Annales 2011-2016 : suites

Exercice 1 correction **Amerique du Nord 2011**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

(a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

(b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

3. (a) Déterminer une primitive de f sur $[0\,;\,1]$.

(b) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

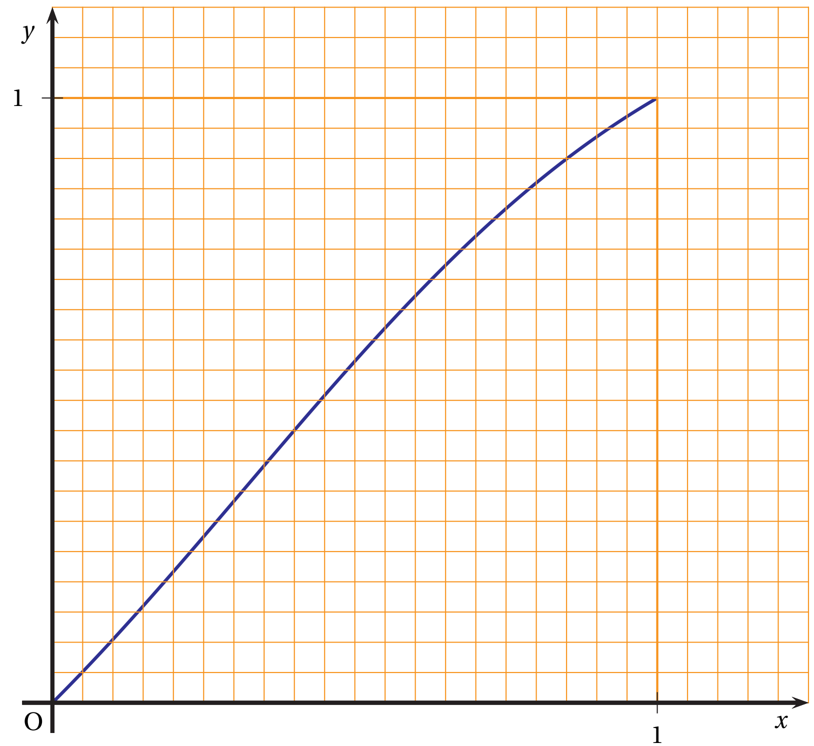
1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve



EXERCICE 2 correction **Amerique du Sud 2011**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}.$$

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. On a tracé, en annexe, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

(a) Sur le graphique en annexe, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.

(b) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

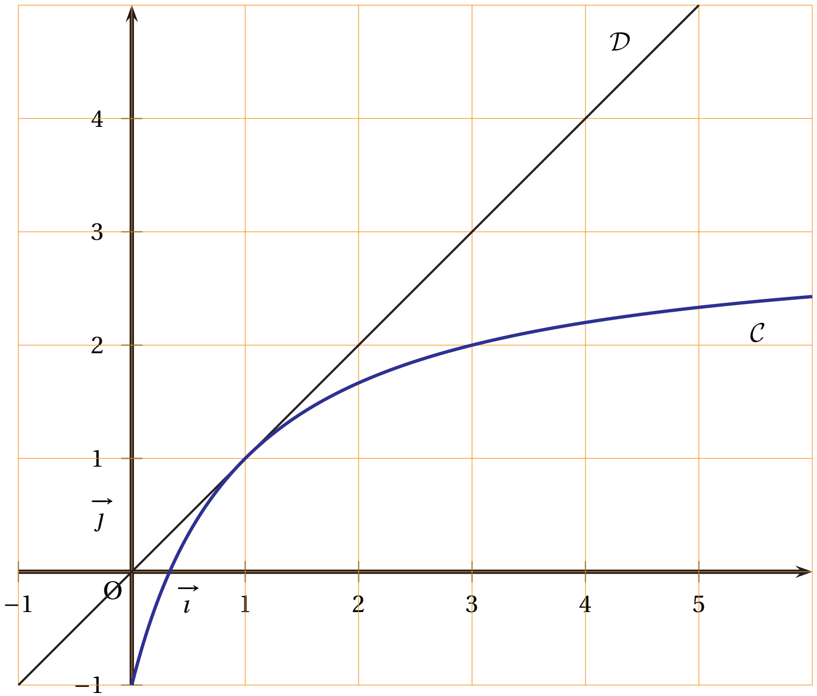
2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1. b.

(a) Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

(c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

ANNEXE à rendre avec la copie



Exercice 3 correction Centres Étrangers 2011

Commun à tous les candidats

On considère une droite $\mathcal{D}$ munie d'un repère $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath}\right)$.
Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathcal{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[\text{A}_n\text{A}_{n+1}]$.

1. (a) Placer sur un dessin la droite $\mathcal{D}$, les points $\text{A}_0, \text{A}_1, \text{A}_2, \text{A}_3, \text{A}_4, \text{A}_5$ et A_6.
On prendra 10 cm comme unité graphique.

(b) Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
Calculer $a_2, a_3, a_4\, a_5$ et a_6.

(c) Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par
$v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

EXERCICE 4 correction Liban 2011

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leqslant x$.
On pourra étudier la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.

6. **(a)** Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :
$\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

(b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
$u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que
$\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

EXERCICE 5 correction **Métropole 2011**

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

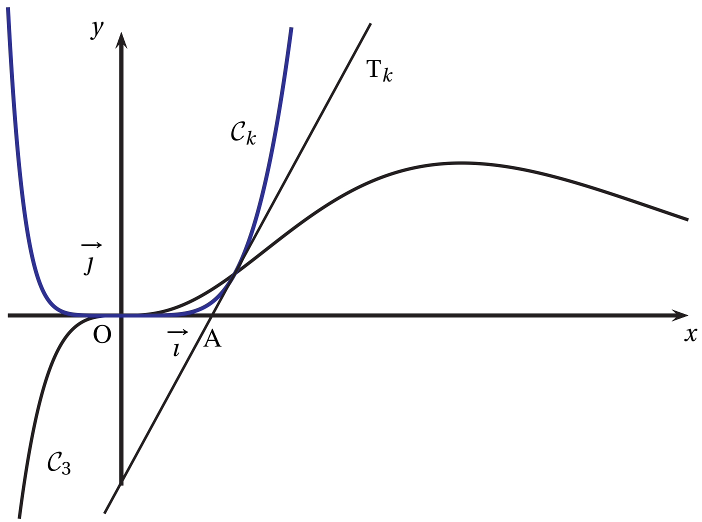
$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathcal{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathcal{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5} ; 0\right)$.



1. (a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.

(c) À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. (a) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

(b) Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. (a) Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1} ; 0\right)$.

(b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

PARTIE B

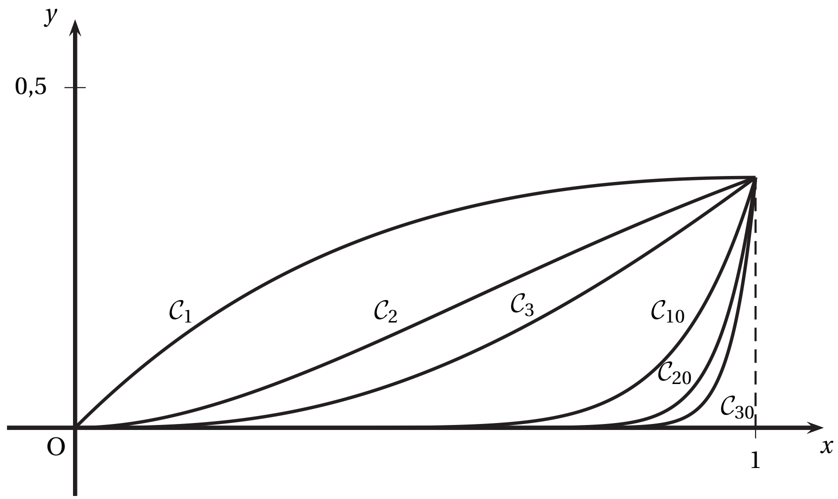
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



(a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

(b) Démontrer cette conjecture.

(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

(d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\mathrm{I}_n)$.

EXERCICE 6 correction Métropole septembre 2011

Commun à tous les candidats

Partie A - Étude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 4\ln x.$$

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x.

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

Sur le graphique fourni ci-dessous, on a tracé une partie de la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

On définit la suite (u_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

1. Vérifier que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

2. Au moyen de la courbe $(\mathcal{C})$ et de la droite d'équation $y = x$, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

3. On admet que pour tout entier naturel n, $\quad u_{2n} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+1}$.

En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques.

En déduire que $0,838$ est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C - Un problème de distance

On appelle (Γ) la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 2\ln x.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe (Γ), il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine O que tous les autres.

1. Soient M un point de la courbe (Γ) et x son abscisse. Exprimer OM en fonction de x.

2. (a) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2.$$

Étudier les variations de la fonction h. On pourra utiliser la partie A.

(b) En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe (Γ) tel que pour tout point M de (Γ), distinct de A, on ait OM $>$ OA.

3. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T_A à la courbe (Γ) au point A.

EXERCICE 7 correction **Nouvelle Calédonie 2011**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x.$$

(a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

(b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(c) Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.

On a représenté en **annexe (à rendre avec la copie)** la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.

(a) Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?

On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON.

Aucune justification n'est demandée.

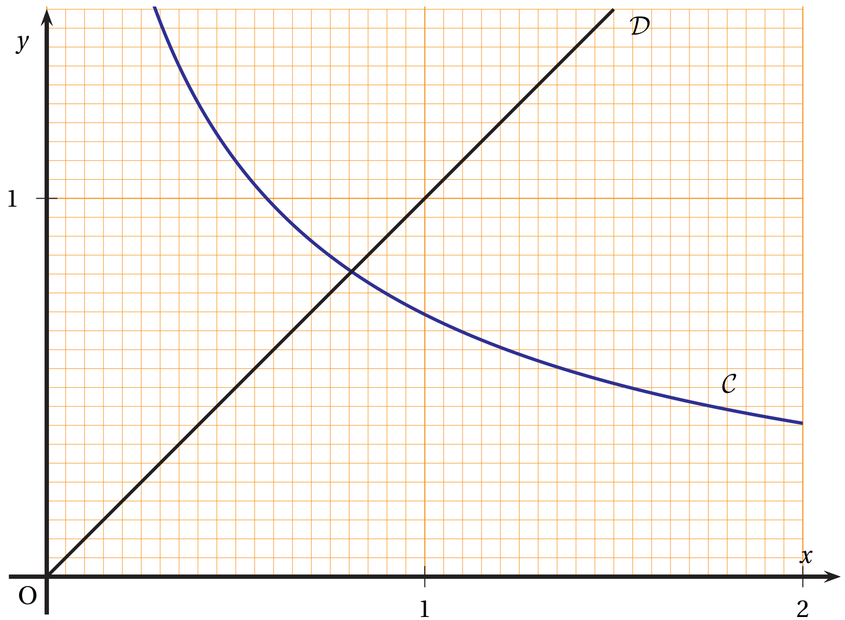
- Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »
- Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. »
- Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

(c) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.

