité qu'ils soient corrects bien que l'échantillon donne une proportion de comprimés conformes en dehors de l'intervalle de fluctuation n'est que de $0,05$.

Exercice 43 énoncé **Métropole 2015**

Partie 1

1. (a) Soient c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.

Par définition, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} = \left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d$
$= -e^{-\lambda d} - \left(-e^{-\lambda c}\right) = \boxed{e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}}$.

(b) $P(X > 20) = 0,05 \iff P(0 \leqslant X \leqslant 20) = 0,95 \iff e^{-\lambda\times 0} - e^{-\lambda\times 20} = 0,95 \iff 1 - e^{-20\lambda} = 0,95 \iff e^{-20\lambda} = 0,05 \iff -20\lambda = \ln 0,05 \iff \lambda = \dfrac{\ln 0,05}{-20} \approx \boxed{0,150}$.

(c) On sait que l'espérance d'une loi exponentielle est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \approx \boxed{6,676}$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

(d) $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-10\lambda} - e^{-20\lambda} = e^{-1,5} - e^{-3} \approx \boxed{0,173}$.

(e) $P(X > 18) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 18) = e^{-18\lambda} = e^{-27} \approx \boxed{0,067}$.

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type $1,95$.

(a) $P(20 \leqslant Y \leqslant 21) \approx \boxed{0,015}$.

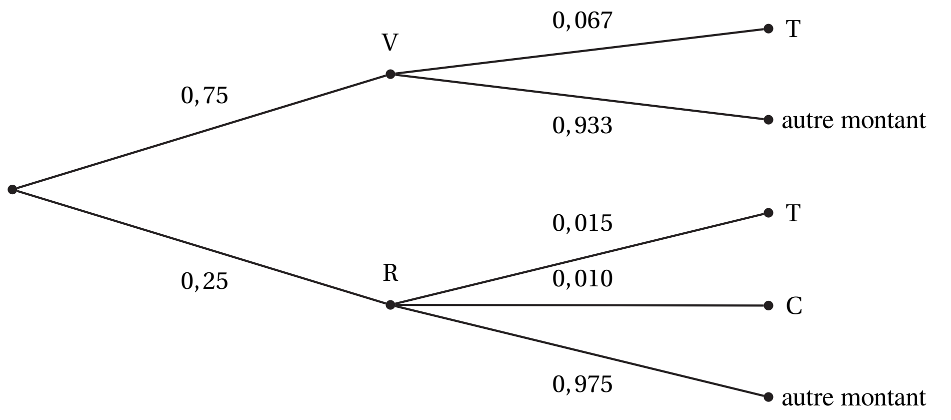
(b) $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leqslant Y \leqslant 21) \approx \boxed{0,010}$.

Partie 2

1. Notons :

- R l'évènement « le bon d'achat est rouge ».
- V l'évènement « le bon d'achat est vert »
- T : l'évènement « avoir un un bon d'achat de trente € ».
- C : l'évènement « avoir un un bon d'achat de cent € ».
- A : l'évènement « avoir un un bon d'achat d'une autre valeur ».
- S : l'évènement « avoir un un bon d'achat d'un montant supérieur ou égal à 30 € ».

,L'arbre correspondant est alors :



On a : $P_R(S) = P_R(T \cup C) = p_R(T) + P_R(C) = 0,015 + 0,010 = \boxed{0,025}$.

2. $P(S) = P(R \cap S) + P(V \cap S) = 0,75 \times 0,067 + 0,25 \times 0,025 = 0,0566 \approx \boxed{0,057}$.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. La probabilité d'avoir un bon d'un montant supérieur ou égal à 30 €est $p = 0,057$.

La fréquence observée est $f = \dfrac{6}{200} = \dfrac{3}{100} = 0,03$.

La taille de léchantillon est $n = 200$.

On a $n = 200 \geqslant 30$; $np = 11,4 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 188,6 \geqslant 5$.

On peut donc utiliser la formule donnant l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

$$I_{200} = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \approx \boxed{[0,024\ ;\ 0,090]}.$$

$f = 0,03 \in I$. Les doutes du directeur du magasin ne sont donc pas justifiés au seuil de confiance de 95 %.

Exercice 44 énoncé **Métropole septembre 2014**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients. On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

(a) Le temps moyen d'attente est de 10 minutes donc $E(X) = 10$; or $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc $\lambda = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

(b) La probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes est $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.

Comme X suit la loi exponentielle de paramètre $0,1$ on sait que :

$$P(10 \leqslant X \leqslant 20) = \int_{10}^{20} 0,1\mathrm{e}^{-0,1t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-0,1t}\right]_{10}^{20} = -\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1} \approx 0,2325$$

(c) Un client attend depuis 10 minutes. La probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table est la probabilité qu'il attende au moins 15 minutes, sachant qu'il a déjà attendu 10 minutes ; c'est-à-dire : $P_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15)$

On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » donc que, pour tous réels strictement positifs s et t : $P_{X\geqslant t}(X \geqslant s+t) = P(X \geqslant s)$.

On en déduit que $P_{X\geqslant 10}(X \geqslant 15) = P(X \geqslant 5)$.

On sait que, pour une loi exponentielle de paramètre λ, $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$ donc
$P(X \leqslant 5) = 1 - \mathrm{e}^{-0,1\times 5} = 1 - \mathrm{e}^{-0,5}$; $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right) = \mathrm{e}^{-0,5} \approx 0,6065$

La probabilité cherchée est $0,6065$.

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

(a) La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.

Une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ a pour espérance mathématique np et pour écart type $\sqrt{np(1-p)}$.

Donc $E(Y) = n \times 0,8 = 0,8n$ et $\sigma(Y) = \sqrt{n \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{0,16n}$

(b) Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.

À la calculatrice, on trouve $p_1 = P(Z \leqslant 71) \approx 0,96$.

(c) On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'évènement $\{Z \leqslant 70\}$. Le restaurant a reçu 81 réservations.

On cherche donc la probabilité que plus de 70 clients se présentent, c'est-à-dire $P(Y > 70)$. Or $P(Y > 70) = 1 - P(Y \leqslant 70) = 1 - p_1 \approx 0,04$.

La probabilité cherchée est $0,04$.

Exercice 45 énoncé Nouvelle Calédonie 2014

Commun à tous les candidats

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros. On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,003$.

On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot. On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. La variable aléatoire donne le nombre de cônes défectueux et on suppose que les 2 000 tirages sont indépendants les uns des autres. De plus, la probabilité qu'un cône soit défectueux est de $0,003$.

On peut donc dire que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2000$ et $p = 0,003$.

2. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.

L'événement « un lot n'est pas échangé » se produit quand le nombre de cônes défectueux est inférieur ou égal à 11, donc correspond à $X \leqslant 11$.

$$P(X \leqslant 11) = \sum_{k=0}^{11} P(X = k)$$

On calcule les probabilités (arrondies à 10^{-5}) :

k	$P(X = k)$	$P(X \leqslant k)$
0	0,00246	0,00246
1	0,01478	0,01724
2	0,04446	0,06170
3	0,08910	0,15080
4	0,13385	0,28465
5	0,16078	0,44544
6	0,16086	0,60630
7	0,13788	0,74419
8	0,10336	0,84755
9	0,06884	0,91639
10	0,04124	0,95763
11	0,02245	0,98007

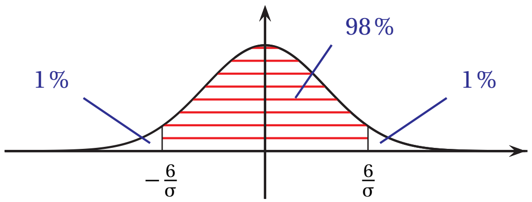
Donc la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé est $0,980$ au millième.

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.
On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(110\ ;\ \sigma^2\right)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle [104 ; 116].
On sait que la probabilité de l'événement « une glace est commercialisable » est 0,98, ce qui signifie que $P(104 \leqslant Y \leqslant 116) = 0,98$.
D'après le cours, on sait que, si Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 110$ et σ, alors la loi $Z = \dfrac{Y - 110}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite (de moyenne 0 et d'écart type 1).

$104 \leqslant Y \leqslant 116 \iff -6 \leqslant Y - 110 \leqslant 6 \iff -\dfrac{6}{\sigma} \leqslant \dfrac{Y - 110}{\sigma} \leqslant \dfrac{6}{\sigma}$ donc

$P(104 \leqslant Y \leqslant 116) = 0,98 \iff P\left(-\dfrac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{6}{\sigma}\right) = 0,98$

On peut représenter la situation par le graphique ci-dessous :



On peut en déduire que $P\left(Z \leqslant \frac{6}{\sigma}\right) = 0,99$.

On peut le démontrer en utilisant un résultat connu du cours : $P(-t \leqslant Z \leqslant t) = 2P(Z \leqslant t) - 1$.

On cherche donc la valeur t telle que $P(Z \leqslant t) = 0,99$ sachant que la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite ; on trouve à la calculatrice $t \approx 2,326$.

On a donc : $\frac{6}{\sigma} \approx 2,236 \iff \frac{6}{2,236} \approx \sigma \iff \sigma \approx 2,58$.

Une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'événement « la glace est commercialisable » soit égale à 0,98 est $2,6$.

Vérification

Si Y *suit la loi normale de paramètres* $\mu = 110$ *et* $\sigma = 2,6$ *alors* $P(104 \leqslant Y \leqslant 116) \approx 0,979$.

Si on prend $\sigma = 2,5$ *on trouve* $P(104 \leqslant Y \leqslant 116) \approx 0,984$.

Enfin en prenant $\sigma = 2,7$ *on trouve* $P(104 \leqslant Y \leqslant 116) \approx 0,974$.

La valeur approchée à 10^{-1} *près de* σ *qui donne la probabilité la plus proche de 0,98 est* $2,6$.

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% d'un pourcentage p dans une population de taille n est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a $n = 900$ et $p = 0,84$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% du pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces en 2000 est :

$$I = \left[0,84 - 1,96\frac{\sqrt{0,84 \times 0,16}}{\sqrt{900}} ; 0,84 + 1,96\frac{\sqrt{0,84 \times 0,16}}{\sqrt{900}}\right] \approx [0,816 ; 0,864]$$

En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces, ce qui fait une proportion de $f = \frac{795}{900} \approx 0,883$.

Or $f \notin I$ donc on ne pas affirmer, au niveau de confiance de 95 %, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre 2000 et 2010.

EXERCICE 46 énoncé **Nouvelle Calédonie mars 2014**

Commun à tous les candidats

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

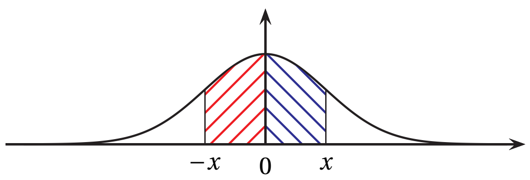
Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction f représente la fonction de densité de probabilité pour la loi normale centrée réduite.

2. $H(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$; et d'après le cours $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$.

3. D'après la relation de Chasles : $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais la fonction f est positive donc $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire du domaine hachuré en rouge sur la figure ci-dessous, tandis que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire du domaine hachuré en bleu.



De plus la fonction f est paire, donc ces deux aires sont égales.

Enfin $H(x)$ est l'aire du domaine situé sous la courbe représentant f hachuré en rouge et en bleu sur la figure.

Donc $H(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. On sait que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée la fonction f ; donc la fonction H définie par $H(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée la fonction $2f$.

Or $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} > 0$ sur $\mathbb{R}$; comme $H' = 2f$, $H'(x) > 0$ pour tout réel x, et donc la fonction H est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. On établit le tableau de variations de H sur $[0\,;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$H'(x)$	+	
$H(x)$	$0 \nearrow$	1

5. En prenant α dans l'intervalle $]0\,;1[$, on a aussi $1-\alpha$ dans l'intervalle $]0\,;1[$; on complète le tableau de variations de H :

x	0	χ_α	$+\infty$
$H(x)$	$0 \nearrow$	$1-\alpha$	$\nearrow 1$

D'après le tableau de variations, il existe un réel strictement positif unique noté χ_α tel que $H\left(\chi_\alpha\right) = 1-\alpha$, donc tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.
60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.
Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'événement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A est $P_D(A)$.