Montrer que $\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right) = \ell$.

(d) Montrer que $\ell = \alpha$.

ANNEXE (À rendre avec la copie)



EXERCICE 8 correction **Nouvelle Calédonie mars 2011**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$.

En déduire que si $x \in [0~;~1]$ alors $f(x) \in [0~;~1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0~;~1]$.

2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

EXERCICE 9 correction Antilles 2012

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{n+1}{2n}u_n \end{array}\right.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

(b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

(c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

(a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 10 correction Asie 2012

Commun à tous les candidats

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictement positif non nul b $(b > a)$ Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANT QUE $n < \text{N}$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $\text{N} = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a, v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

3. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

(b) Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Exercice 11 correction **Antilles septembre 2012**

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

3. En déduire que si $x \geqslant \mathrm{e}$ alors $f(x) \geqslant \mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 5 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.

Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant \mathrm{e}$.

(b) Déterminer les variations de la suite (u_n).

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

(d) Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
    Faire
        Affecter (X/ln X) à X
        Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

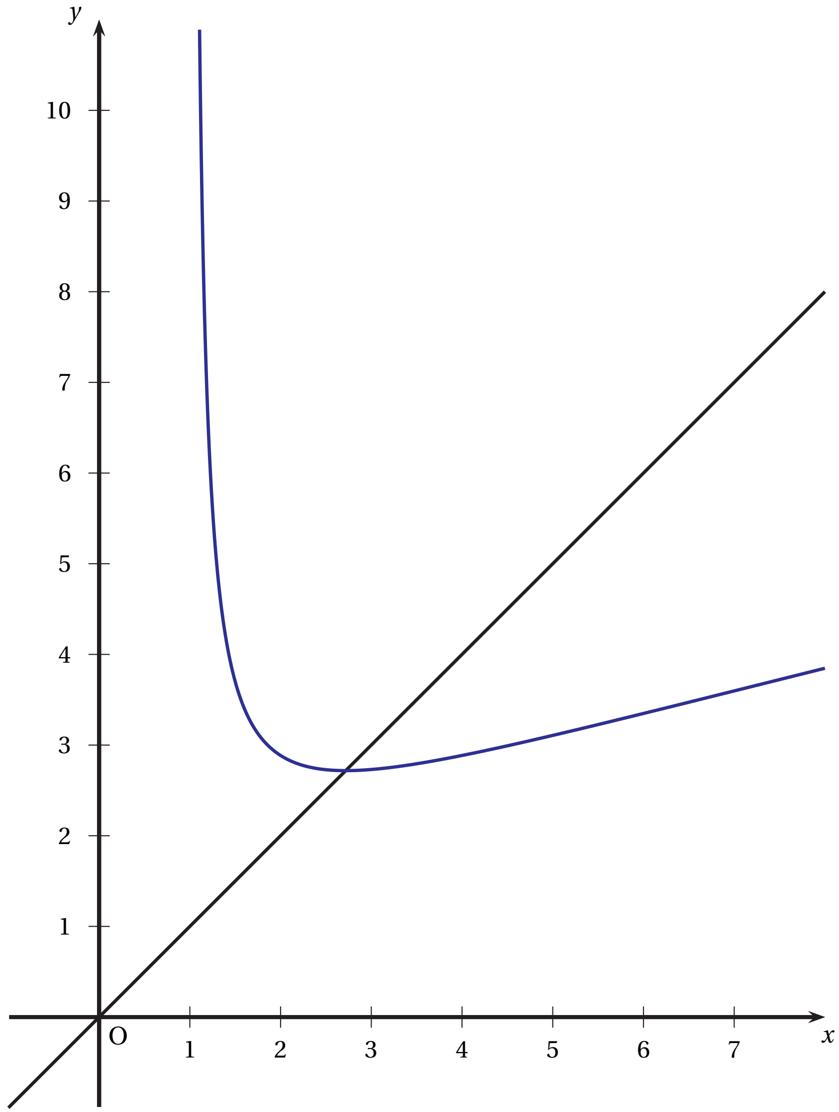
À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3	2,718 372 634 6	2,718 281 830 01	2,718 281 828 5

ANNEXE

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie



Exercice 12 correction **Métropole 2012**

Commun à tous les candidats

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u+\dfrac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n=3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.
Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. (a) Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

(b) Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, …, n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

(c) En déduire que pour tout entier strictement positif $n, u_n \geqslant 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

EXERCICE 13 correction **Métropole septembre 2012**

Commun à tous les candidats

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \qquad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

Démontrer que la fonction f admet un minimum.

En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. (a) Soit n un entier naturel quelconque.

Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

(c) On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right)$.

Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

(a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

(b) Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1. Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$. | Affecter à d la valeur $0,5d^2$ | Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.

Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?

Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

Exercice 14 correction Pondichéry 2012

Commun à tous les candidats

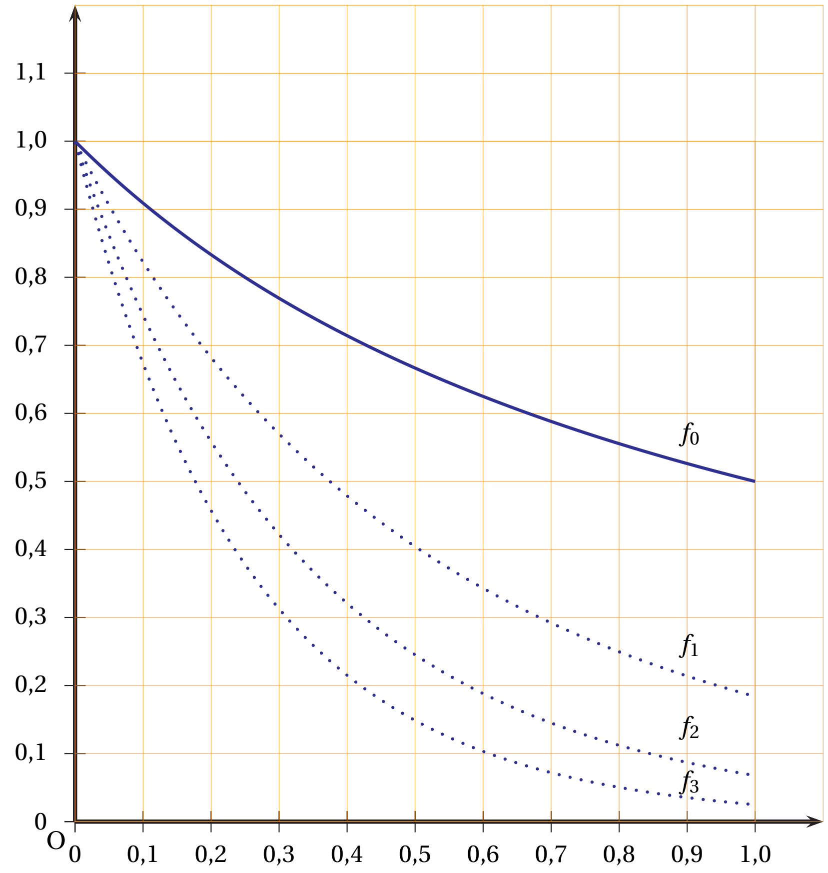
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle [0 ; 1] par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n :



(a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

(b) Démontrer cette conjecture.

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 1] :

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

(b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. (a) Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - \mathrm{J}_n\right).$$

(b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{I}_n$.

Exercice 15 correction **Nouvelle Calédonie 2012**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1. (a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(b) Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

(c) Montrer que, pour tout x strictement positif on a

$$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

(d) En déduire la limite de f en $+\infty$.

(e) Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.

(b) Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle [14 ; 15], donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

(c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_0 & = & 4 & \\ u_{n+1} & = & 5\ln(u_n+3) & \text{pour tout entier naturel } n \neq 0 \end{array}\right.$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. (a) Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

(b) Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)

2. (a) Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

(b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

(d) Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.

(e) En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u − 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

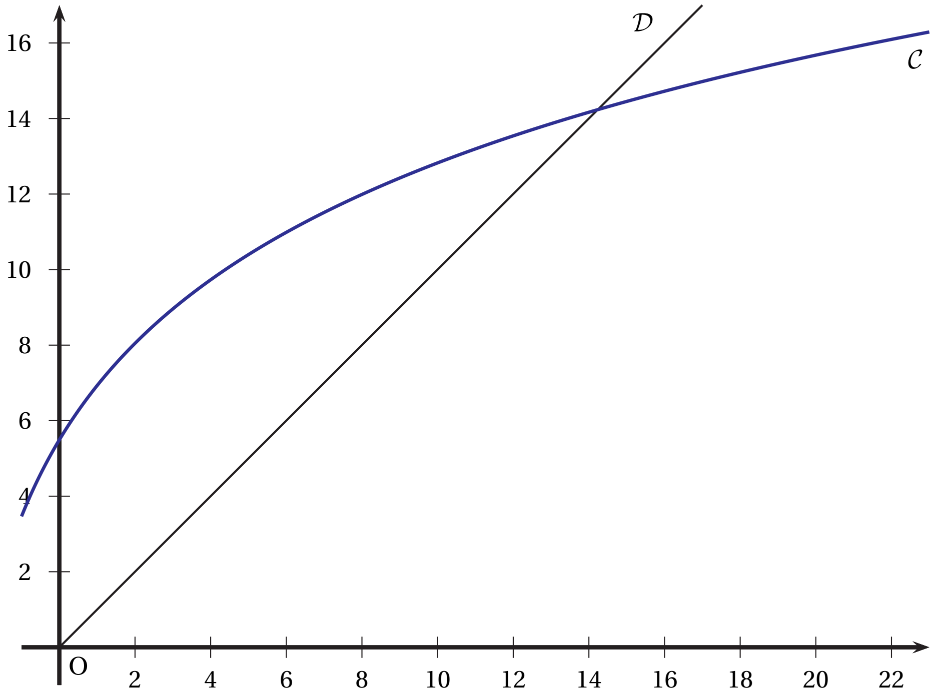
(a) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Justifier que cet algorithme se termine.

(b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

Annexe

À rendre avec la copie


$\mathcal{D}$
$\mathcal{C}$
16
14
12
10
8
6
4
2
O
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22

EXERCICE 16 correction **Polynésie 2012**

Partie A

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N-1$

Affecter à U la valeur $3U-2k+3$
Fin pour

Sortie
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N=3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-n+1$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=3^n+n-1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

(a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

(b) Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.

(c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p=3$.

(d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

EXERCICE 17 correction Amerique du Nord 2013

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

(a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

(b) Que permet de calculer cet algorithme ?

(c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

(b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

(c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

(b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

(d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Exercice 3 **5 points**

EXERCICE 18 correction Asie 2013

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2. (a) Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

(b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

(b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

(b) montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 19 correction Liban 2013

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par
$$\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n}\end{array}\right.$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v

Fin algorithme

Algorithme N° 2

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
Lire n
Pour i variant de 1 à n faire
v prend la valeur 1
  Afficher v
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour

Fin algorithme

Algorithme N° 3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  Afficher v
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **(a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

(c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par
$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

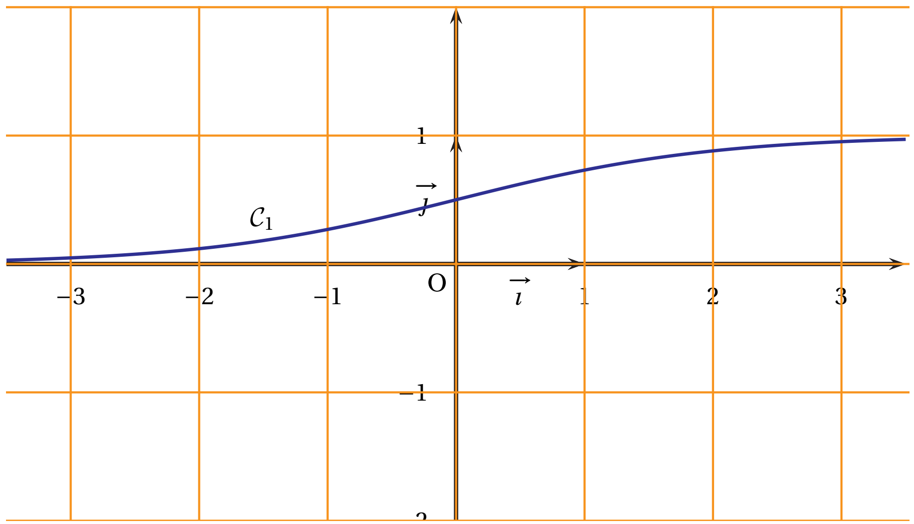
1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

ANNEXE à rendre avec la copie

Représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1



Exercice 20 correction Métropole 2013

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

(b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n + 3.$$

(b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

(c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n}{n^2}.$$

(a) Exprimer S_n en fonction de n.

(b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

EXERCICE 21 correction Centres Étrangers 2013

Candidats n'avant pas choisi la spécialité mathématique

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur … Affecter à n la valeur … Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	…	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,206 3	0,169 3	…	0,010 2	0,010 1

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Exercice 22 correction **Métropole septembre 2013**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

(b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

(c) Établir que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

(d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n,\ u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

(a) Établir que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

(b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

(c) On admet que pour tout entier naturel $n, u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 23 correction Nouvelle Calédonie 2013

Commun à tous les candidats

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que K < N
	Affecter K + 1 à K
	Affecter U à W
	Affecter $\frac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\frac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

(b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

(b) Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

(c) En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

EXERCICE 24 correction **Polynésie 2013**

Candidats n'ayant pas suivis l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

(a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

(b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

(b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

(d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 25 correction Amerique du Sud 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.

2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.

3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :
$v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

3. **(a)** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

(b) En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?

5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).

On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

Déterminer la valeur de ℓ.

6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

EXERCICE 26 correction Amerique du Nord 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1100$, faire :
		Affecter à a la valeur …
		Affecter à n la valeur …
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.

(a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

(b) Exprimer u_n en fonction de n.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Exercice 27 correction Antilles 2014

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & \frac{1}{5}u_n + 3\times 0,5^n. \end{array}\right.$$

1. (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

(b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^n.$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

(c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0,5^n$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

(b) En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n.$$

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

EXERCICE 28 correction Antilles septembre 2014

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

(b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\mathrm{e}^{-x} = x$.
Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

Partie C

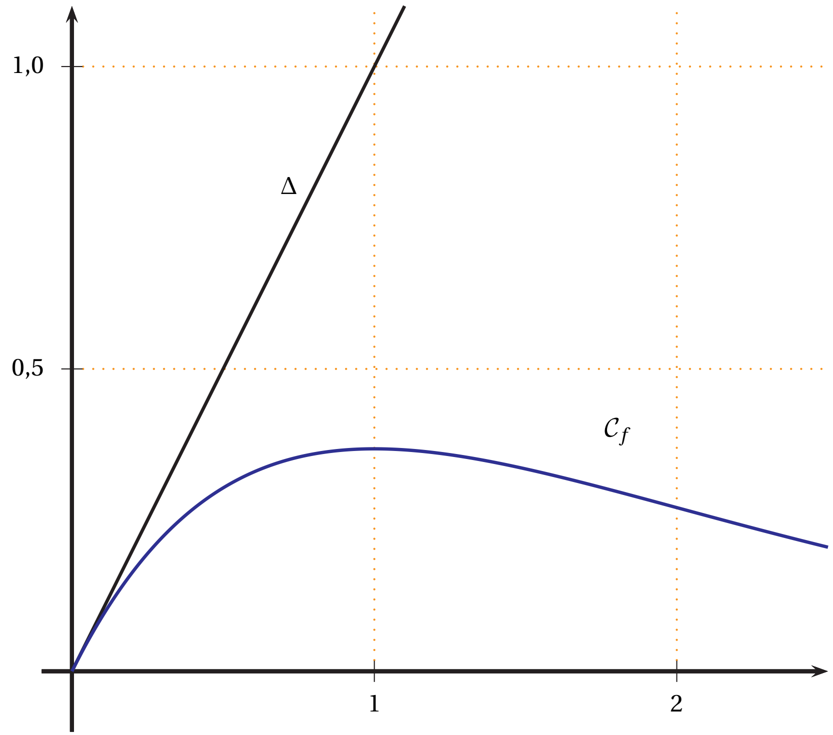
On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme donné en **annexe** afin qu'il calcule S_{100}.

Annexe à rendre avec la copie

Partie B - Question 1



Partie C

```
Déclaration des variables :
    S et u sont des nombres réels
    k est un nombre entier
Initialisation :
    u prend la valeur ……
    S prend la valeur ……
Traitement :
    Pour k variant de 1 à ….
        u prend la valeur u × e^(−u)
        S prend la valeur ….
    Fin Pour
    Afficher ……
```

EXERCICE 29 correction **Asie 2014**

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

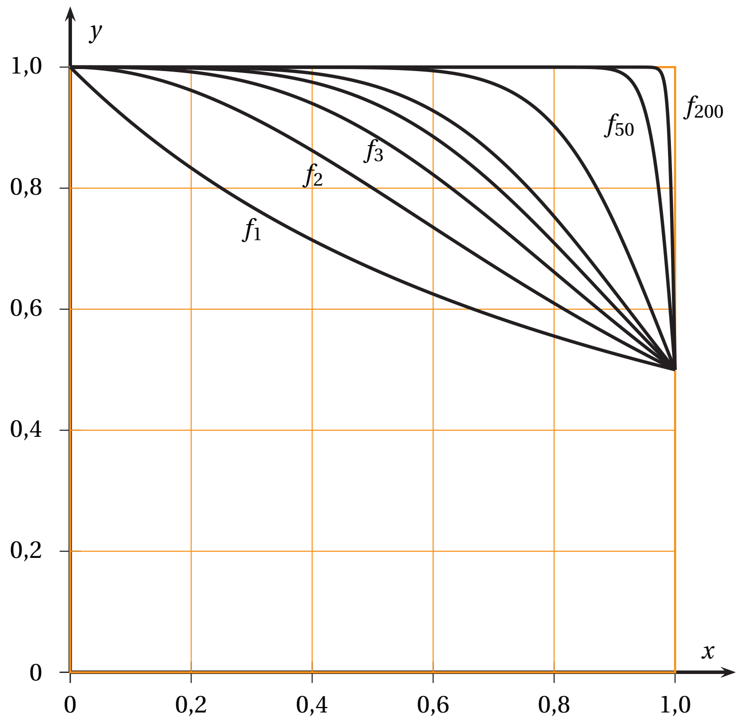
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. **(a)** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\mathrm{I}_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^n\right)\mathrm{d}x$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0

Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$
	Demander un entier $p \geqslant 1$
	Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :
	    x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$
	    I prend la valeur $\mathrm{I} + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$
	Fin Pour
	Afficher I

(a) Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

(b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

Exercice 30 correction Métropole 2014

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$.

2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

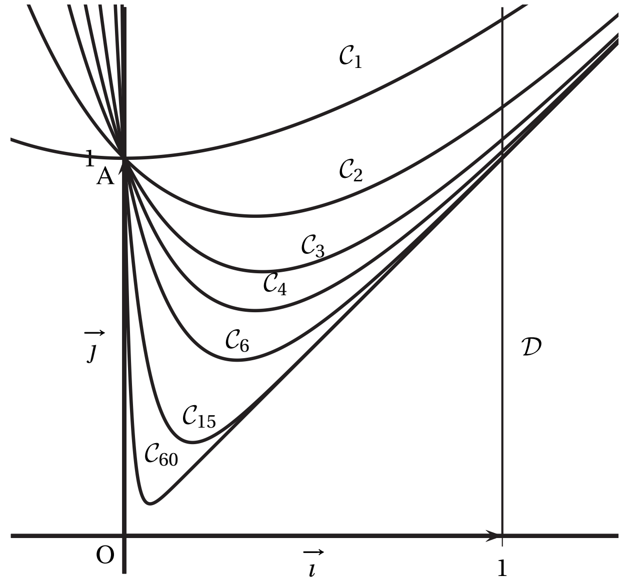
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.



(a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

(b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire le signe de $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 31 correction Métropole septembre 2014

Commun à tous les candidats

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

(a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

(b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

(c) Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.

Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.

L algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un entier naturel.
	v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15
	Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
	Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v+4$
	Afficher v.
	Fin de boucle.

(a) Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

(b) Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

(c) On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

(a) Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.

Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

(c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

(d) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 32 correction **Nouvelle Calédonie 2014**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On note α la solution.

On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

4. (a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

où α est le réel défini dans la question 2.