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)} = \frac{0,6 \times 0,046}{0,05} = 0,552$$

2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) \iff 0,05 = 0,6 \times 0,046 + P(B \cap D) \iff 0,05 - 0,0276 = P(B \cap D)$$

Donc $P(B \cap D) = 0,0224$.

3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, la probabilité qu'une pipette présente un défaut est $P_B(D)$. Or $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$.

$$P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{0,0224}{0,4} = 0,056.$$

Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, le pourcentage de pipettes présentant un défaut est donc de $5,6\,\%$.

1. On cherche la probabilité qu'une pipette prise au hasard soit conforme, soit $P(98 < X < 102)$, en sachant que X suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1,0424$.

À la calculatrice, on trouve $0,9499$ à 10^{-4} près.

En utilisant la table fournie :

$$P(98 < X < 102) = P(X < 102) - P(X \leqslant 98) \approx 0,97494 - 0,02506 \approx 0,94988$$

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100 et on suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

(a) Comme on peut supposer que les tirages sont indépendants, la variable aléatoire Y_n suit une loi binomiale de paramètres $n \geqslant 100$ et $p = 0,05$.

(b) On sait que $n \geqslant 100$ donc $n \geqslant 30$.

$n \geqslant 100$ et $p = 0,05$ donc $np \geqslant 100 \times 0,05 \iff np \geqslant 5$

$p = 0,05$ donc $1 - p = 0,95$; $n(1-p) \geqslant 100 \times 0,95 \iff n(1-p) \geqslant 95$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

Les trois conditions sont vérifiées.

(c) Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $95\,\%$ de la fréquence des pipettes non conformes dans un échantillon est :

$$\left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,05(1-0,05)}}{\sqrt{n}} \,;\, 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,05(1-0,05)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{n}} \,;\, 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{n}}\right]$$

EXERCICE 47 énoncé **Polynésie 2014**

Commun à tous les candidats

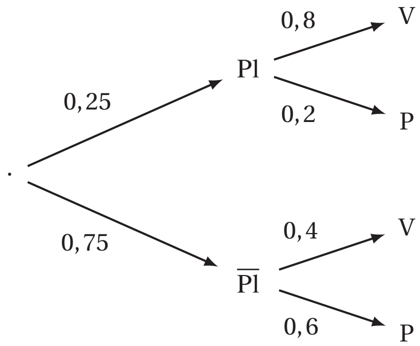
1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.

Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.

Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à $0,6$.

Affirmation n° 1 : VRAIE

Arbre de probabilités :



Pl : il pleut ; V : en voiture ; P : à pied

On cherche $p(\text{V})$:

$$\begin{aligned} p(\text{V}) &= p(\text{V}\cap\text{Pl}) + p(\text{V}\cap\overline{\text{Pl}}) \\ &= p_{\text{Pl}}(\text{V}) \times p(\text{Pl}) + p_{\overline{\text{Pl}}}(\text{V}) \times p(\overline{\text{Pl}}) \\ &= 0,8\times 0,25 + 0,4\times 0,75 = 0,5 \end{aligned}$$

« Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B.

Affirmation n° 2 : VRAIE

A et B sont indépendants signifie que $p(\text{A}\cap\text{B}) = p(\text{A})\times p(\text{B})$:

$$p(\text{A}) = p(\text{A}\cap\text{B}) + p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) = p(\text{A})\times p(\text{B}) + p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) \Longrightarrow p(\text{A}\cap\overline{\text{B}}) = p(\text{A}) - p(\text{A})\times p(\text{B}) = p(\text{A})\left(1-p(\text{B})\right) = p(\text{A})\times p(\overline{\text{B}})$$

« Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{\text{B}}$ sont aussi indépendants. »

3. On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,7$.

Affirmation n° 3 : FAUX

$$p(\text{T}\leqslant 5) = \int_0^5 0,7\text{e}^{-0,7x}\,\text{d}x = \left[-\text{e}^{-0,7x}\right]_0^5 = 1-\text{e}^{-0,7\times 5} \approx 0,97$$

La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est :

$$p(\text{T} > 5) = 1 - p(\text{T}\leqslant 5) \approx 0,03$$

Affirmation n° 4 : FAUX

$$\text{E(X)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,7} \simeq 1,42$$

« Le temps d'attente moyen à ce guichet est d'environ 1 minute et demi. »

4. Affirmation n° 5 : VRAIE

La proportion de personnes de groupe sanguin A+ dans la population française est $p = 0,39$.

La taille de l'échantillon est $n = 183 \geqslant 30$;

$np = 183\times 0,39 = 71,37 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 183\times(1-0,39) = 111,63 \geqslant 5$.

Donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 5 % de la proportion de personnes ayant un groupe sanguin A+ :

$$\begin{aligned} \text{I} &= \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0,39 - 1,96\frac{\sqrt{0,39\times 0,61}}{\sqrt{183}}\,;\, 0,39 + 1,96\frac{\sqrt{0,39\times 0,61}}{\sqrt{183}}\right] \\ &\approx [0,319\,;\,0,461] \end{aligned}$$

Or $0,34\in\text{I}$, donc on ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population.

EXERCICE 48 énoncé **Pondichéry 2014**

Commun à tous les candidats

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

D'après le cours : $P(X \in [a;b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ où $a > 0$ et $b > 0$.

Donc pour $t > 0$, $P(X \leqslant t) = e^0 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$.

$$P(X \leqslant 2) = 0,15 \iff 1 - e^{-\lambda \times 2} = 0,15 \iff 0,85 = e^{-2\lambda} \iff \ln(0,85) = -2\lambda \iff \frac{\ln(0,85)}{-2} = \lambda$$

$$\iff \lambda = -\frac{\ln(0,85)}{2}$$

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2. (a) Pour $t > 0$: $P(X \geqslant t) = 1 - P(X < t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$.

Donc $P(X \geqslant 3) = e^{-3 \times 0,081} \approx 0,78$

(b) Pour tous réels positifs t et h : $P(X \geqslant t) = e^{-\lambda t}$ et $P(X \geqslant t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = \frac{P\left[(X \geqslant t) \cap (X \geqslant t+h)\right]}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geqslant h)$$

(c) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans.

La probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans est $P_{X \geqslant 3}(X \geqslant 3+2)$.

D'après le cours : $P_{X \geqslant 3}(X \geqslant 3+2) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0,15 = 0,85$.

(d) D'après le cours, pour une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Donc $E(X) = \frac{1}{0,081} \approx 12,35$.

Ce qui veut dire que la durée moyenne de vie d'un moteur est de $12,35$ années.

3. L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard.

Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

sous les trois conditions : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

L'échantillon de l'enquête est de taille $n = 800$ et l'entreprise annonce que le pourcentage de moteurs défectueux est égal à 1 % donc $p = 0,01$.

Regardons si les trois conditions sont vérifiées :
$n = 800 \geqslant 30$, $np = 800 \times 0,01 = 8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 800 \times 0,99 = 792 \geqslant 5$.

L'intervalle est : $I = \left[0,01 - 1,96\frac{\sqrt{0,01(1-0,01)}}{\sqrt{800}}\,;\, 0,01 + 1,96\frac{\sqrt{0,01(1-0,01)}}{\sqrt{800}}\right] \approx [0,003\,;\,0,017]$.

On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux sur 800, ce qui fait une proportion de $\frac{15}{800} = 0,01875$; or $0,01875 \notin I$ donc le résultat de ce test remet en question l'annonce de l'entreprise A.

EXERCICE 49 énoncé AmeriqueNordS2015-exo-3.tex

1. À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(98 \leqslant X \leqslant 102) \simeq 0{,}9545$ à 10^{-4} près.

2. Centrons et réduisons l'évènement afin d'obtenir l'intervalle équivalent portant sur la variable centrée réduite :

$$\begin{aligned} 98 \leqslant X \leqslant 102 &\Longleftrightarrow 98-100 \leqslant X-100 \leqslant 102-100 \\ &\Longleftrightarrow \frac{-2}{\sigma} \leqslant \frac{X-100}{\sigma} \leqslant \frac{2}{\sigma} \end{aligned}$$

Posons $Z = \dfrac{X-100}{\sigma}$. Nous savons que $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\ 1)$ et que $P\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) = 2P\left(Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) - 1$.

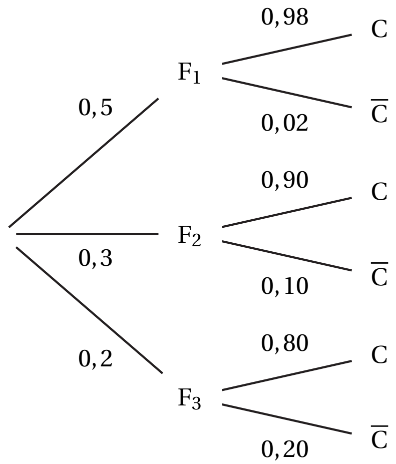
Cherchons u tel que $2P(Z \leqslant u) - 1 = 0{,}97$, soit $P(Z \leqslant u) = 0{,}985$. À la calculatrice, on obtient $u \simeq 2{,}1701$ à 10^{-4} près.

Ainsi, $\dfrac{2}{\sigma} = u$, ce qui donne $\sigma = \dfrac{2}{u} \simeq 0{,}9216$ à 10^{-4} près.

Remarque. *Il faut absolument retenir le lien entre la probabilité sur un intervalle centré* $P(Z \in [-u_\alpha\ ;\ u_\alpha]) = 1-\alpha$ *et la valeur de la fonction de répartition :*
$P(Z \leqslant u_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
On peut retrouver rapidement cette formule en faisant un petit dessin permettant de déterminer les probabilités des queues de distribution, toutes deux égales à $\dfrac{\alpha}{2}$.

1. On cherche à déterminer $P_C(F_1) = \dfrac{P(C \cap F_1)}{P(C)}$.

Faisons un arbre afin de modéliser la situation. On donne les probabilités à partir des hypothèses de l'énoncé.



Calculons $P(C)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

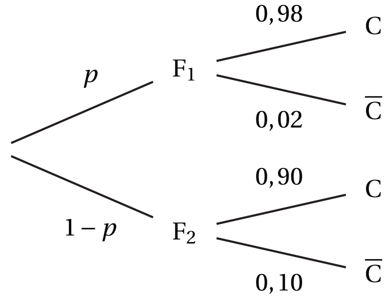
$$P(C) = P_{F_1}(C)P(F_1) + P_{F_2}(C)P(F_2) + P_{F_3}(C)P(F_3)$$

On obtient, après calcul, $P(C) = 0{,}92$.

D'autre part, $P(C \cap F_1) = P_{F_1}(C)P(F_1)$, ce qui donne, après calcul, $P(C \cap F_1) = 0{,}49$.

Finalement, on obtient $P_C(F_1) = \dfrac{0{,}49}{0{,}92} \simeq 0{,}5326$ à 10^{-4} près.

2. Faisons un arbre qui résume la nouvelle situation :



En reprenant la formule des probabilités totales, on cherche p tel que $P(C) = 0{,}92$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} 0{,}98p + 0{,}9(1-p) = 0{,}92 &\Longleftrightarrow 0{,}08p = 0{,}02 \\ &\Longleftrightarrow p = \frac{0{,}02}{0{,}08} = 0{,}25 \end{aligned}$$

L'entreprise doit donc acheter au minimum 25% de ses fèves au premier fournisseur.

EXERCICE 50 énoncé **Antilles 2015**

Commun à tous les candidats

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

1. D'après l'indication :

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \left[-\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \left[-\left(0+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda\times 0}\right] =$$

$$\frac{1}{\lambda} - \left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}\left[1 - x\lambda e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}\right]$$

2. De $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on en déduit avec $\lambda > 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$ et aussi

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\lambda e^{-x} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

1. Sur le graphique de l'annexe (à rendre avec la copie) :

(a) Voir la surface hachurée sur l'annexe à la fin.

(b) On lit comme ordonnée à l'origine $\lambda = 0,5$.

2. On suppose que $E(X) = 2$.

(a) $E(X) = 2$ signifie que la durée de vie d'un composant est en moyenne égale à 2 ans.

(b) On a vu que $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2 \iff \lambda = 0,5$.

(c) On a :

$$P(X \leqslant 2) = \int_0^2 \lambda e^{-0,5t}\,dt = \left[-e^{-0,5t}\right]_0^2 = -e^{-0,5\times 2} - \left(e^{-0,5\times 0}\right) = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} \approx 0,632 \approx 0,63$$

au centième près. Ce résultat est la probabilité qu'un composant ait une durée de vie inférieure à l'espérance $E(X)$.

(d) Il faut trouver :

$$P_{(X\geqslant 1)}(X \geqslant 3) = P_{(X\geqslant 1)}(X \geqslant 2) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - \left(1 - e^{-1}\right) = e^{-1} \approx 0,368.$$

Partie C

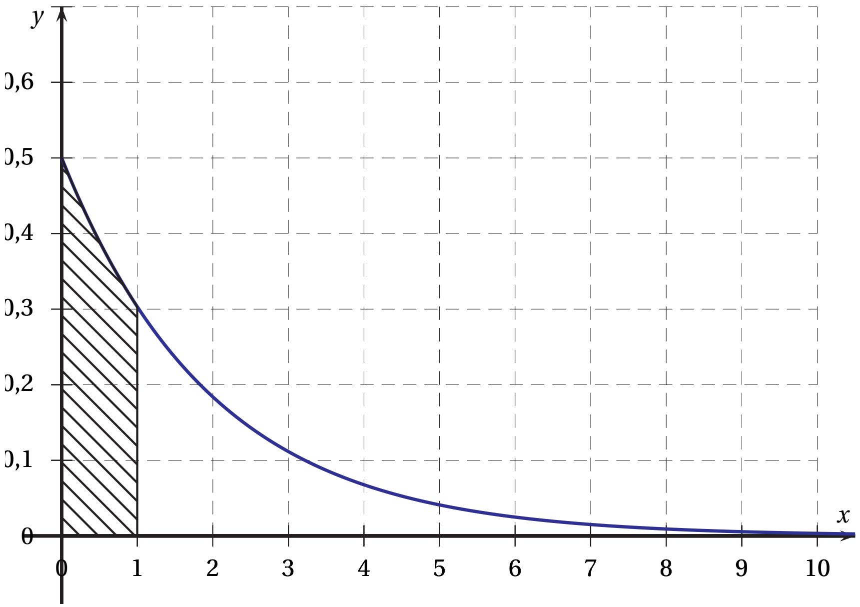
1. Les évènements D_1 et D_2 sont indépendants, donc :

$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0,39 \times 0,39 = 0,1521$.

2. Ici la probabilité est égale à :

$P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = 0,6279$.

ANNEXE



EXERCICE 51 énoncé Asie 2015

Commun à tous les candidats

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. À chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de flèches atteignant la cible.

Pour un tir, la probabilité du succès est $p = 0,8$.

On répète 4 fois de façon indépendante le tir, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$.

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, on a : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On cherche ici :

$$P(X \geqslant 3) = P(x=3) + P(X=4) = \binom{4}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^1 + \binom{4}{4} \times 0,8^4 \times 0,2^0 = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192 \approx 0,819$$

2. La concurrent tire n flèches de façon indépendante ; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.

Pour atteindre en moyenne 12 fois la cible, il faut que l'espérance mathématique de la variable X soit égale à 12. Une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ a pour espérance mathématique $E(X) = np$.

On doit donc chercher n pour que $n \times 0,8 = 12 \iff n = \dfrac{12}{0,8} \iff n = 15$.

Il faut donc que le concurrent prévoie 15 flèches pour atteindre en moyenne la cible 12 fois.

On suppose que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 10.

1. Pour que la flèche soit hors de la bande grisée, il faut que $(X < -10)$ ou $(X > 10)$.

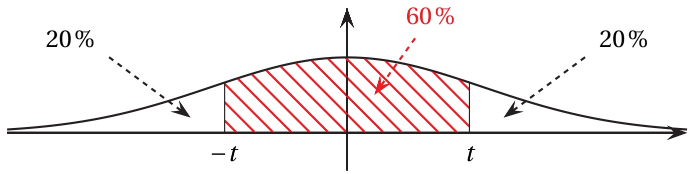
On cherche donc $P\left((X < -10) \cup (X > 10)\right)$ qui est égale à $1 - P(-10 \leqslant X \leqslant 10)$.

X suit la loi normale de moyenne $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 10$, et on sait que pour toute loi normale, $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$ donc $P(-10 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0,683$.

On peut donc dire que la probabilité que la flèche soit hors de la bande grisée est approximativement de $1 - 0,683 = 0,317$.

On peut également trouver ce résultat en utilisant la calculatrice.

2. On cherche un nombre positif t tel que $P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0,6$. Cela correspond au schéma suivant, en tenant compte des propriétés de symétrie de la fonction de densité de la loi normale :



$$\begin{aligned} P(-t \leqslant X \leqslant t) = 0,6 &\iff & P(X \leqslant t) - P(X \leqslant -t) &= 0,6 \\ &\iff & P(X \leqslant t) - P(X \geqslant t) &= 0,6 \\ &\iff & P(X \leqslant t) - (1 - P(X \leqslant t)) &= 0,6 \\ &\iff & 2P(X \leqslant t) - 1 &= 0,6 \\ &\iff & 2P(X \leqslant t) &= 1,6 \\ &\iff & P(X \leqslant t) &= 0,8 \end{aligned}$$

À la calculatrice, on trouve $t \approx 8,416$.

Les deux droites verticales délimitant la bande grise ont pour équations $x = -8,4$ et $x = 8,4$; alors la probabilité d'atteindre cette bande grisée est approximativement de 0,6.

La durée de vie (exprimée en heures) du panneau électrique affichant le score des concurrents est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$ (exprimé en h^{-1}).

D'après le cours, on peut dire que $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ et que $P(T \geqslant t) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$.

1. La probabilité que le panneau fonctionne au moins 2 000 heures est $P(T \geqslant 2000)$.

$P(T \geqslant 2000) = e^{-10^{-4} \times 2000} \approx 0,819$

2. *Restitution organisée des connaissances*

Dans cette question, λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de la variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, est définie par : $E(T) = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt$.

(a) On considère la fonction F, définie pour tout réel t par : $F(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$F'(x) = -1 \times e^{-\lambda t} + \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right) \times (-\lambda)\, e^{-\lambda t} = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} = f(t)$$

Donc F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(b) L'espérance mathématique de la variable aléatoire T est :

$$E(T) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \left(F(x) - F(0)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\left[\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}\right] - \left[-\frac{1}{\lambda} \times 1\right] \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} -x e^{-\lambda x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} \text{ donc } E(T) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right)$$

- $$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \lambda x = +\infty \\ \text{On pose } X = \lambda x \\ \text{On sait que } \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\lambda x}}{\lambda x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = 0$$

- $$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \lambda x = +\infty \\ \text{On pose } X = \lambda x \\ \text{On sait que } \lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} = 0$$

- Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$ et donc $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

L'espérance de durée de vie du panneau électrique affichant le score des concurrents est $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$ soit 10 000 heures.

Exercice 52 énoncé Centres Étrangers 2015

Commun à tous les candidats

1. On a $p = 0,03$ et $n = 500$. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \approx [0,015\,;\,0,045].$$

La fréquence observée est $f = \dfrac{19}{500} = 0,038$; $f \in I$ donc ce contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux.

2. La fréquence de cadenas défectueux dans l'échantillon de taille $n = 500$ observé est $f = \dfrac{39}{500} = 0,078$.

Les trois conditions $n = 500 \geqslant 30$, $nf = 39 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 461 \geqslant 5$ sont vérifiées.

Donc un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est donné par :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;\, 0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0,033\,;\,0,123].$$

1. Le nombre de cadenas *premier prix* est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 725$ et d'écart type $\sigma = 25$. On cherche $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.

Or $725 = \mu - \sigma$ et $775 = \mu + \sigma$; on cherche donc $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$ dont on connaît une valeur approchée au centième : 0,68 (d'après le cours).

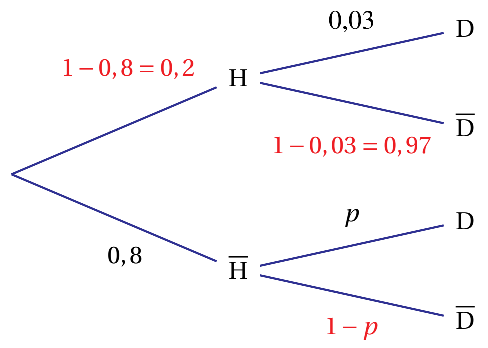
Pour avoir le résultat au millième, on utilise la calculatrice : $P(725 \leqslant X \leqslant 775) \approx 0,683$

2. On cherche le plus petit entier n tel que $P(X > n) < 0,05$; or $P(X > n) < 0,05 \iff P(X \leqslant n) \geqslant 0,95$

Pour $P(X \leqslant b) = 0,95$, on obtient à la calculatrice : $b \approx 791,12$.

Donc le plus petit nombre n de cadenas nécessaires en début de mois pour avoir une probabilité de rupture de stock inférieure à $0,05$ est $n = 792$.

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. D'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(D \cap H) + P(D \cap \overline{H}) = 0,2 \times 0,03 + 0,8 \times p = 0,006 + 0,8p$

On sait que 7 % des cadenas sont défectueux donc $P(D) = 0,07$.

Donc : $0,07 = 0,006 + 0,8p \iff \dfrac{0,07 - 0,006}{0,8} = p \iff p = 0,08$

Le résultat obtenu est cohérent avec la question A.2 car $0,08 \in [0,033\,;\,0,123]$.

3. Le cadenas prélevé est en bon état.

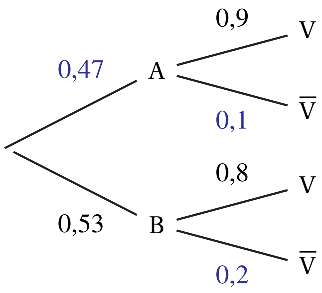
La probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme* est $P_{\overline{D}}(H)$:

$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(H \cap \overline{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,2 \times 0,97}{1 - 0,07} = \frac{0,194}{0,93} \approx 0,209$$

Exercice 53 énoncé **Liban 2015**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Arbre de probabilités :



En bleu les données de l'énoncé, les autres valeurs étant obtenues par complément à 1.

2. (a) D'après la formule des probabilités totales :

$p(V) = p(A\cap V)+p(B\cap V) = p(A)\times p_A(V)+p(B)\times p_B(V) = 0,47\times 0,9+0,53\times 0,8 = 0,423+0,424 = 0,847$.

(b) $p_V(A) = \dfrac{p(A\cap V)}{p(V)} = \dfrac{0,423}{0,847} \approx 0,4994$ à 10^{-4} près.

3. Soit E l'évènement « laperont vote effectivement pour le candidat A ».

$E = (A\cap V)\cup\left(B\cap\overline{V}\right)$ (évènements disjoints), donc :

$p(E) = p(A\cap V)+p\left(B\cap\overline{V}\right) = 0,47\times 0,9+0,53\times 0,2 = 0,423+0,106 = 0,529$.

4. La fréquence observée est $f = 0,529$ pour un sondage réalisé auprès d'un échantillon de $n1200$ personnes.

On vérifie que les conditions d'application de l'intervalle de confiance sont remplies :

$n = 1200 > 30$; $nf = 1200\times 0,529 = 634,8 >\geqslant 5$; $n(1-f) = 1200\times 0,471 = 565,2 \geqslant 5$.

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est alors :

$$I_c = \left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,529-\frac{1}{\sqrt{1200}}\ ;\ 0,529+\frac{1}{\sqrt{1200}}\right]$$

$$I_c \approx [0,5001\ ;\ 0,5579]$$

à 10^{-4} près. Ceci correspond à une fourchette [50,01 % ; 55,79 %]. Dans 95 % des cas le candidat A sera élu. Il peut légitimement croire en sa victoire.

5. Lors du sondage téléphonique il y a eu 10 contacts par demi-heure, soit 20 contacts par heure.

La probabilité que la personne appelée accepte de répondre est $p = 0,4$.

Soit n le nombre de personnes contactées par téléphone ; soit elle accepte de répondre avec une probabilité de 0,4,soit elle ne l'accepte pas.

On suppose que chaque personne répond indépendamment des autres.