(b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

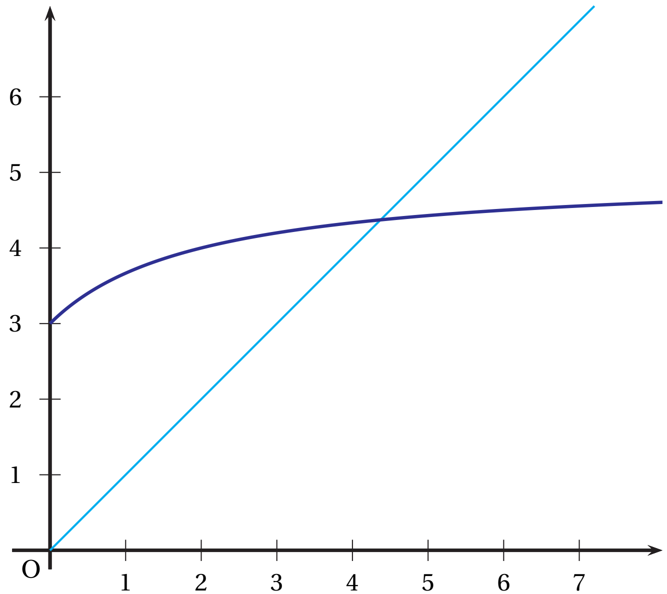
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

(a) Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

(b) Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

(c) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Annexe 1 à rendre avec la copie



Annexe 2 à rendre avec la copie

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que …
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur …
	Affecter à s la valeur …
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s.

EXERCICE 33 correction Nouvelle Calédonie mars 2014

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x).$$

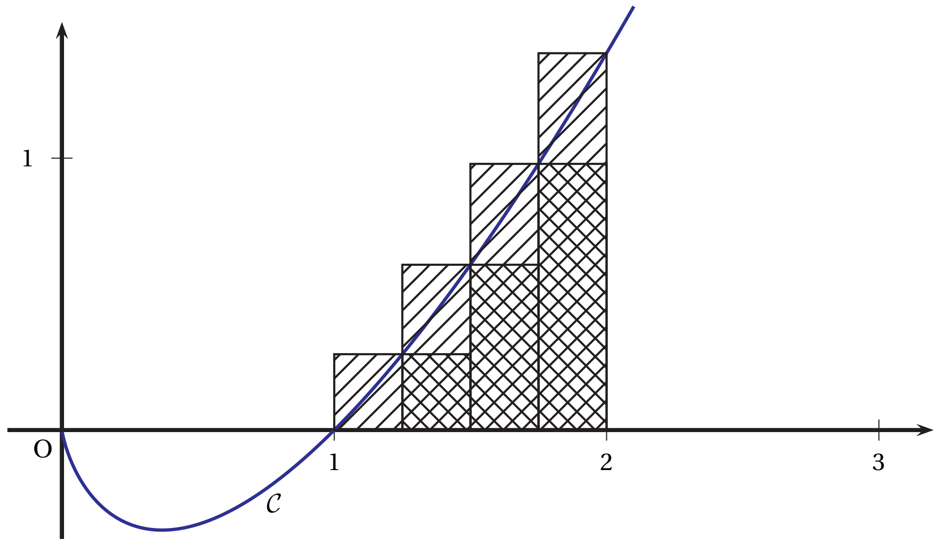
1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0~;~+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.

3. Déterminer les variations de f sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.
Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$. (voir la figure ci-après).



Algorithme :

Variables
k et n sont des entiers naturels
U, V sont des nombres réels
Initialisation
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
Affecter à U la valeur $\text{U} + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $\text{V} + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
Afficher U
Afficher V

1. (a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ?

(b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?

(c) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$\begin{array}{rcl} \text{U}_n & = & \dfrac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + f\left(1 + \dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1 + \dfrac{n-1}{n}\right)\right] \\ \text{V}_n & = & \dfrac{1}{n}\left[f\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + f\left(1 + \dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1 + \dfrac{n-1}{n}\right) + f(2)\right] \end{array}.$$

On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $\text{U}_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant \text{V}_n$.

(a) Trouver le plus petit entier n tel que $\text{V}_n - \text{U}_n < 0,1$.

(b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$?

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

EXERCICE 34 correction **Polynésie 2014**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

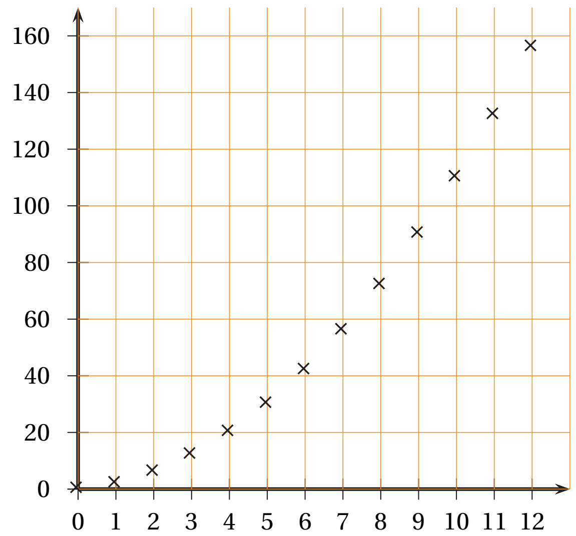
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel	**Variables :**	n est un entier naturel
	u est un réel		u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0	**Traitement :**	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :		Pour i allant de 0 à $n-1$:
	u prend la valeur $u + 2i + 2$		u prend la valeur $u + 2i + 2$
	Fin Pour		Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



(a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

Démontrer cette conjecture.

(b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.

Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

(b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 35 correction Antilles 2015

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement	: Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u+0,5(k-1)-1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p=2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape. Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1}=0,5u_n+0,5n-1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.

2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p=4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0,5$	$-0,75$	$-0,375$

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?

Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1}>u_n$.

Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=0,1u_n-0,1n+0,5$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,5$ et exprimer alors v_n en fonction de n.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n=10\times 0,5^n+n-5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

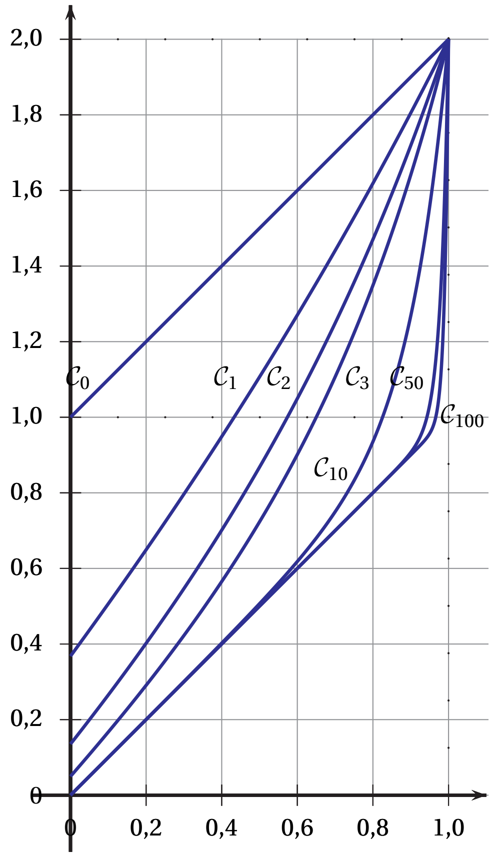
EXERCICE 36 correction **Asie 2015**

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Quelques-unes des courbes $\mathcal{C}_n$ sont représentées ci-après.



Partie A : généralités sur les fonctions f_n

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est croissante et positive sur l'intervalle [0 ; 1].

2. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_n$ ont toutes un point commun A, et préciser ses coordonnées.

3. À l'aide des représentations graphiques, peut-on conjecturer le comportement des coefficients directeurs des tangentes en A aux courbes $\mathcal{C}_n$ pour les grandes valeurs de n ?

Démontrer cette conjecture.

Partie B : évolution de $f_n(x)$ lorsque x est fixé

Soit x un réel fixé de l'intervalle [0 ; 1] . Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie C : aire sous les courbes $\mathcal{C}_n$

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
À partir des représentations graphiques, conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, puis démontrer cette conjecture.

Exercice 4 **5 points**

Exercice 37 correction **Centres Étrangers 2015**

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

(a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(2\mathrm{e}^x + 1\right)$.

(b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

(c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

(a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

(b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

(c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > \mathrm{M}$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que … … … Fin tant que
Sortie	Afficher n

(a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $\mathrm{M} = 60$.

Exercice 38 correction Liban 2015

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

(b) En déduire la valeur exacte de u_1.

3. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

```
Variables :       i et n sont des entiers naturels
                  u est un réel
Entrée :          Saisir n
Initialisation :  Affecter à u la valeur ...
Traitement :      Pour i variant de 1 à ...
                    |Affecter à u la valeur ...
                  Fin de Pour
Sortie :          Afficher u
```

(b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4. (a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

(b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

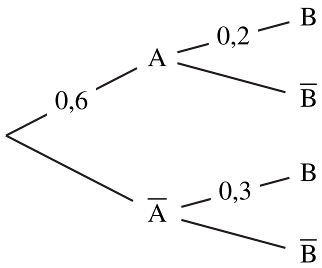
Exercice 39 correction **Métropole septembre 2015**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Question 1

On considère l'arbre de probabilités ci-contre :



Quelle est la probabilité de l'événement B ?

a. 0,12 **b.** 0,2 **c.** 0,24 **d.** 0,5

Question 2

Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T, en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

a. 0,125 **b.** 0,25 **c.** 0,75 **d.** 0,875

Question 3

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

Quelle est la valeur arrondie au millième de la probabilité $P(X \geqslant 135)$?

a. 0,159 **b.** 0,317 **c.** 0,683 **d.** 0,841

Question 4

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite.

Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

a. [0,371 ; 0,637] **b.** [0,480 ; 0,523] **c.** [0,402 ; 0,598] **d.** [0,412 ; 0,695]

Question 5

Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.

Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

a. 400 **b.** 800 **c.** 1 600 **d.** 3 200

Exercice 40 correction Métropole septembre 2015

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathcal{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{I}_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ telle que :

$$\mathrm{H}(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{I}_n \leqslant 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont

- K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
- A, x et h des réels.