Il s'agit d'un schéma de Bernouilli dont les paramètres sont $\mathcal{B}(n\ ;\ 0,4)$.

Obtenir un échantillon de 1 200 personnes qui acceptent de répondre, c'est considérer que l'espérance mathématique est $E(X) = 1200$. On cherche alors n tel que :

$E(X) = n\times 0,4 = 1200$, soit $n = 3000$.

Avec 3 000 personnes contactées, on peut espérer que 1 200 acceptent de répondre.

Le temps moyen nécessaire est donc de $t = \dfrac{3000}{20} = 150$ heures.

EXERCICE 54 énoncé Polynésie 2015

Commun à tous les candidats

1. On sait que $P\left(\mu_1 - 2\sigma_1 \leqslant X_1 \leqslant \mu_1 + 2\sigma_1\right) \approx 0,95$, soit $P(1,53 \leqslant X_1 \leqslant 1,77) \approx 0,95$.

2. (a) On sait que $P(X_2 \geqslant 170) = 0,5 + P(170 \leqslant X_2 \leqslant 175) \approx 0,5 + 0,18 \approx 0,68$.

(b) Soit F l'évènement « la personne choisie est une femme » et S l'évènement « la personne choisie mesure plus de 1,70 m ». On a $P(F) = 0,52$ et donc $P\left(\overline{F}\right) = 0,48$. La probabilité cherchée est $P_S(F)$.

De même qu'à la question **2. a.** la probabilité qu'une femme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre est

$P(X_1 \geqslant 170) = 0,5 - P(165 \leqslant X_2 \leqslant 170) \approx 0,2$. Soit $P_F(S) \approx 0,2$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(S) = P(S \cap F) + P\left(S \cap \overline{F}\right) = P(F) \times P_F(S) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(S) \approx 0,52 \times 0,2 + 0,48 \times 0,68 \approx 0,4304$.

Donc $P_S(F) = \dfrac{P(S \cap F)}{P(S)} = \dfrac{P_F(S) \times P(F)}{P(S)} \approx \dfrac{0,2 \times 0,52}{0,4304} \approx \dfrac{0,104}{0,4304} \approx 0,24$.

EXERCICE 55 énoncé Polynésie septembre 2015

Partie A

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\text{ng.mL}^{-1}\right)$, d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.

La probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1} est $P(T \geqslant 60)$.

À la calculatrice, on trouve : $P(T \geqslant 60) \approx 0,006$.

2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL^{-1} et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL^{-1}.

On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL^{-1} chez une personne atteinte par la maladie étudiée.

On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

D'après le texte, $\mu' = 50$; et il faut chercher σ' pour que $P(T' \leqslant 43) = 0,1$.

D'après le cours, on sait que si T' suit la loi normale de paramètres $\mu' = 50$ et σ', alors la variable aléatoire $Z' = \dfrac{T' - 50}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite (moyenne 0 et d'écart type 1).

$T' \leqslant 43 \iff T' - 50 \leqslant -7 \iff \dfrac{T'-50}{\sigma'} \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}$ donc

$P(T' \leqslant 43) = 0,1 \iff P\left(\dfrac{T'-50}{\sigma'} \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}\right) = 0,1 \iff P\left(Z' \leqslant \dfrac{-7}{\sigma'}\right) = 0,1$ sachant que la variable aléatoire Z' suit la loi normale centrée réduite.

À la calculatrice, pour $P(Z' \leqslant \beta) = 0,1$, on trouve $\beta \approx -1,2816$; on a donc : $-1,2816 = \dfrac{-7}{\sigma'}$ ce qui donne $\sigma' \approx 5,46$.

La variable aléatoire T' suit donc la loi normale de moyenne $\mu' = 50$ et d'écart type $\sigma' \approx 5,46$.

Partie B

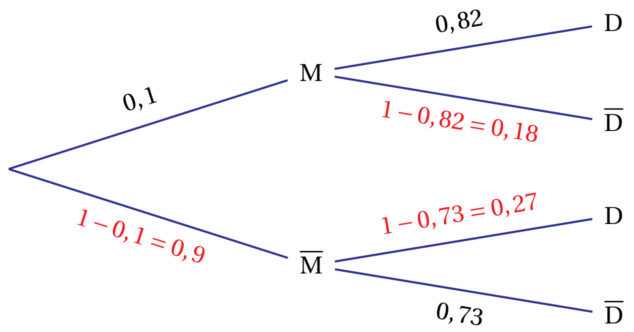
Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL^{-1}.
Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- M l'évènement « le patient est atteint par la maladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

On admet que :

- 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;
- 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.
On regroupe ces données dans un arbre pondéré :



1. On cherche $P(D)$; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(M \cap D) + P(\overline{M} \cap D) = P(M) \times P_M(D) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(D)$$
$$= 0,1 \times 0,82 + 0,9 \times 0,27 = 0,082 + 0,243 = 0,325$$

2. $P_{\overline{D}}(M) = \dfrac{P(\overline{D} \cap M)}{P(\overline{D})}$

$P(\overline{D} \cap M) = P(M) \times P_M(\overline{D}) = 0,1 \times 0,18 = 0,018$ et $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,325 = 0,675$

Donc $P_{\overline{D}}(M) = \dfrac{0,018}{0,675} \approx 0,027$

La probabilité que le patient soit malade sachant que son test de dépistage est négatif est d'environ $0,027$.

3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Il faut donc déterminer $P_D(M)$.

$P_D(M) = \dfrac{P(D \cap M)}{P(D)} = \dfrac{0,082}{0,325} \approx 0,252$

Une chance sur 4 correspond à 25 % soit 0,25 donc le malade a un peu plus d'une chance sur 4 d'avoir contracté la maladie.

Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.

Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.

Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.

On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun. La proportion p de patients malades qui ont un dépistage positif est égale à 0,82 ; l'échantillon est de taille $n = 300$.

$n = 300 \geqslant 30$; $np = 300 \times 0,82 = 246 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 300 \times 0,18 = 54 \geqslant 5$

Les conditions sont donc vérifiées pour que l'on établisse un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la fréquence des patients malades qui ont un test positif dans un échantillon de taille 300 :

$$\begin{aligned}
I &= \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\
&= \left[0,82 - 1,96\frac{\sqrt{0,82 \times 0,18}}{\sqrt{300}} ; 0,82 + 1,96\frac{\sqrt{0,82 \times 0,18}}{\sqrt{300}}\right] \\
&= [0,77 ; 0,87].
\end{aligned}$$

Le dépistage se révèle positif pour 74 % de personnes à jeun soit avec une fréquence de $f = 0,74$.

$f = 0,74 \notin I$ donc il ne faut pas pratiquer le test sur des personnes qui ne sont pas à jeun.

Exercice 56 énoncé **Pondichéry 2015**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

1. (a) Par symétrie $P(104 \leqslant X) = 0,16$ et donc $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2 \times 0,16 = 1 - 0,32 = 0,68$.

(b) On vient donc de trouver que $P(\mu - 20 \leqslant X \leqslant \mu + 20) = 0,68$: donc $\sigma \approx 20$.

2. (a) La variable Z est centrée et réduite : elle suit donc une loi normale centrée réduite.

(b) On part de $P(X \leqslant 64) = 0,16$, d'où $P(X \leqslant 64) = P(X - 84 \leqslant -20) =$
$P\left(\dfrac{X-84}{\sigma} \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right) = P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right)$.

Finalement $P\left(Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,16$

(c) Le résultat précédent entraîne que $-\dfrac{20}{\sigma} \approx -0,9945 \iff \sigma \approx \dfrac{20}{0,9945}$ soit $\sigma \approx 20,111$ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.

(a) Il faut trouver :

$P(24 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,115$ (calculatrice)

(b) On a $P(X > 120) = 0,5 - P(84 \leqslant X \leqslant 120) \approx 0,037$.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

1. (a) Si G est la variable aléatoire donnant le nombre de clients ayant pris l'extension de garantie, puisque les tirages sont indépendants et de même probabilité 0,115, G suit une loi binomiale $\mathcal{B}(12,\ 0,115)$.

La probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie est égale à :
$P(G=3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times (1-0,115)^9 \approx 0,1114$ soit 0,111 au millième près.

(b) On a $P(G \geqslant 6) = 1 - P(G \leqslant 5) \approx 0,001$ au millième près.

2. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;

- Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65

(a) • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;

- Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65.

La variable aléatoire Y prend donc deux valeurs 65 et -334 avec les probabilités respectives 0,885 et 0,115.

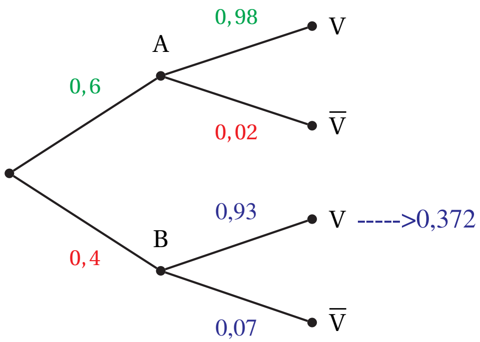
(b) On a $E(Y) = 65 \times 0,885 + (-334) \times 0,115 = 19,115 \approx 19,12$ €au centime près. L'offre est donc avantageuse pour l'entreprise puisque celle gagne presque 20 € par client.

Exercice 57 énoncé **Amerique du Nord 2016**

Partie A

1. On peut construire un arbre pour illustrer la situation :

D'après l'énoncé on a $P(V) = 0,96$ $P(A) = 0,6$ et $P_A(V) = 0,98$
Puis on complète une partie de l'arbre
les données en bleu sont acquises après la question 2



On cherche $P(A \cap V)$

$P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0,588$

2. A et B forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales

donc on a $P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V) = 0,96$

On en déduit que $P(B \cap V) = 0,96 - P(A \cap V) = 0,372$.

Puis $P_B(V) = \dfrac{P(B \cap V)}{P(B)} = \dfrac{0,372}{0,4} = 0,93$.

La probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B est égale à $0,93$.

3. On cherche $P_{\overline{V}}(B)$

$P_{\overline{V}}(B) = \dfrac{P\left(B \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \dfrac{0,028}{1 - 0,96} = 0,7$. Donc le technicien a raison

Partie B

1. On cherche $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) \approx 0,93$. Cette valeur correspond bien à $P_B(V)$

2. $Y \hookrightarrow \left(1 ; \sigma'^2\right) \Longrightarrow \dfrac{Y-1}{\sigma'} \hookrightarrow (0 ; 1)$

Soit $Z = \dfrac{Y-1}{\sigma'}$ alors $0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1 \Longleftrightarrow -\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}$

$P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98 \Longleftrightarrow P\left(-\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98 \Longleftrightarrow P\left(Z \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,99$

d'après la calculatrice on trouve $\dfrac{0,1}{\sigma'} \approx 2,326$. On en déduit que $\sigma' \approx 0,043$.

Partie C

1. (a) La probabilité qu'une bille tirée au hasard dans la production journalière est $p = \dfrac{1}{5} = 0,2$ car les 5 couleurs sont équiprobables.

On répète 40 fois de manières indépendantes une expérience n'ayant que deux issues : bille noire ou non dont la probabilité du succès est $p = 0,2$.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de billes noires dans le sac alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(40 ; 0,2)$

On cherche $P(X = 10) = \dbinom{40}{10} \times 0,2^{10} \times 0,8^{30} \approx 0,107$

(b) On cherche si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

On se trouve bien dans les conditions d'application puisque $n = 40 \geqslant 30$

$np = 8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 32 \geqslant 5$

L'intervalle de fluctuation asymptotique seuil de 95% est

$I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,2 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,16}}{\sqrt{40}} ; 0,2 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,16}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0,076 ; 0,324]$

La fréquence observée de lancers à droite est $f = \dfrac{12}{40} = 0,3 \in I$

il n'y a donc pas de raison de douter du réglage de la machine qui teinte les billes.

2. Pour un sac contenant n billes, la probabilité qu'au moins une soit noire est

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dbinom{n}{0} \times 0,2^0 \times 0,8^n = 1 - 0,8^n$

On doit donc résoudre $1 - 0,8^n \geqslant 0,99 \Longleftrightarrow 0,8^n \leqslant 0,01 \leqslant n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \Longleftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$

or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6$

L'entreprise doit donc mettre au minimum 21 billes dans chaque sac pour atteindre l'objectif.

EXERCICE 58 énoncé **AmeriqueSudS2016-exo-5.tex**

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique. Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ.

1. Le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$ ce qui veut dire que $P(D < 48) = 1 - 0{,}7977 = 0{,}2023$.

$D < 48 \iff D - 50 < -2 \iff \dfrac{D-50}{\sigma} < -\dfrac{2}{\sigma}$

D'après le cours, si D suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{D-\mu}{\sigma}$ suit la loi nromale centrée réduite.

On cherche donc le réel β tel que $P(Z < \beta) = 0{,}2023$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite.

À la calculatrice, on trouve $\beta \approx -0{,}8334340$ donc $\sigma \approx -\dfrac{2}{-0{,}8334340} \approx 2{,}3997$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2{,}4$.

2. La probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois est $P(45 \leqslant D \leqslant 52)$.

On trouve à la calculatrice 0,779 1 comme valeur arrondie à 10^{-4} de la probabilité cherchée.

3. La probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois est $P_{(D\geqslant 48)}(D \geqslant 48+6)$:

$P_{(D\geqslant 48)}(D \geqslant 54) = \dfrac{P\left((D\geqslant 54)\cap(D\geqslant 48)\right)}{P(D\geqslant 48)}$

$P\left((D\geqslant 54)\cap(D\geqslant 48)\right) = P(D\geqslant 54) \approx 0{,}04779$ et $P(D\geqslant 48) \approx 0{,}79767$

$P_{(D\geqslant 48)}(D \geqslant 54) \approx \dfrac{0{,}04779}{0{,}79767} \approx 0{,}0599$

La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois est 0,059 9.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tous réels a et b strictement positifs : $P(a \leqslant T \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

1. Le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$ donc λ vérifie l'égalité $\displaystyle\int_0^{24} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 0{,}03$ ou encore $1 - e^{-24\lambda} = 0{,}03$. On résout cette équation d'inconnue λ :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-24\lambda} = 0{,}03 &\iff 0{,}97 = e^{-24\lambda} \\ &\iff \ln(0{,}97) = -24\lambda \\ &\iff -\frac{\ln(0{,}97)}{24} = \lambda \end{aligned}$$

La valeur de λ telle que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$ est $\lambda = -\dfrac{\ln(0{,}97)}{24}$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0{,}00127$.

2. $P(24 \leqslant T \leqslant 48) = e^{-24\lambda} - e^{-48\lambda} \approx 0{,}0291$

La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois est 0,029 1.

3. (a) • $P(T \leqslant b) = 1 - e^{-b\lambda} \implies P(T \geqslant b) = 1 - P(T \leqslant b) = 1 - \left(1 - e^{-b\lambda}\right) = e^{-b\lambda}$

• $h > 0 \implies (T \geqslant t+h) \cap (T \geqslant t) = (T \geqslant t+h)$

$$P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = \frac{P\left((T\geqslant t+h)\cap(T\geqslant t)\right)}{P(T\geqslant t)} = \frac{P(T\geqslant t+h)}{P(T\geqslant t)} = \frac{e^{-(t+h)\lambda}}{e^{-t\lambda}} = \frac{e^{-t\lambda}\times e^{-h\lambda}}{e^{-t\lambda}} = e^{-h\lambda} = P(T \geqslant h)$$

Donc la variable aléatoire T est sans vieillissement.

(b) Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. La probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants est $P_{T\geqslant 36}(T \geqslant 36+12)$ qui est égal à $P(T \geqslant 12)$ d'après la question précédente.

$P(T \geqslant 12) = e^{-12\lambda} \approx 0{,}9849$

La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que le module électronique fonctionne encore 12 mois, sachant qu'il a déjà fonctionné 36 mois, est égale à 0,984 9.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(D \geqslant 48)$ et $(T \geqslant 48)$ sont indépendants donc

$$P((D \geqslant 48) \cap (T \geqslant 48)) = P(D \geqslant 48) \times P(T \geqslant 48).$$

La probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois est

$$P((D \geqslant 48) \cap (T \geqslant 48)) = P(D \geqslant 48) \times P(T \geqslant 48) = 0{,}7977 \times e^{-48\lambda} \approx 0{,}7505$$

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.
$P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$ donc $p = 0{,}7977$
$n = 300 \geqslant 30$; $np = 239{,}31 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 60{,}69 \geqslant 5$ donc on peut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0{,}7977 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}7977(1-0{,}7977)}}{\sqrt{300}} \ ;\ 0{,}7977 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}7977(1-0{,}7977)}}{\sqrt{300}}\right] \\ &\approx [0{,}7522\ ;\ 0{,}8432] \end{aligned}$$

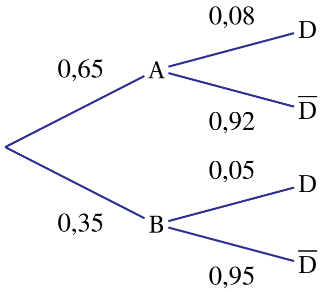
La fréquence de climatiseurs ayant encore leur module mécanique en fonctionnement après 4 ans (ou 48 mois) est $f = \dfrac{246}{300} = 0{,}82$.
Or $f \in I$ donc il n'y a pas lieu de remettre en cause le résultat donné par le service statistique.

EXERCICE 59 énoncé Antilles 2016

Commun à tous les candidats

Partie A

1. (a) Arbre pondéré :



(b) Les évènements A et B forment une partition de l'univers, on a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p\left(\overline{\text{D}}\right)=p\left(\text{A}\cap\overline{\text{D}}\right)+p\left(\text{B}\cap\overline{\text{D}}\right)=0{,}65\times0{,}92+0{,}35\times0{,}95=0{,}9305.$$

(c) Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$p_{\overline{\text{D}}}(\text{A})=\frac{p\left(\text{A}\cap\overline{\text{D}}\right)}{p\left(\overline{\text{D}}\right)}=\frac{0{,}65\times0{,}92}{0{,}9305}=0{,}6427$$

2. Soit X le nombre d'ampoules sans défaut. Les choix d'ampoules étant assimilés à un tirage successif avec remise, on est en présence d'un schéma de Bernoulli et X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}92$ (les ampoules sont issues de la machine A). Par conséquent, à l'aide de la calculatrice :

$$p(\text{X}\geqslant9)=p(\text{X}=9)+p(\text{X}=10)=10\times0{,}92^9\times0{,}08+0{,}92^{10}\approx0{,}8121.$$

Partie B

1. (a) On a $\text{P}(\text{T}\leqslant a)=\displaystyle\int_0^a\lambda\text{e}^{-\lambda x}\text{d}x=\left[-\text{e}^{-\lambda x}\right]_0^a=-\text{e}^{-\lambda a}+1$, donc

$$p(\text{T}\geqslant a)=p(\overline{\text{T}\leqslant a})=1-p(\text{T}\leqslant a)=1-\left(-\text{e}^{-\lambda a}+1\right)=\text{e}^{-\lambda a}.$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}p_{(\text{T}\geqslant t)}&=\frac{p\big((\text{T}\geqslant t+a)\cap(\text{T}\geqslant t)\big)}{p(\text{T}\geqslant t)}\\&=\frac{p(\text{T}\geqslant t+a)}{p(\text{T}\geqslant t)}\\&=\frac{\text{e}^{-\lambda(t+a)}}{\text{e}^{-\lambda t}}\\&=\text{e}^{-\lambda(t+a-t)}\\&=\text{e}^{-\lambda a}\\&=p(\text{T}\geqslant a).\end{aligned}$$

2. (a) D'après le cours $\text{E}(\text{T})=\dfrac{1}{\lambda}$. On en déduit que $\lambda=\dfrac{1}{\text{E}(\text{T})}=\dfrac{1}{10000}=0{,}0001$.

(b) On a $p(\text{T}\geqslant5000)=\text{e}^{-0{,}0001\times5000}=\text{e}^{-0{,}5}\approx0{,}6065$.

(c) Il s'agit de calculer $p_{\text{T}\geqslant7000}(\text{T}\geqslant12000)$. Puisque la loi est sans vieillissement :

$$p_{\text{T}\geqslant7000}(\text{T}\geqslant12000)=p_{\text{T}\geqslant7000}(\text{T}\geqslant7000+5000)=p(\text{T}\geqslant5000)\approx0{,}6065.$$

Partie C

1. On fait l'hypothèse que la proportion d'ampoules défectueuses est $p=0{,}06$. L'échantillon est de taille $n=1000$.
On a $n\geqslant30$, $np=60\geqslant5$ et $n(1-p)=940\geqslant5$. Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont respectées, et, en notant I, cet intervalle on a :

$$\begin{aligned}\text{I}&=\left[0{,}06-1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\times0{,}94}}{\sqrt{1000}}\;;\;0{,}06+1{,}96\frac{\sqrt{0{,}06\times0{,}94}}{\sqrt{1000}}\right]\\&=[0{,}0452\;;\;0{,}0748]\end{aligned}$$

2. Notons f la fréquence observée d'ampoules défectueuses dans l'échantillon, on a $f=\dfrac{71}{1000}=0{,}071$. On constate que $f\in\text{I}$, il n'y a donc pas lieu de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

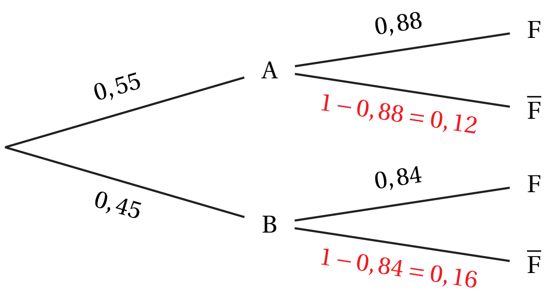
Exercice 60 énoncé **Asie 2016**

Partie A : production de fraises

On appelle :

- A l'évènement « la fleur de fraisier vient de la serre A » ;
- B l'évènement « la fleur de fraisier vient de la serre B » ;
- F l'évènement « la fleur de fraisier donne une fraise » ;
- $\overline{\mathrm{F}}$ l'évènement contraire de F.

On résume les données du texte dans un arbre pondéré :



Proposition 1 :
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

D'après les notations, on cherche la probabilité de l'évènement F ; d'après la formule des probabilités totales :
$\mathrm{P(F)} = \mathrm{P(A\cap F)} + \mathrm{P(B\cap F)} = \mathrm{P(A)} \times \mathrm{P_A(F)} + \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P_B(F)} = 0,55\times 0,88 + 0,45\times 0,84 = 0,862$
La proposition 1 est vraie.

Proposition 2 :
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne une fleur.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

On cherche la probabilité que la fleur provienne de la serre A sachant qu'elle a donné une fraise :
$\mathrm{P_F(A)} = \dfrac{\mathrm{P(A\cap F)}}{\mathrm{P(F)}} = \dfrac{0,55\times 0,88}{0,862} \approx 0,561 \neq 0,439$
La proposition 2 est fausse.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

1. On donne $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 237) = 0,14$.

On complète le graphique donné dans l'énoncé.

On constate que $237 = 250 - 13 = \mu - 13$ et $263 = 250 + 13 = \mu + 13$.

Pour des raisons de symétrie de la fonction de densité autour de la droite d'équation $x = \mu$, on a :

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 237) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 263)$ (parties grisées sur la figure).

$\mathrm{P}(237 < \mathrm{X} < 263) = 1 - (\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 237) + \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 263)) = 1 - 2\times \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 237) = 1 - 2\times 0,14 = 0,72$.

La probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes » est 0,72.

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $\mathrm{Y} = \dfrac{\mathrm{X} - 250}{\sigma}$.

(a) D'après le cours, la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1 (la loi normale centrée réduite).

(b) On sait que σ est un nombre strictement positif ; donc :

$\mathrm{X} \leqslant 237 \iff \mathrm{X} - 250 \leqslant 237 - 250 \iff \dfrac{\mathrm{X}-250}{\sigma} \leqslant -\dfrac{13}{\sigma} \iff \mathrm{Y} \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}$

Comme $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 237) = 0,14$, on en déduit que $\mathrm{P}\left(\mathrm{Y} \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.