Entrée :	Saisir K entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à A la valeur 0 Affecter à x la valeur 0 Affecter à h la valeur $\dfrac{1}{\mathrm{K}}$

Traitement	Pour i variant de 1 à K
	    Affecter à A la valeur $\mathrm{A} + h \times f(x)$
	    Affecter à x la valeur $x + h$
	Fin Pour

Sortie	Afficher A

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $\mathrm{K} = 4$.
Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

i	A	x
1		
2		
3		
4		

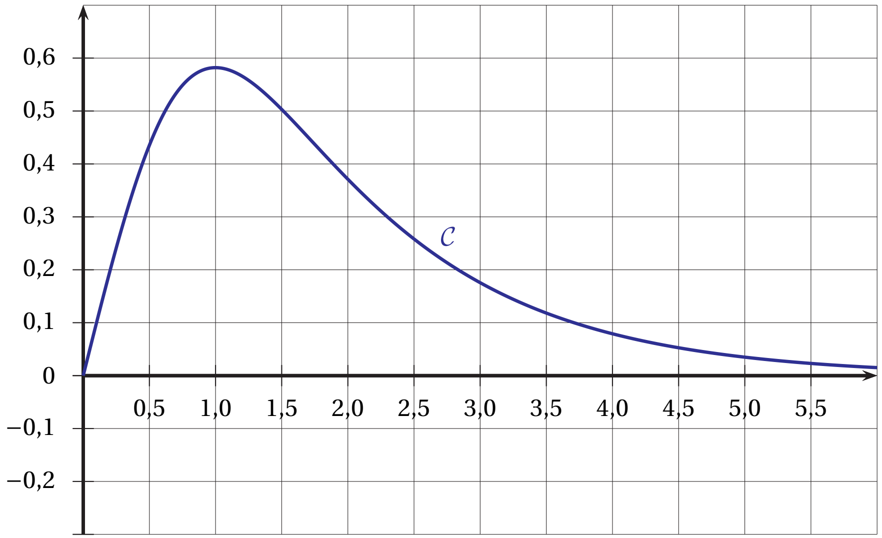
2. En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $\mathrm{K} = 8$.

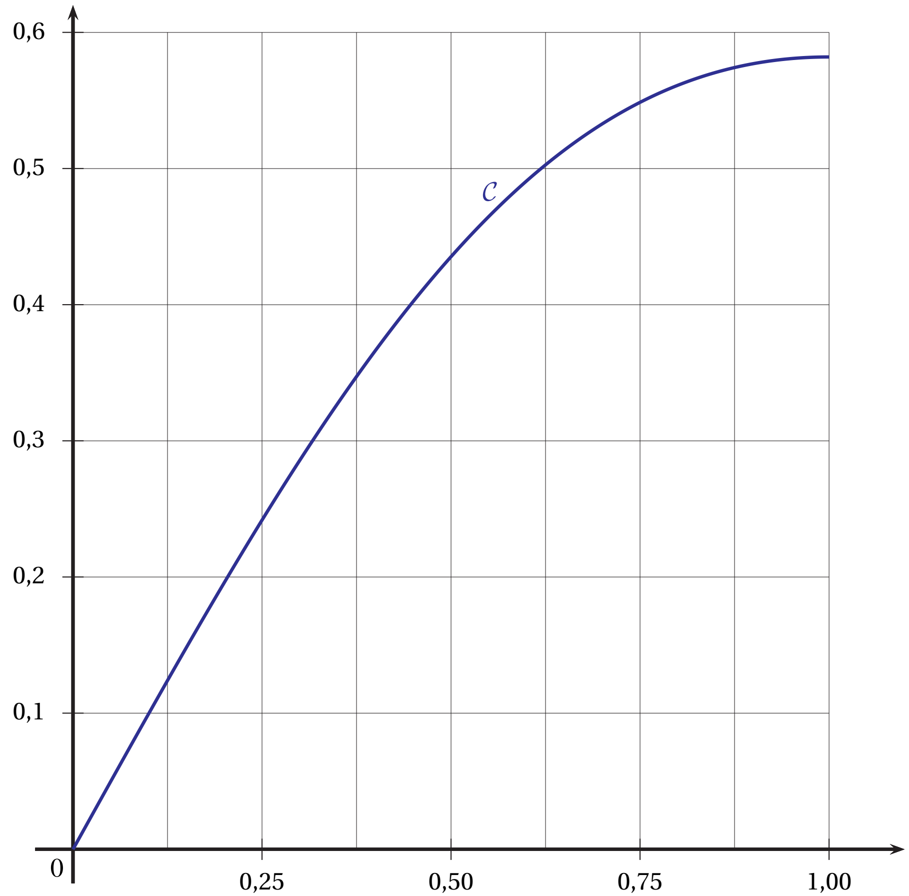
3. Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

ANNEXE

À rendre avec la copie

Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,6]$





Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,1]$

Exercice 41 correction Polynésie 2015

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.
On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A -- Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

```
Variables :        n, k entiers
                   S, v réels
Initialisation :   Saisir la valeur de n
                   v prend la valeur ...
                   S prend la valeur ...
Traitement :       Pour k variant de ...à ...faire
                   | ...prend la valeur ...
                   | ...prend la valeur ...
                   Fin Pour
Sortie :           Afficher S
```

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B -- Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C -- Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.

2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 42 correction Pondichéry 2015

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$.

(a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

(b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

(c) La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

EXERCICE 43 correction **AmeriqueSudS2016-exo-3.tex**

Commun à tous les candidats

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

1. (a) À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n), conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n. Démontrer cette conjecture.

(b) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite (u_n).

2. Compléter, dans l'annexe 2, l'algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$.

Annexe 2 :

Variables :	n, a et b sont des nombres.
Initialisation :	n prend la valeur 0
	a prend la valeur 0
	b prend la valeur $0,5$.
Traitement :	Tant que $\lvert b - a\rvert$ ....
	n prend la valeur ....
	a prend la valeur ....
	b prend la valeur ....
	Fin Tant que.
Sortie :	Afficher ....

EXERCICE 44 correction Asie 2016

Commun à tous les candidats

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. (a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.

On précisera en particulier ce que représente u_n.

(b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

(c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.

Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.

(b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

(b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1+49\mathrm{e}^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. (a) Calculer $f(0)$.

(b) Démontrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.

(c) Étudier le sens de variation de la fonction f.

(d) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.

Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.

En déduire la réponse au problème.

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.

L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production.
L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.
L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause ?

Exercice 45 correction Nouvelle Calédonie 2017

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 0. \end{array}\right.$$

On obtient à l'aide d'un tableur les premiers termes de cette suite :

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(en valeurs exactes)	(en valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	1/2	0,5
5	2	2/3	0,666 666 667
6	3	3/4	0,75
7	4	4/5	0,8
8	5	5/6	0,833 333 333
9	6	6/7	0,857 142 857
10	7	7/8	0,875
11	8	8/9	0,888 888 889
12	9	9/10	0,9
13	10	10/11	0,909 090 909

Prouver que la suite (u_n) converge.

EXERCICE 46 correction **Nouvelle Calédonie novembre 2016**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.

Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

EXERCICE 47 correction Polynésie 2016

Commun à tous les candidats

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

Correction

Exercice 1 énoncé Amerique du Nord 2011

Partie A

1. g somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

$g'(0) = 0$ et pour tout réel $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) \geqslant 0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle ($x > 0 \implies \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 > 1$).

Conclusion : $g'(x) \geqslant 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, la dérivée ne s'annulant qu'en 0 donc la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.

2. On a $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.

La fonction étant strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a, quel que soit x, $g(x) \geqslant g(0)$, donc $g(x) \geqslant 0$.

3. On vient de démontrer que pour tout réel de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$g(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x \geqslant 1$.

Partie B

1. On a $f(0) = \dfrac{1-1}{1} = 0$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1} = 1$.

Comme la fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1 \implies$

$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \iff 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. (a) $f(x) - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + x^2 - 1}{\mathrm{e}^x - x} =$

$\dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + (x+1)(x-1)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) - (x+1)(1-x)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)\left(\mathrm{e}^x - x - 1\right)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

(b) La position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur $[0 ; 1]$ est donnée par le signe de la différence précédente : $f(x) - x$. Or on a vu sur $[0 ; 1]$, $g(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$. Comme de plus $1 - x > 0$, tous les termes du quotient sont positifs, donc $f(x) - x \geqslant 0$, ce qui signifie que la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite (D).

3. (a) En posant : $u(x) = \mathrm{e}^x - x$, u est dérivable sur $[0 ; 1]$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, donc $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

On reconnaît la dérivée de la fonction $\ln|u(x)|$, mais comme on a vu que $u(x) = \mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0, |u(x)| = u(x)$.

Conclusion : une primitive sur $[0 ; 1]$ de f est la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x - x\right)$.

(b) On a vu que sur $[0 ; 1]$, la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite (D), donc l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_0^1 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x \left[\mathrm{F}(x) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \mathrm{F}(1) - \frac{1}{2} - \mathrm{F}(0) =$

$\ln\left(\mathrm{e}^1 - 1\right) - \dfrac{1}{2} - \left[\ln\left(\mathrm{e}^0 - 0\right)\right] = \ln(\mathrm{e} - 1) - \dfrac{1}{2}$. (u. a.)

Partie C

1. Voir plus bas.

2. *Initialisation* : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et on a vu (question 2. b.)que sur $[0 ; 1]$ $f(x) - x \geqslant 0$, soit avec $x = u_0$, $f(u_0) - u_0 \geqslant 0 \iff u_1 - u_0 \geqslant 0 \iff u_1 \geqslant u_0$.

On a donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$\dfrac{1}{2} \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$ par croissance de la fonction f sur $[0 ; 1]$:

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f\left(u_p\right) \leqslant f\left(u_{p+1}\right) \leqslant f(1) \iff u_1 \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$

et comme $u_1 > u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n,

$\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

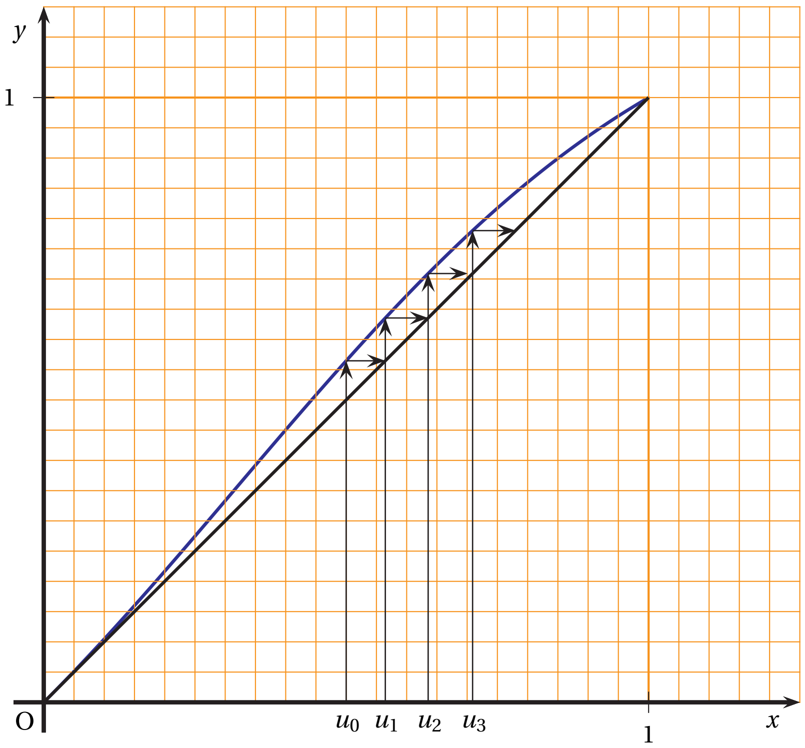
3. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et elle est majorée par 1.