(c) Pour Y suivant la loi normale centrée réduite, on cherche β tel que $\mathrm{P}(\mathrm{Y} \leqslant \beta) = 0,14$; la calculatrice donne pour résultat environ $-1,08$. On a donc : $-1,08 = -\dfrac{13}{\sigma}$ et donc : $\sigma \approx 12$.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.

(a) Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n\,; 250 + n]$.

D'après le cours, pour toute loi normale, $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$; donc

$\mathrm{P}(250 - 2\times 12 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 250 + 2\times 12) \approx 0,95$ ou encore $\mathrm{P}(250 - 24 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 250 + 24) \approx 0,95$.

Si $n' > n$, alors $[250-n\,;250+n] \subset [250-n'\,;250+n']$ et donc

$P(X \in [250-n\,;250+n]) < P(X \in [250-n'\,;250+n'])$.

Donc $n = 24$ est le plus petit entier tel que $P(250-n \leqslant X \leqslant 250+n)$.

(b) On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme,se trouve dans l'intervalle $[230\,;m]$.

Cherchons m pour que $P(230 \leqslant X \leqslant m)$ soit égal à $0,95$.

D'après le cours, on sait que $P(230 \leqslant X \leqslant m) = P(X \leqslant m) - P(X < 230)$.

En utilisant la calculatrice, on trouve que $P(X < 230) \approx 0{,}0478$.

$P(230 \leqslant X \leqslant m) = 0,95 \iff P(X \leqslant m) - P(X < 230) = 0,95 \iff P(X \leqslant m) = P(X < 230) + 0,95 \iff P(X \leqslant m) \approx 0{,}0478 + 0,95 \iff P(X \leqslant m) \approx 0{,}9978$

À la calculatrice, si X suit la loi normale d'espérance 250 et d'écart-type 12, le nombre m tel que $P(X \leqslant m) \approx 0{,}9978$ vaut environ 284,2.

Donc la plus petite valeur de m pour laquelle la probabilité que la masse de la barquette se trouve dans l'intervalle $[230\ ;\ m]$ soit supérieure ou égale à 0,95 est $m = 285$.

Exercice 61 énoncé Centres Étrangers 2016

Partie A

1. (a) L'expérience consistant à interroger une personne est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ en convenant d'appeler succès le fait que la personne accepte de répondre à la question. On est alors en présence d'une succession de 700 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes (puisque la probabilité qu'une personne accepte de répondre reste constante). La variable aléatoire X dénombrant les personnes ayant accepté de répondre suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

(b) D'après la calculette : $P(X \leqslant 399) \simeq 0,0573$.

Par suite :

$$P(X \geqslant 400) = P(X > 399) = 1 - P(X \leqslant 399) \simeq 0,9427$$

La meilleure valeur approchée est $0,94$

2. Lorsque n personnes sont interrogées, notons X_n la variable aléatoire égale au nombre de personnes acceptant de répondre . X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0.6$.

On cherche le plus petit entier n tel que $P(X_n \geqslant 400) > 0,9$.

Puisque

$$P(X_n \geqslant 400) > 0,9 \iff 1 - P(X_n \leqslant 399) > 0,9 \iff P(X_n \leqslant 399) < 0,1$$

la question est de déterminer, parmi les entiers n vérifiant $P(X_n \leqslant 399) < 0,1$, le plus petit.

La calculette donne $\begin{cases} P(X_{693} \leqslant 399) \simeq 0,1034 \\ P(X_{694} \leqslant 399) \simeq 0,0955 \end{cases}$

Puisque la suite $(P(X_n \leqslant 399))$ est décroissante, alors

694 est le plus petit entier n convenant

Partie B

1. Puisque $n \geqslant 50$, alors $n \times f = 0,29 \times n \geqslant 0,29 \times 50$, soit $n \times f \geqslant 14,5$

De manière analogue, $n \times (1-f) = 0,71 \times n \geqslant 0,71 \times 50$, soit $n \times (1-f) \geqslant 35,5$

Puisque $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ n \times f \geqslant 5 \\ n(1-f) \geqslant 5 \end{cases}$, les conditions d'application d'un intervalle de confiance sont vérifiées.

Un intervalle de confiance, au niveau de confiance $95\,\%$, de la proportion de personnes favorables au projet est

$$\left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

2. L'amplitude de l'intervalle précédent est inférieure ou égale à $0,04$ si et seulement si

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04$$

Puisque

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \iff \frac{2}{0,04} \leqslant \sqrt{n} \overset{n>0}{\iff} n \geqslant \left(\frac{2}{0,04}\right)^2 \iff n \geqslant 2500$$

, alors

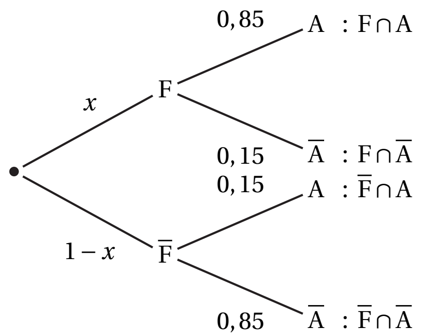
Le nombre minimum de personnes à interroger est 2500

Partie C

1.

$$P_F(A) = 0,85 \qquad P_{\overline{F}}(A) = 0,15$$

2. (a)



(b) D'après l'arbre :

$$P(A) = P(F \cap A) + P\left(\overline{F} \cap A\right) = 0,85x + 0,15(1-x) = 0,7x + 0,15$$

Par suite :

$$0,7x + 0,15 = 0,29$$

3. La résolution de l'équation ci-dessus conduit à $x = 0,2$

Parmi les personnes ayant répondu 20 % sont réellement favorables au projet

Exercice 62 énoncé **Liban 2016**

Commun à tous les candidats

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.
Soit X le nombre de balles envoyées à droite. Comme le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité p, on a $p = \dfrac{1}{2}$. Comme d'autre part les lancers sont indépendants, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculons la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite.

C'est : $p(\mathrm{X} = 10) = \dbinom{20}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{10} = 0,176.$ $\boxed{p(\mathrm{X} = 10) \approx 0,176}$

2. Calculons la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite.

C'est : $p(5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 10) = p(\mathrm{X} \leqslant 10) - p(\mathrm{X} \leqslant 4)$.

À la calculatrice, on obtient : $\boxed{p(5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 10) = 0,582}$.

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil.
Comme $n = 100$ et $p = 0,5$, on a : $n > 30$, $np = 50 > 5$ et $n(1-p) = 50 > 5$.
On appelle X_{100} la variable aléatoire donnant le nombre de balles lancées à droite. Avec les mêmes hypothèses qu'au A, X_{100} suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,5$.
On peut alors calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

$$\mathrm{I}_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \text{ donc } \mathrm{I}_{100} \approx \left[0,40 ; 0,60\right]$$

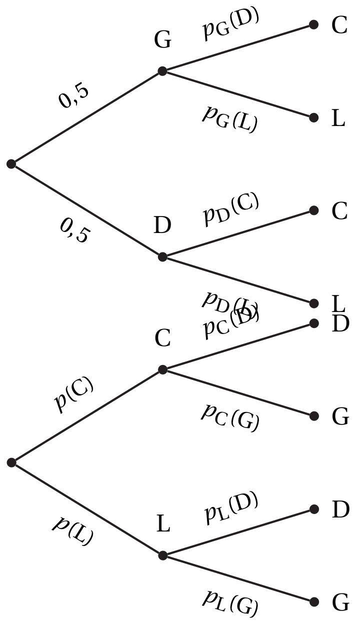
$0,42 \in \mathrm{I}_{100}$ donc l'hypothèse que l'appareil fonctionne correctement est acceptée, au risque de 5 %.

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » (L) soit « coupées (C) ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est $0,24$ donc $p(\mathrm{L} \cap \mathrm{D}) = 0,24$
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est $0,235$ donc $p(\mathrm{C} \cap \mathrm{G}) = 0,235$.

On peut construire deux arbres pondérés pour aider au raisonnement :



Si le lance-balle envoie une balle coupée, calculons la probabilité qu'elle soit envoyée à droite , c'est à dire $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{D})$.
On a : $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{C}) = 1 - p_{\mathrm{D}}(\mathrm{L}) = 1 - \dfrac{p(\mathrm{D} \cap \mathrm{L})}{p(\mathrm{D})} = 1 - \dfrac{0,24}{0,5} = 1 - 0,48 = 0,52$.

On en déduit : $p(\mathrm{C} \cap \mathrm{D}) = p(\mathrm{D}) \times p_{\mathrm{D}}(\mathrm{C}) = 0,26$

Et : $p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{C} \cap \mathrm{D}) + p(\mathrm{C} \cap \mathrm{G}) = 0,26 + 0,235 = 0,495$.

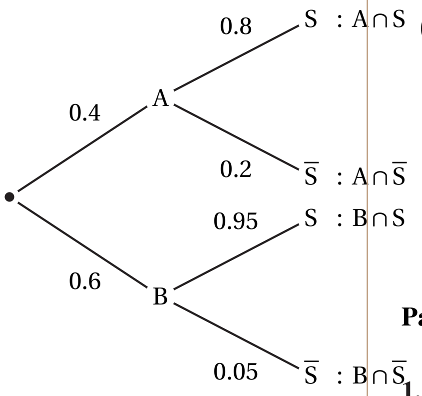
Finalement : $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{D}) = \dfrac{p(\mathrm{C} \cap \mathrm{D})}{p(\mathrm{C})} = \dfrac{0,26}{0,495} = 0,525$ à 10^{-3} près. $\boxed{p_{\mathrm{C}}(\mathrm{D}) = 0,525}$

Exercice 63 énoncé **Métropole 2016**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Utilisons un arbre pondéré :



Les hypothèses s'écrivent :

$P(A) = 0,4 \quad P_A\left(\overline{S}\right) = 0,2 \quad P_B\left(\overline{S}\right) = 0,05$.

On en déduit :

$P(B) = 1 - P(A) = 0,6$

$P_A(S) = 1 - P_A(\overline{S}) = 1 - 0,2 = 0,8$

$P_B(S) = 1 - P_B(\overline{S}) = 1 - 0,05 = 0,95$

On a ensuite :

$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,95 = 0,89$

2. Calculons $P_S(A)$:

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,89} = \frac{32}{89}$$

Une valeur approchée, à 10^{-2} près, de la probabilité cherchée est $0,36$.

Partie B

1. Notons f la fréquence observée de composants sans défaut .

On a $\begin{cases} f = 0,92 \geqslant 30 \\ n \times f = 400 \times 0,92 = 368 \geqslant 5 \\ n(1-f) = 400 \times 0,08 = 32 \geqslant 5 \end{cases}$

Les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance sont réunies.

Un intervalle de confiance de la proportion p, au niveau de confiance $0,95$ est

$$\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{400}}\ ;\ 0,92 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,87\ ;0,97]$$

2. Pour un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance est

$$\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

dont l'amplitude est

$$\frac{2}{\sqrt{n}}$$

L'amplitude est au maximum égale à $0,02$ si et seulement si $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02$ (1)

$$\begin{aligned} (1) &\iff 2 \leqslant 0,02\sqrt{n} \\ &\iff \sqrt{n} \geqslant 100 \\ &\iff n \geqslant 10000 \text{ car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

La taille minimum de l'échantillon est $10\,000$

Partie C

1. (a)

$P(T \leqslant a)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

(b) Soit $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} P(T \leqslant t) &= \int_0^t f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t \\ &= \left(-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda \times 0}\right) \\ &= \left(-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) - (-1) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

(c) De $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} -\lambda t \overset{\lambda\geqslant 0}{=} -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0 \end{cases}$ on déduit, par composition : $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\lambda t} = 0$.

On a ensuite, par somme : $\lim\limits_{t\to+\infty} (1-e^{-\lambda t}) = 1-0 = 1$:

$$\lim_{t\to+\infty} P(T \leqslant t) = 1$$

2. L'hypothèse s'écrit : $1 - e^{-7\lambda} = 0,5 \quad (1)$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad e^{-7\lambda} = 0,5 \\
&\iff \quad -7\lambda = \ln\frac{1}{2} \\
&\iff \quad -7\lambda = -\ln 2 \\
&\iff \quad \lambda = \frac{\ln 2}{7}
\end{aligned}$$

Une valeur approchée de λ, à 10^{-3} près, est $0,099$

3. (a) La question est de déterminer $P(T \geqslant 5)$.

Puisque $P(T \leqslant 5) = 1 - e^{-0,099\times 5}$, alors

$$P(T \geqslant 5) = P(T > 5) = 1 - P(T \leqslant 5) = 1 - (1 - e^{-0,099\times 5}) = e^{-5\times 0,099} = e^{-0,495}$$

La probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans est environ $0,61$

(b) Il s'agit de calculer

$$P_{(T\geqslant 2)}(T \geqslant 7)$$

La loi exponentielle étant une loi de durée de vie sans vieillissement, on a

$$P_{(T\geqslant 2)}(T \geqslant 7) = P(T \geqslant 5)$$

La probabilité cherchée est environ $0,61$

(c) $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$:

Une valeur approchée de l'espérance de T est environ 10,10 : la durée de vie moyenne d'un composant est d'environ 10 ans

Exercice 64 énoncé **Métropole septembre 2016**

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :       a, b, d, s sont des entiers
                  i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                    | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
                    | Si d ⩽ 2
                    |     | alors a prend la valeur 1 − a
                    |     | sinon Si d ⩽ 4
                    |     |         | alors b prend la valeur 1 − b
                    |     |       FinSi
                    | FinSi
                    | s prend la valeur a + b
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.

variables	i	d	a	b	s
initialisation			0	0	
1^er passage boucle Pour	1	1	1	0	1
2^e passage boucle Pour	2	6	1	0	1
3^e passage boucle Pour	3	4	1	1	2

(b) Les variables a et b sont à 0 ou 1 selon que la pièce montre le côté face ou le côté pile ; la variable $s = a + b$ donne donc le nombre de pièces qui sont du côté pile.

À la fin de cet algorithme, $s = 2$ donc les deux pièces sont du côté pile.

2. Pour tout entier naturel n, on note :

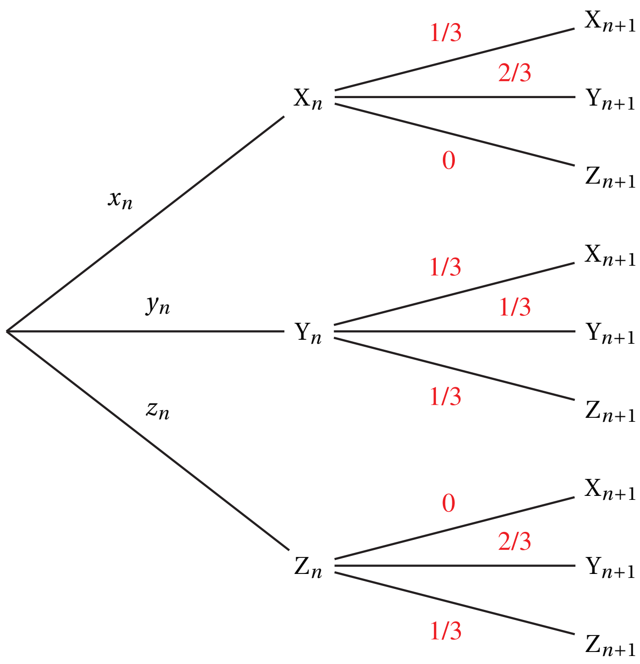
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

(a) Au début du jeu les deus pièces sont du côté face donc $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

(b) X_{n+1} est l'événement « À l'issue de $n+1$ lancers de dés, les deux pièces sont du côté face » ; on cherche donc la probabilité que, à l'issue de $n+1$ lancers, les deux pièces soient du côté face sachant qu'à l'issue de n lancers elles étaient déjà les deux du côté face. Il faut donc qu'il n'y ait aucun retournement de pièce lors du $n+1$-ième lancer, c'est-à-dire qu'il faut que le dé tombe sur 5 ou 6 ; la probabilité de l'événement $\{5 ; 6\}$ est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ puisque le dé est bien équilibré et donc qu'il y a équiprobabilité. Donc $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

(c) On complète l'arbre proposé :



(d) Pour tout entier naturel n, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.

(e) D'après la formule des probabilités totales :

$$y_{n+1} = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_{n+1}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_n \cap \mathrm{Y}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{Y}_n \cap \mathrm{Y}_{n+1}) + \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n \cap \mathrm{Y}_{n+1}) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}z_n$$

$$= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}(1 - x_n - y_n) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3}y_n = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$$

(f) On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$ donc $y_n = b_n + \frac{1}{2}$.

$$b_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(b_n + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n$$

$$b_0 = y_0 - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = -\frac{1}{2}$.

On peut donc dire que, pour tout n, $b_n = b_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, on en conclut que, pour tout n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

(g) La suite (b_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$; comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que la suite (b_n) est convergente vers 0.

Or, pour tout n, $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, donc la suite (y_n) est convergente vers $\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \frac{1}{2}$.

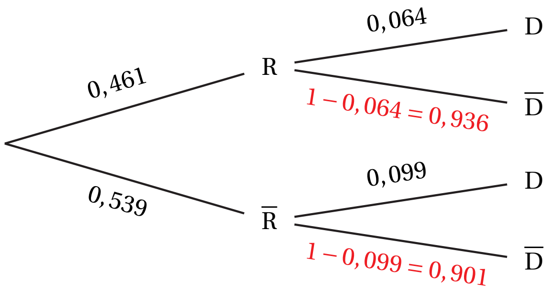
Donc à long terme, la probabilité d'avoir une piède côté face et une pièce côté pile va tendre vers 0,5.

EXERCICE 65 énoncé **Métropole septembre 2016**

Partie 1

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.
En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.
On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :
R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,
D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. On traduit cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité :



2. (a) La probabilité que la personne interrogée soit diabétique est $P(D)$.

D'après la formule des probabilités totales :

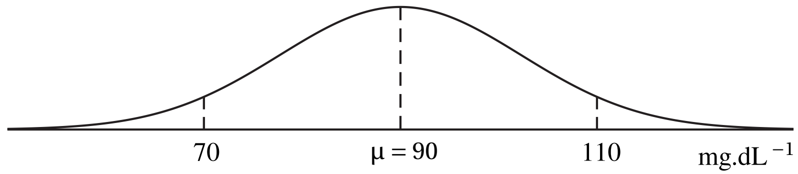
$$\begin{aligned} P(D) &= P(R\cap D)+P(\overline{R}\cap D) = P(R)\times P_R(D)+P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(D)\\ &= 0,461\times 0,064+0,539\times 0,099 = 0,029\,304+0,053\,361 = 0,082\,865\\ &\approx 0,083 \end{aligned}$$

(b) La personne choisie est diabétique. La probabilité qu'elle habite en zone rurale est $P_D(R)$:

$$P_D(R) = \frac{P(D\cap R)}{P(D)} = \frac{0,029\,504}{0,082\,865} \approx 0,356$$

Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL^{-1}. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg. dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1}. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.rdL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.
On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à $0,052$.
On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1}, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



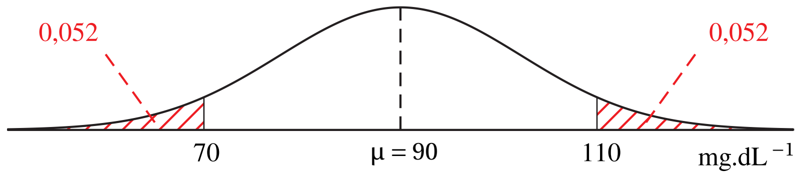
1. La glycémie « normale » est entre 70 et 110 mg.dL^{-1} ; la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » est donc $P(70 \leqslant X \leqslant 110)$.

La probabilité qu'un adulte soit en hyperglycémie est 0,052 donc $P(X>110)=0,052$.

D'après la courbe donnée dans le texte, la moyenne μ est de 90 donc, pour des raisons de symétrie, comme $70=90-20$ et que $110=90+20$, $P(X<70)=P(X>110)$ et donc, $P(X<70)=P(X>110)=0,052$.

$P(70\leqslant X\leqslant 110) = 1-P(X<70)-P(X>110) = 1-2\times 0,052 = 0,896$

La probabilité qu'un adulte ait une glycémie « normale » est 0,896.



2. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type σ.

D'après le cours, on peut dire que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-90}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

On a vu que $P(X < 70) = 0,052$.

Comme $\sigma > 0$, $X < 70 \iff X - 90 < -20 \iff \dfrac{X-90}{\sigma} < -\dfrac{20}{\sigma} \iff Z < -\dfrac{20}{\sigma}$

$P(X < 70) = 0,052 \iff P\left(Z < -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,052$.

On sait que la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite ; si $P(Z < \beta) = 0,052$, on trouve à la calculatrice $\beta \approx -1,626$.

On a donc $-\dfrac{20}{\sigma} \approx -1,626$ ce qui donne $\sigma \approx \dfrac{20}{1,626}$ soit $\sigma \approx 12,3$.

La valeur de σ arrondie au dixième est 12,3.

3. Dans cette question, on prend $\sigma = 12$.

La probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie est $P(X < 60)$.

À la calculatrice, pour la variable aléatoire X qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 90$ et $\sigma = 12$, on trouve $P(X < 60) \approx 0,006$.

La probabilité, arrondie au millième, que la personne choisie soit en hypoglycémie est 0,006.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.
Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

1. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % d'une fréquence f dans un échantillon de taille n est :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

La fréquence de personnes diagnostiquées diabétiques dans l'échantillon proposé de taille $n = 10000$ est $f = \dfrac{716}{10000} = 0,0716$.

On obtient l'intervalle $\left[0,0716 - \dfrac{1}{\sqrt{10000}}\ ;\ 0,0716 + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right] = [0,0616\ ;\ 0,0816]$.

On peut donc dire que la probabilité que l'intervalle $[0,0616\ ;\ 0,0816]$ contienne la proportion d'adultes diabétiques dans la population totale est supérieure à 0,95.

2. L'amplitude de l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Pour que cette amplitude soit inférieure ou égale à 0,01, il faut trouver n pour que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,01$ ce qui équivaut à $200 \leqslant \sqrt{n}$ ou encore $n \geqslant 40000$.

Il faut donc avoir un échantillon de taille supérieure ou égale à 40 000 pour que l'intervalle de confiance ait une amplitude inférieure ou égale à 0,01.

Exercice 66 énoncé **Nouvelle Calédonie novembre 2016**

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaà®ne des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.

Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. (a) La fonction de Gauss est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ c'est-à-dire $x = 125$.

On a donc, pour tout réel t positif, $P(X \leqslant 125 - t) = P(X \geqslant 125 + t)$.

(b) On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture, donc $P(X < 121) = 0,023$.

$$\begin{aligned} P(121 \leqslant X \leqslant 129) &= P\left(\overline{(X < 121) \cup (X > 129)}\right) \\ &= 1 - P(X < 121) - P(X > 129) \\ &= 1 - P(X \leqslant 121) - P(X \geqslant 129) \end{aligned}$$

les évènements $(X \leqslant 121)$ et $(X \geqslant 129)$ étant incompatibles.

D'après la question précédente, $P(X \leqslant 121) = P(X \leqslant 125 - 4) = P(X \geqslant 125 + 4) = P(X \geqslant 129)$; on en déduit : $P(121 \leqslant X \leqslant 129) = 1 - 2P(X \leqslant 125 - 4) = 1 - 2P(X \leqslant 121) = 1 - 0,046 = 0,954$.

2. On cherche une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que $P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68$.

On se ramène à la loi normale centrée réduite de X en posant $Z = \dfrac{X - 125}{\sigma}$.

$$123 \leqslant X \leqslant 127 \iff 123 - 125 \leqslant X - 125 \leqslant 127 - 125 \iff \frac{-2}{\sigma} \leqslant \frac{X - 125}{\sigma} \leqslant \frac{2}{\sigma}$$

On a alors : $P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68 \iff P\left(-\dfrac{2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0,68$.

à€ la calculatrice, on trouve l'intervalle centré en 0 correspondant soit $\dfrac{2}{\sigma} \approx 0,994$. à€ l'unité près, on prendra donc $\sigma \approx \dfrac{2}{0,994} \approx 2$ (ce qui est la valeur de σ supposée juste après dans l'énoncé !).

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

(a) À la calculatrice, la probabilité qu'un pot soit conforme correspond à $P(120 \leqslant X \leqslant 130) \approx 0,9876$.