Elle converge donc vers un réel $\ell \leqslant 1$.

Or f est continue, donc comme $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ on obtient par continuité $\ell = f(\ell)$ qui a pour solution dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ le nombre 1.

Conclusion $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

ANNEXE



EXERCICE 2 énoncé **Amerique du Sud 2011**

Commun à tous les candidats

1. (a) Voir à la fin.

(b) Il semble que la suite est décroissante et qu'elle converge vers 1.

2. (a) *Initialisation :* $u_0 = 4 > 1$. L'inégalité est vraie au rang 0 ;

Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel $k \geqslant 0$ tel que $u_k > 1$.

Alors $u_k + 1 > 2 \Longrightarrow \dfrac{1}{u_k+1} < \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \dfrac{4}{u_k+1} < 2 \Longrightarrow -\dfrac{4}{u_k+1} > -2 \Longrightarrow 3 - \dfrac{4}{u_k+1} > 1$.

Or $3 - \dfrac{4}{u_k+1} = u_{k+1}$.

On a donc démontré que si $u_k > 1$, alors $u_{k+1} > 1$.

Conclusion : on a démontré par récurrence que quel que soit le naturel n, $u_n > 1$.

(b) La fonction f somme de fonctions dérivables sur $]-1\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et

$f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0$ car quotient de deux nombres supérieurs à zéro.

La fonction f est donc croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Montrons par récurrence la décroissance de la suite :

Initialisation : $u_1 = 2,2 < u_0 = 4$. La relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel $k \geqslant 0$ tel que $u_k < u_{k-1}$; la fonction f étant croissante (tous les termes étant supérieurs à 1), on a $f(u_k) < f(u_{k-1}) \iff u_{k+1} < u_k$.

On a donc démontré que quel que soit le naturel n, $u_{n+1} < u_n$.

(c) On a démontré que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle est donc convergente vers un nombre ℓ supérieur ou égal à 1.

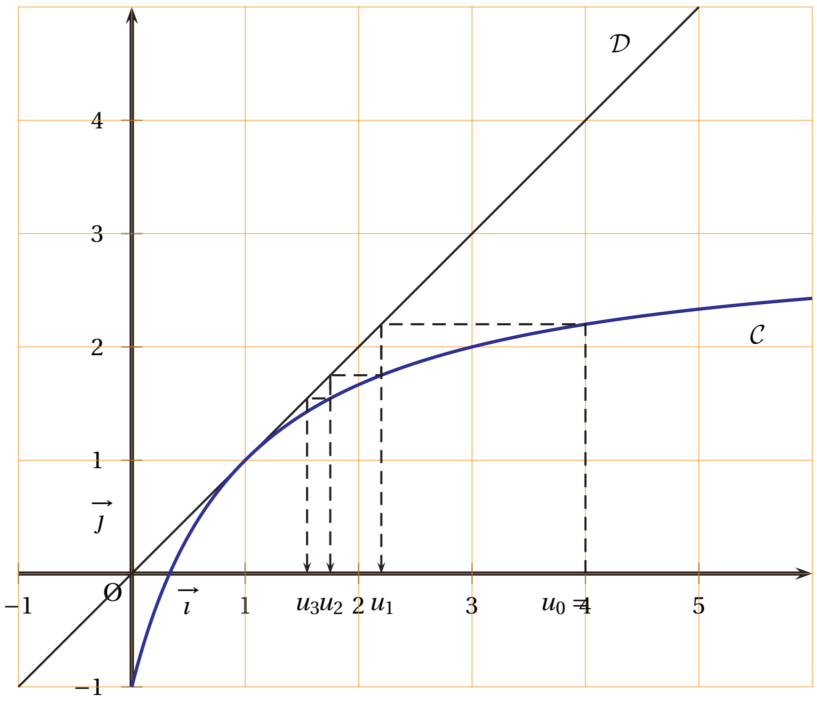
La fonction f est continue car dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$; la relation de récurrence

$u_{n+1} = f(u_n)$ donne à la limite $\ell = f(\ell) \iff \ell = 3 - \dfrac{4}{\ell+1} \iff \ell(\ell+1) = 3(\ell+1) - 4$

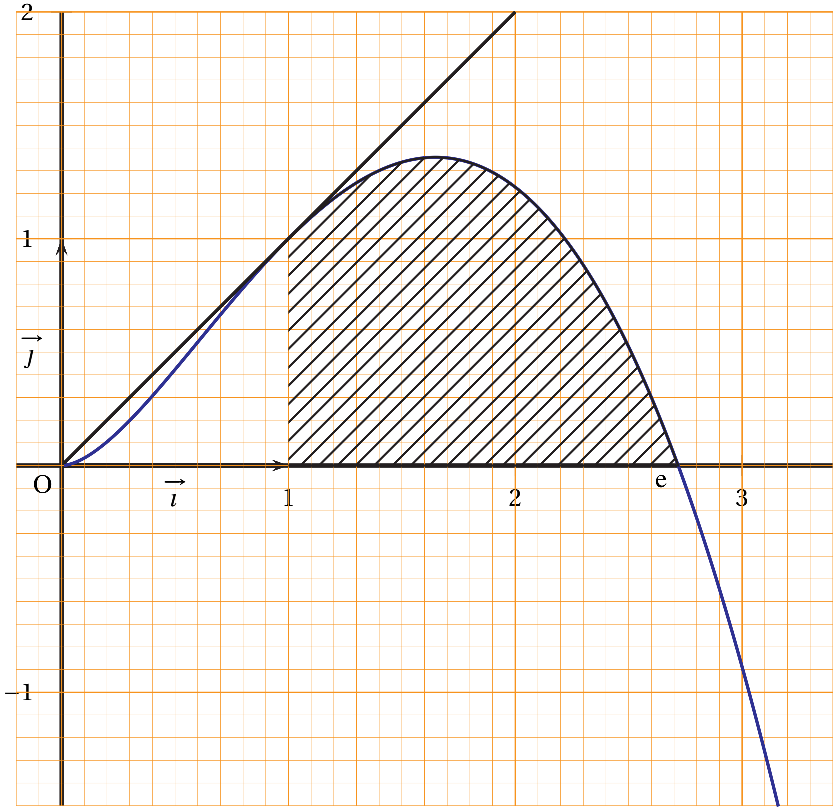
$\iff \ell^2 + \ell - 3\ell - 3 + 4 = 0 \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell-1)^2 = 0 \iff \ell - 1 = 0 \iff \ell = 1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

ANNEXE



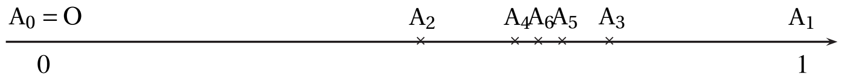
ANNEXE 2


2
1
−1
O
1
2
3
e
$\vec{\imath}$
$\vec{\jmath}$

EXERCICE 3 énoncé **Centres Étrangers 2011**

Commun à tous les candidats

1. (a)



On a $a_2 = \dfrac{a_0 + a_1}{2} = 0,5$, puis $a_3 = 0,75$, $a_4 = 0,625$ $a_5 = 0,6875$ et $a_6 = 0,65625$

(b) (c) Puisque le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$ cela se traduit en abscisses par $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. *Initialisation* : $-\dfrac{1}{2}a_0 + 1 = -0 + 1 = 1 = a_1$. La formule est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}, p > 0$ tel que $a_{p+1} = -\dfrac{1}{2}a_p + 1$, qui équivaut à $a_p = 2 - 2a_{p+1}$.

Alors $a_{p+2} = \dfrac{a_p + a_{p+1}}{2} = \dfrac{2 - 2a_{p+1} + a_{p+1}}{2} = \dfrac{2 - a_{p+1}}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}a_{p+1}$, donc la relation est vraie au rang $p + 1$.

On a donc démontré que pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.

3. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1 - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}v_n$.

La relation pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n$ montre que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{2}{3}$.

4. On sait que pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_0\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = -\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Or $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1 \implies \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Comme $a_n = v_n + \dfrac{2}{3}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 4 énoncé **Liban 2011**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La fonction est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = 1 - \text{e}^{-x}$.

Or $f'(x) > 0 \iff 1 - \text{e}^{-x} > 0 \iff 1 > \text{e}^{-x} \iff$ (par croissance de la fonction ln)

$0 > -x \iff x > 0$.

Conclusion : $f'(x) >$ sur $[0\ ;\ +\infty[$: la fonction est croissante sur cet intervalle.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-x} = 0$, donc $\lim x \to +\infty f(x) = +\infty$.

3. Soit d la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $d(x) = f(x) - x = \text{e}^{-x}$.

On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-x} = 0$ ce qui signifie que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de plus l'infini.

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.

Comme $x \geqslant 0$ et $1 + x \geqslant 1 > 0$, le quotient $g'(x)$ est positif ou nul : la fonction g est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Comme $g(0) = 0$ on en déduit que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0 \iff x - \ln(1+x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \ln(1+x) \iff \ln(1+x) \leqslant x$.

2. En appliquant l'inégalité trouvée à $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \iff$

$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \iff \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n} \iff \ln(n+1) \leqslant \ln n + \frac{1}{n}$.

3. On a pour tout réel positif x, $f(x) = x + \text{e}^{-x}$ d'où avec $n \geqslant 1$,

$f(\ln n) = \ln n + \text{e}^{-\ln n} = \ln n + \dfrac{1}{\text{e}^{\ln n}} = \ln n + \dfrac{1}{n}$, car pour $n > 1$, $\text{e}^{\ln n} = n$.

4. *Initialisation* $\ln 1 \leqslant u_1 = 0 + \text{e}^{-0} = 1$ est vraie.

Hérédité Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tel que $\ln p \leqslant u_p$. Donc :

$f(\ln p) \leqslant f(u_p)$ car la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Mais d'après la question 3.

$f(\ln p) = \ln p + \dfrac{1}{p}$, donc $\ln p + \dfrac{1}{p} \leqslant f(u_p) \iff \ln p + \dfrac{1}{p} \leqslant u_{p+1}$.

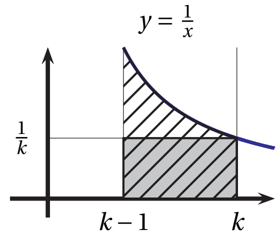
Mais d'après la question 2. : $\ln(p+1) \leqslant \ln p + \dfrac{1}{p}$, d'où finalement par transitivité :

$\ln(p+1) \leqslant u_{p+1}$.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.

5. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, par comparaison : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite est divergente.

6. (a) Un petit dessin vaut mieux qu'un long discours :



Le rectangle gris a une largeur de $\dfrac{1}{k}$ et une longueur de 1, donc une aire de $\dfrac{1}{k}$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ étant décroissante et positive, l'intégrale ci-dessus est égale à l'aire de la surface hachurée, d'où l'inégalité.

(b) On a admis que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.

On vient de démontrer que pour $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,\text{d}x$, donc l'inégalité précédente devient :

$u_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{x}\,\text{d}x + \cdots + \displaystyle\int_{n-2}^{n-1} \dfrac{1}{x}\,\text{d}x$ ou d'après la linéarité de l'intégrale :

$u_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^{n-1} \dfrac{1}{x}\,\text{d}x$ ou

$u_n \leqslant 1 + [\ln x]_1^{n-1}$ et finalement

$u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

7. On a pour $n \geqslant 1 \quad \ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1+\ln(n-1) \iff 1 \leqslant \dfrac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)}$.

Or, $\dfrac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{\ln(n-1)}{\ln n} = \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{\ln[n(1-\frac{1}{n})]}{\ln n} = \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{\ln n + \ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n}$

Donc $\dfrac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = \dfrac{1}{\ln n} + 1 + \dfrac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n}$. Il reste à écrire les limites, mais plus de formes indéterminés ici.

On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = 1$.

Finalement, d'après le théorème des « gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2} = 1$.

Ceci signifie que pour n assez grand $u_n \approx \ln n$.

EXERCICE 5 énoncé **Métropole 2011**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. (a) $f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

$\lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x} = \lim_{X\to+\infty}\mathrm{e}^X = +\infty$, d'où, par produit : $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

D'après le cours (croissances comparées), $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$:

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

(b) f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f_1'(x)$ est du signe de $1-x$, donc positif pour $x \leqslant 1$ et nulle pour $x = 1$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Sgn. $f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
Var. f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

(c) On sait que $k \geqslant 1$; $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$, ce qui n'est pas le cas pour f_k d'après le graphique, donc $k \neq 1$, c'est-à-dire $k \geqslant 2$.

2. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $f_n(0) = 0 \times \mathrm{e}^0 = 0$ et $f_n(1) = 1^n\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par l'origine et le point de coordonnées $\left(1 ; \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} + x^n \times (-\mathrm{e}^{-x}) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}$

3. $f_3'(x) = x^2(3-x)\mathrm{e}^{-x}$, qui s'annule en $x = 3$ et est du signe de $3-x$, donc positif pour $x \leqslant 3$ et négatif pour $x \geqslant 3$.

La fonction f_3 admet donc bien un maximum en 3.

4. (a) L'équation de la tangente T_k est : $y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1)$, donc $y = \dfrac{k-1}{\mathrm{e}}(x-1) + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ soit $y = \dfrac{(k-1)x - k + 2}{\mathrm{e}}$.

$y = 0$ pour $x = \dfrac{k-2}{k-1}$.

(b) On sait que T_k coupe l'axe des abscisses en $\dfrac{4}{5}$. On résout donc l'équation $\dfrac{k-2}{k-1} = \dfrac{4}{5}$. On obtient $5(k-2) = 4(k-1)$, d'où $k = 6$.

PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x}\end{cases}$. Alors : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$.

u et v sont dérivables, u' et v' sont continues. On peut effectuer une intégration par parties.

$\mathrm{I}_1 = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^{-x}]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} + [-\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} + 1 = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

2. (a) Sur $[0 ; 1]$, f_n est continue et positive, donc I_n représente l'aire comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, la courbe $\mathscr{C}_n$ et l'axe des abscisses. On voit sur le graphique que ces aires semblent décroissantes, donc la suite (I_n) semble décroissante.

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x\,\mathrm{d}x} = \int_0^1 [x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} - x^n\mathrm{e}^{-x}]\,\mathrm{d}x$ (par linéarité) $= \int_0^1 x^n(x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Sur $[0 ; 1]$, $x^n \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ et $x - 1 \leqslant 0$ donc $x^n(x-1)\mathrm{e}^{-x} \leqslant 0$. On intègre sur $[0 ; 1]$ une fonction continue négative, donc le résultat est un nombre négatif (positivité de l'intégrale).

On en déduit que $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leqslant 0$ donc la suite (I_n) est décroissante.

(c) Il est évident que $\mathrm{I}_n \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive). La suite (I_n) est donc décroissante et minorée, donc convergente vers un réel ℓ.

(d) Montrons que $\ell = 0$.

Première méthode : sur [0 ; 1], $x \mapsto -x$ est décroissante, donc par composition avec $\exp$,

$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante, donc $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0 = 1$.

Sur [0 ; 1], $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$, donc par propriété de l'intégration,

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent : $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$; or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème de gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

Deuxième méthode : On a : $\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u_{n+1}(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ avec $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1}(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{l} u'_{n+1}(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$

u'_{n+1} et v' sont continues, donc on peut effectuer une intégration par parties.

On obtient : $\mathrm{I}_{n+1} = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)\mathrm{I}_n$.

On en déduit : $\dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)\mathrm{e}} + \mathrm{I}_n$.

Si ℓ est la limite de I_n à l'infini, par passage à la limite, on obtient : $0 = 0 + \ell$ donc $\ell = 0$

Exercice 6 énoncé Métropole septembre 2011

Commun à tous les candidats

Partie A - Étude du signe d'une fonction

1. f somme de fonctions dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = 2x + \dfrac{4}{x}$.

Comme $x > 0 \Longrightarrow 2x > 0$ et $\dfrac{4}{x} > 0$, on déduit que $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} 4\ln x = -\infty$; par somme de limites, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

L'axe des ordonnées est donc asymptote verticale à la courbe représentative de f au voisinage de zéro.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$; par somme de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. La fonction f continue car dérivable croît sur $]0\,;\,+\infty[$ de $-\infty$ à $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$; donc tout réel, en particulier 0 a un antécédent unique dans $]0\,;\,+\infty[$.

Il existe donc α réel supérieur à zéro tel que $f(\alpha) = 0$.

3. De la question précédente résulte le signe de $f(x)$:

- si $0 < x < \alpha$: $f(x) < 0$;
- si $x = \alpha$: $f(x) = 0$;
- si $\alpha < x$: $f(x) > 0$.

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

1. $g(x) = x \iff \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2} = x \iff -\frac{1}{4}x^2 = \ln x$ (par croissance de la fonction logarithme népérien, les deux membres étant supérieurs à zéro) $\iff \frac{1}{4}x^2 + \ln x = 0 \iff x^2 + 4\ln x = 0 \iff f(x) = 0$.

On a vu que l'unique solution de cette équation est le réel positif α. Donc α est aussi l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

2. Voir plus bas. On peut conjecturer que la suite converge vers la solution de l'équation $g(x) = x$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ c'est-à-dire α.

3. Après avoir entré la fonction g dans la fonction $y_1(x)$ (calculatrice TI), on entre

0,5 Entrée

y_1(ANS(1)) Entrée

puis Entrée Entrée Entrée, …, on obtient :

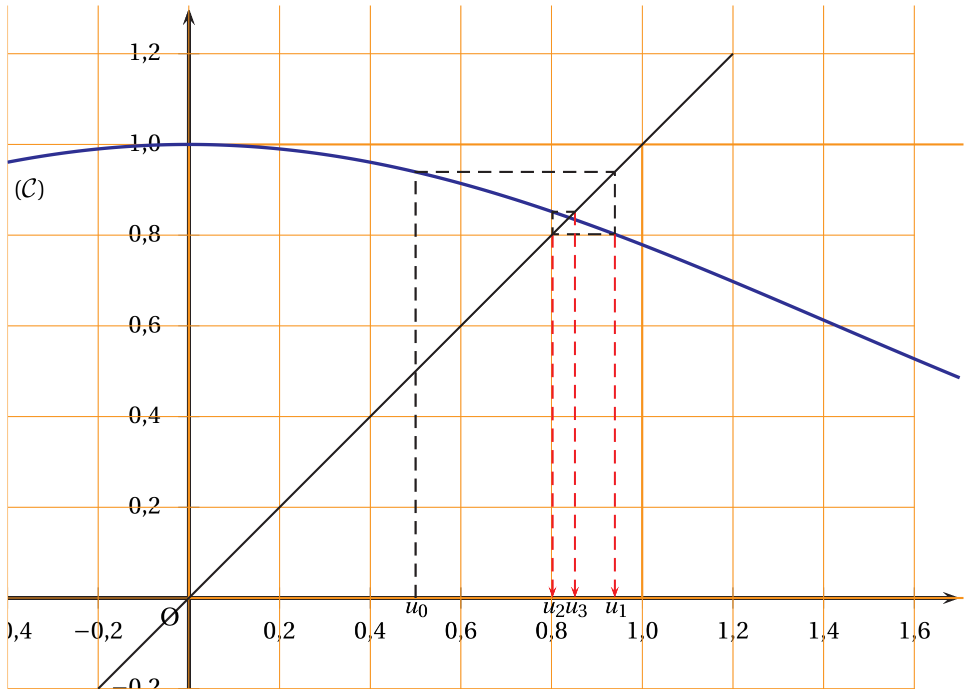
$u_0 = 0{,}5$, $u_1 \approx 0{,}939\,413$, $u_2 \approx 0{,}802\,018$, $u_3 \approx 0{,}851\,455$, $u_4 \approx 0{,}834\,232$, $u_5 \approx 0{,}840\,309$, $u_6 \approx 0{,}838\,174$,

$u_7 \approx 0{,}838\,925$.

Le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques est donc $n = 6$.

Puisqu'on a supposé que $u_6 \leqslant \alpha \leqslant u_7$, on a donc $0{,}838\,174 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}838\,925$.

Donc $0{,}838$ est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.



Partie C - Un problème de distance

1. Avec $M(x\ ;\ 2\ln x)$, on a $OM^2 = x^2 + (2\ln x)^2 = x^2 + 4(\ln x)^2$.

Comme $x^2 > 0$ et $4(\ln x)^2 > 0$, on a $OM^2 > 0$.

Donc $OM = \sqrt{x^2 + 4(\ln x)^2}$.