(b) La probabilité qu'un pot ne soit pas conforme parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes correspond à

$$\begin{aligned} P_{(X \leqslant 130)}\left(\overline{120 \leqslant X \leqslant 130}\right) &= \frac{P\left(\overline{(120 \leqslant X \leqslant 130)} \cap (X \leqslant 130)\right)}{P(X \leqslant 130)} \\ &= \frac{P(X \leqslant 120)}{P(X \leqslant 130)} \approx \frac{0,00621}{0,992379} \\ &\approx 6,1 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

4. Comme $900 \geqslant 30$, $900 \times 0,988 \geqslant 5$ et $900 \times (1 - 0,988) \geqslant 5$, les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et un intervalle de fluctuation au seuil de $95\,\%$ est :

$$\begin{aligned} I_{95\%} &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \\ &= \left[0,988 - 1,96\sqrt{\frac{0,988(1-0,988)}{900}}\,;\, 0,988 + 1,96\sqrt{\frac{0,988(1-0,988)}{900}}\right] \\ &\approx [0,980\,;\,0,996]. \end{aligned}$$

Comme $f_{obs} = \dfrac{871}{900} \approx 0,968 \notin I_{95\%}$, on rejette l'hypothèse « La machine est bien réglée » au seuil des $95\,\%$.

Exercice 67 énoncé **Nouvelle Calédonie 2017**

Partie A

Sur les 34 sujets de l'examen déjà posés, 22 portaient sur le thème A.

On veut tester l'hypothèse « il y a une chance sur deux $(p=0,5)$ que le thème A soit évalué le jour de l'examen » dans un échantillon de taille $n=34$.

$n=34 \geqslant 30$ et $np=n(1-p)=17 \geqslant 5$ donc les conditions sont vérifiées pour que l'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion que le thème A soit évalué le jour de l'examen :

$$\mathrm{I}=\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,5-1,96\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{34}}\ ;\ 0,5+1,96\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{34}}\right]\approx [0,33\ ;\ 0,67]$$

La fréquence dans l'échantillon est de $f=\dfrac{22}{34}\approx 0,65 \in \mathrm{I}$ donc il n'y a pas de raison de rejeter l'affirmation proposée.

Partie B

Le thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maîtriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème.

Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A :

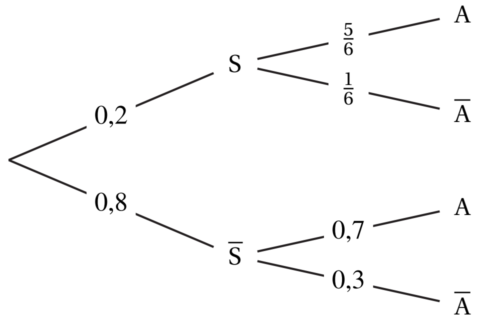
- $30\,\%$ des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
- $\dfrac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

On sait de plus que $20\,\%$ des étudiants participent au stage.

On note :

- S l'évènement « l'étudiant a suivi le stage » et $\overline{\mathrm{S}}$ son évènement contraire ;
- A l'évènement « il y a un exercice portant sur le thème A » et $\overline{\mathrm{A}}$ son évènement contraire.

On établit un arbre de probabilité résumant la situation :



On cherche $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{S})$ c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{S}\cap\overline{\mathrm{A}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})}$.

D'après l'arbre : $\mathrm{P}(\mathrm{S}\cap\overline{\mathrm{A}})=\mathrm{P}(\mathrm{S})\times\mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\overline{\mathrm{A}})=0,2\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{0,2}{6}=\dfrac{1}{30}$.

D'après la formule des probabilités totales : $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=\mathrm{P}(\mathrm{S}\cap\overline{\mathrm{A}})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{S}}\cap\overline{\mathrm{A}})=\dfrac{1}{30}+0,8\times 0,3=\dfrac{1}{30}+\dfrac{24}{100}=\dfrac{41}{150}$.

$\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{S})=\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{41}{150}}=\dfrac{1}{30}\times\dfrac{150}{41}=\dfrac{5}{41}\approx 0,122$.

Partie C

On suppose que la variable aléatoire T, associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance $\mu=225$ et d'écart-type σ où $\sigma>0$. La probabilité qu'un étudiant finisse son examen en moins de 235 minutes est de $0,98$.

On sait que $\mathrm{P}(\mathrm{T}\leqslant 235)=0,98$ sachant que T suit la loi normale de moyenne 225 et d'écart-type σ.

D'après le cours, si T suit la loi normale de moyenne 225 et d'écart-type σ, alors $\mathrm{Z}=\dfrac{\mathrm{T}-225}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite (moyenne 0 et écart-type 1).

$\mathrm{T}\leqslant 235 \iff \mathrm{T}-225\leqslant 10 \iff \dfrac{\mathrm{T}-225}{\sigma}\leqslant\dfrac{10}{\sigma}$ car $\sigma>0$; donc $\mathrm{P}(\mathrm{T}\leqslant 235)=0,98 \iff \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{T}-225}{\sigma}\leqslant\dfrac{10}{\sigma}\right)=0,98$.

On cherche donc le réel β tel que $\mathrm{P}(\mathrm{Z}\leqslant\beta)=0,98$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite.

On trouve à la calculatrice $\beta\approx 2,054$.

On en déduit que $\dfrac{10}{\sigma}\approx 2,054$ donc que $\sigma\approx 4,9$.

EXERCICE 68 énoncé **Polynésie 2016**

Partie A

1. On cherche $P(X < 3)$.

La fonction densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$ est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 0,2e^{-0,2t}$$

$$P(X < 3) = \int_0^3 0,2e^{-0,2t}\,dt = \left[-e^{-0,2t}\right]_0^3 = 1 - e^{-0,6} \approx 0,451$$

Donc la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes est bien environ $0,451$

2. On cherche le plus petit réel T tel que $P(X < T) > 0,95$

$P(X < T) > 0,95 \iff 1 - e^{-0,2T} > 0,95 \iff e^{-0,2T} < 0,05 \iff e^{0,2T} > 20 \iff 0,2T > \ln(20) \iff T > 5\ln(20)$

or $5\ln(20) \approx 14,98$. Donc le temps minimum à attendre est de 15 minutes.

3. On sait que l'espérance de la variable aléatoire T est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,2} = 5$ (min).

Donc en deux heures on peut espérer voir en moyenne $\dfrac{120}{5} = 24$ étoiles filantes.

On peut espérer en moyenne voir 24 étoiles filantes pendant ces deux heures.

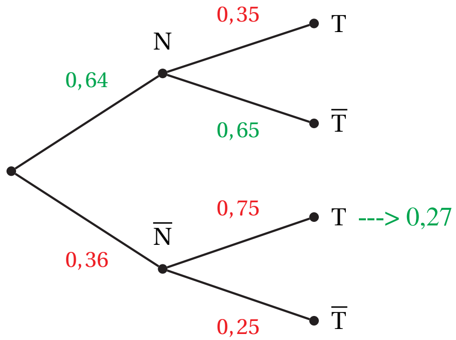
Partie B

1. On considère les événements :

- N : « l'adhérent interrogé est un nouvel adhérent »
- T : « l'adhérent interrogé possède un télescope »

on peut alors illustrer la situation par un arbre pondéré :

les données de l'exercice sont en vert et celles déduites sont en rouge



On cherche $P(T)$

N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers donc d'après les
totales on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(N \cap T) + P\left(\overline{N} \cap T\right) \\ &= P(N) \times P_N(T) + 0,27 \\ &= 0,64 \times 0,35 + 0,27 \\ &= 0,494 \end{aligned}$$

2. On cherche $P_T(N)$

$$P_T(N) = \frac{P(T \cap N}{P(T)} = \frac{0,224}{0,494} \approx 0,453$$

Partie C

On ne connaît pas la proportion p d'habitants du village qui sont favorables à la coupure mais on fait une hypothèse sur sa valeur. Pour valider cette hypothèse on utilise donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

La taille de l'échantillon est $n = 100 \geqslant 30$ et la probabilité supposée p vérifie $np = 50 \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ on peut donc appliquer l'intervalle de fluctuation

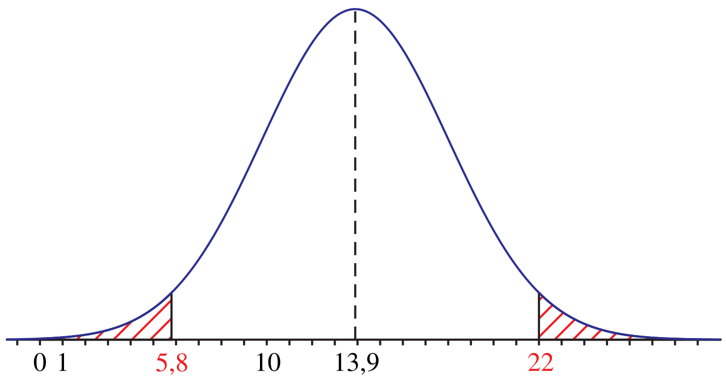
$I_n = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ soit ici $I_n = [0,402\,;\,0,598]$

or la fréquence observée est $f = \dfrac{54}{100} = 0,54 \in I_n$

Le résultat conforte donc l'astronome.

Exercice 69 énoncé **Pondichéry 2016**

Partie A



1. On sait que $p(\mathrm{T} \geqslant 22) = 0,023$.

(a) Le premier domaine est limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x = 22$.

L'autre domaine est le symétrique du premier par rapport à la droite d'équation $x = 13,9$; $22 - 13,9 = 8,1$ et $13,9 - 8,1 = 5,8$.

Le second domaine est limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 5,8$. Voir ci-dessus

(b) $\mathrm{P}(5,8 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 22) = 1 - (\mathrm{P}(\mathrm{T} > 22) + \mathrm{P}(\mathrm{T} < 5,8)) = 1 - 2 \times 0,023 = 1 - 0,046 = 0,954$

D'après le cours, $\mathrm{P}(\mu - 2\sigma \leqslant \mathrm{T} \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$, donc on a

$\mathrm{P}(13,9 - 2\sigma \leqslant \mathrm{T} \leqslant 13,9 + 2\sigma) = 0,954$.

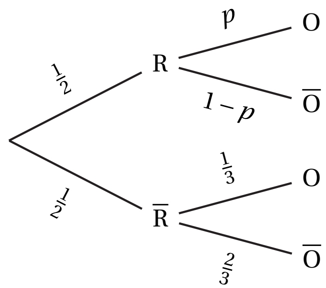
On en déduit que σ vérifie $13,9 - 2\sigma = 5,8$ et $13,9 + 2\sigma = 22$, ce qui donne $\sigma \approx 4,05$, soit 4,1 au dixième.

2. On cherche la probabilité qu'un jeune soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine, c'est-à-dire $\mathrm{P}(\mathrm{T} > 18)$.

On trouve à la calculatrice, en prenant $m = 13,9$ et $\sigma = 4,1$: $\mathrm{P}(\mathrm{T} > 18) \approx 0,16$.

Partie B

1. *Calculs de probabilités*



D'après la loi des probabilités totales :

$$p(\mathrm{O}) = p(\mathrm{R} \cap \mathrm{O}) + p\left(\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{O}\right) = p(\mathrm{R}) \times p_{\mathrm{R}}(\mathrm{O}) + p(\overline{\mathrm{R}}) \times p_{\overline{\mathrm{R}}}(\mathrm{O}) = \frac{1}{2} \times p + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

Donc la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est : $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

2. *Intervalle de confiance*

(a) La fréquence de Oui est $f = \frac{625}{1\,500} = \frac{5}{12}$.

L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage est donc

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{1500}}\ ;\ \frac{5}{12} + \frac{1}{\sqrt{1500}}\right] \approx [0,390\ ;\ 0,443].$$

(b) Si le protocole est correct on a donc :

$$0,390 \leqslant \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \leqslant 0,443 \iff 2,340 \leqslant 3p + 1 \leqslant 2,658 \iff 1,340 \leqslant 3p \leqslant 1,658$$
$$\iff \frac{1,340}{3} \leqslant p \leqslant \frac{1,658}{3} \text{ soit } 0,446 \leqslant p \leqslant 0,553$$

Le nombre de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet est entre 44,6 % et 55,3 %.