2. **(a)** h somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$h'(x) = 2x + 8(\ln x) \times \frac{1}{x} = 2x + 8\frac{\ln x}{x} = \frac{2x^2 + 8\ln x}{x} = \frac{2\left(x^2 + 4\ln x\right)}{x} = \frac{2f(x)}{x}.$$

Comme $x > 0$, le signe de $h'(x)$ est celui de $2f(x)$, donc celui de $f(x)$ qui a été étudié dans la partie A. Conclusion :

- si $0 < x\alpha : h'(x) < 0$: la fonction h est décroissante sur $[0\ ;\ \alpha[$;
- si $x > \alpha : h'(x) > 0$: la fonction h est croissante sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

(b) Le résultat précédent montre que la fonction h a un minimum $h(\alpha)$. La fonction définie par $x \longmapsto OM = \sqrt{h(x)}$ a les mêmes variations que la fonction h, donc un minimum en α.

Conclusion : il existe un point unique de (Γ) $A(\alpha\ ;\ 2\ln\alpha)$ tel que $OA < OM$ pour tout point M de (Γ) distinct de A.

3. La tangente T_A à la courbe (Γ) au point A a pour vecteur directeur $\left(1\ ;\ \varphi'(\alpha)\right) = \left(1\ ;\ \frac{2}{\alpha}\right)$.

La droite OA a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA}(\alpha\ ;\ 2\ln\alpha)$.

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est égal à : $1 \times \alpha + \frac{2}{\alpha} \times 2\ln\alpha = \alpha + \frac{4\ln\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + 4\ln\alpha}{\alpha}$.

On a vu dans la question précédente que $f(\alpha) = \alpha^2 + 4\ln\alpha = 0$ donc le produit scalaire est nul, ce qui montre que la la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T_A.

EXERCICE 7 énoncé Nouvelle Calédonie 2011

Commun à tous les candidats

1. (a) • Comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}1+\dfrac{1}{x}=+\infty$, puis $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, donc finalement $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

• Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x}=+1$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$, donc finalement $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

(b) Sur $]0\,;\,+\infty[$, f somme de composées de fonctions dérivables est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x}}-1=-\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1=-\frac{1}{x^2+x}-1=\frac{-1-x^2-x}{x^2+x}.$$

Comme $x>0$ implique $x+x^2>0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $-1-x^2-x=-\left(1+x+x^2\right)$.

Or $x>0\implies x+x^2>0\implies 1+x+x^2>1>0$ et finalement $-\left(1+x+x^2\right)<0$.

La négativité stricte de la fonction dérivée sur $]0\,;\,+\infty[$ implique la décroissance stricte de la fonction f sur cet intervalle.

(c) On a vu dans les deux questions précédentes que la fonction f décroit strictement sur $]0\,;\,+\infty[$ de $+\infty$ à $-\infty$. : il existe donc une valeur unique α de x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ telle que $f(\alpha)=0$.

La calculatrice donne $f(0,806)\approx 0,000\,79$ et $f(0,807)\approx -0,000\,9$.

Conclusion : $0,806<\alpha<0,807$.

2. (a) Voir l'annexe 1.

(b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?

- Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. » NON
- Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. » OUI
- Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. » NON

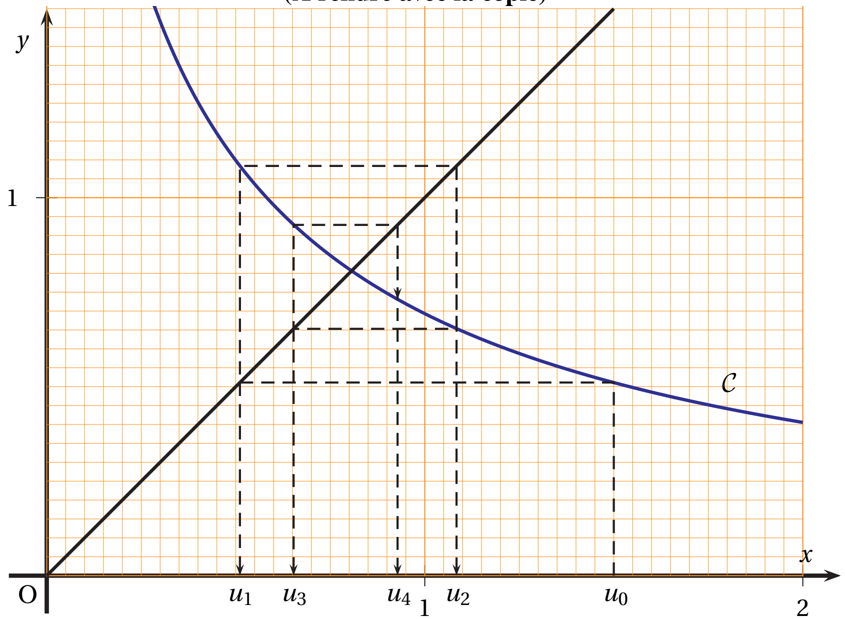
(c) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$, la relation $u_{n+1}=g\left(u_n\right)$ entraîne par continuité de la fonction g l'égalité $\ell=g(\ell)\iff \ell=\ln\left(1+\dfrac{1}{\ell}\right)$.

(d) L'égalité précédente s'écrit $\ln\left(1+\dfrac{1}{\ell}\right)-\ell=0$, ce qui montre que ℓ est une solution de l'équation $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-x=0\iff f(x)=0$.

On a vu à la question 1. c. que cette équation a une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$: α.

Donc $\ell=\alpha\approx 0,806$

ANNEXE
Commun à tous les candidats
(À rendre avec la copie)



Exercice 8 énoncé **Nouvelle Calédonie mars 2011**

Commun à tous les candidats

Partie A

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. $f(x) = x \iff x - \ln\left(x^2+1\right) = x \iff \ln\left(x^2+1\right) = 0 \iff x^2+1 = 1 \iff$
$x^2 = 0 \iff x = 0$

2. f somme de fonctions dérivables sur $[0~;~1]$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = 1 - 2x \times \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.
On a quel que soit x, $x^2+1 \geqslant 1 > 0$ et sur $[0~;~1]$, $(x-1)^2 \geqslant 0$, donc sur $[0~;~1]$, $f'(x) \geqslant 0$: la fonction est donc croissante sur $[0~;~1]$.

On a vu que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln 2 < 1$. La fonction est croissante de 0 à $1 - \ln 2 < 1$, donc toutes les images $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $[0~;~1]$.

Partie B

1. *Initialisation :* $u_0 = 1 \leqslant 1$, donc $u_0 \in [0~;~1]$.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \in$ [0 ă; 1] ; d'après la partie A, on a $u_{p+1} = f\left(u_p\right)$ et on a vu que si $u_p \in$ [0 ă; 1], alors
$f\left(u_p\right) = u_{p+1} \in [0~;~1]$.

On a donc pour tout naturel n, $u_n \in [0~;~1]$.

2. On a $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$

Or $u_n \geqslant 0 \Longrightarrow u_n^2 \geqslant 0 \Longrightarrow u_n^2+1 \geqslant 1 \Longrightarrow \ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0 \iff 0 \geqslant -\ln\left(u_n^2+1\right)$.

Conclusion : quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite est décroissante.

3. La suite est décroissante et tous ses termes sont minorés par 0 : elle est donc convergente vers une limite supérieure ou égale à 0.

Par continuité de la fonction dérivable f, on a à la limite :

$\ell = f(\ell)$, équation dont on a vu que la seule solution est 0.

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 9 énoncé **Antilles 2012**

1.
- $u_2 = \dfrac{1+1}{2\times 1}u_1 = \dfrac{1}{2}$
- $u_3 = \dfrac{2+1}{2\times 2}u_2 = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$
- $u_4 = \dfrac{3+1}{2\times 3}u_3 = \dfrac{4}{6}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$

2. (a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 0$.

- **Initialisation.** $u_1 = \dfrac{1}{2} > 0$, la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul on a $u_k > 0$, alors, comme $\dfrac{k+1}{2k} > 0$, on a $\dfrac{k+1}{2k}u_k > 0$, c'est-à-dire $u_{k+1} > 0$, et la propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion.** Pour tout entier naturel n non nul : $u_n > 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n+1}{n+n} \leqslant 1$. Comme $u_n > 0$ on en déduit que $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc que la suite (u_n) est décroissante.

(c) La suite (u_n) est décroissante, minorée (par 0), elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{n}u_n = \dfrac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 = \dfrac{1}{2}$.

(b) Par propriété des suites géométriques, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \dfrac{1}{2^n}$, on en déduit, comme $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, que $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

4. (a) On peut écrire, pour tout réel $x \in [1\ ;\ +\infty[$: $f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - \ln 2\right)$. On sait que $\lim x{+}\infty \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées), donc, par opérations sur les limites : $\lim x{+}\infty f(x) = -\infty$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\ln u_n = \ln\left(\dfrac{n}{2^n}\right) = \ln n - \ln(2^n) = \ln n - n\ln 2 = f(n)$.
On en déduit que : $\lim n{+}\infty \ln u_n = -\infty$, puis, par application de la fonction exponentielle et de la limite d'une composée : $\lim n{+}\infty u_n = 0$.

Remarque. On aurait pu déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) dès la question 2 c. En effet la relation $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}u_n$ entraîne que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\ell = \dfrac{1}{2}\ell$ et donc que $\ell = 0$.

EXERCICE 10 énoncé Asie 2012

1.

n	u	v	a	b
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

2. (a) Initialisation

Pour $n=0$, on a bien $u_0>0$ et $v_0>0$. L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Supposons que pour $n\in\mathbb{N}$: $u_n>0$ et $v_n>0$. Alors :

$$u_n+v_n>0 \Longrightarrow \frac{u_n+v_n}{2}>0 \Longrightarrow u_{n+1}>0$$

$$u_n^2>0 \text{ et } v_n^2>0 \Longrightarrow u_n^2+v_n^2>0 \Longrightarrow \frac{u_n^2+v_n^2}{2}>0 \Longrightarrow \sqrt{\frac{u_n^2+v_n^2}{2}}>0 \Longrightarrow v_{n+1}>0$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang $n+1$.

Ainsi, d'après le théorème de récurrence, on en déduit que : $\boxed{u_n>0 \text{ et } v_n>0 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}}$.

(b) $$v_{n+1}^2-u_{n+1}^2=\frac{u_n^2+v_n^2}{2}-\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2=\frac{2u_n^2+2v_n^2}{4}-\frac{u_n^2+2u_nv_n+v_n^2}{4}=\frac{u_n^2-2u_nv_n+v_n^2}{4}=$$

$$\boxed{\left(\frac{u_n-v_n}{2}\right)^2=v_{n+1}^2-u_{n+1}^2}.$$

D'où, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}^2-u_{n+1}^2\geqslant 0 \Longrightarrow v_{n+1}^2\geqslant u_{n+1}^2 \Longrightarrow v_{n+1}\geqslant u_{n+1} \Longrightarrow v_n\geqslant u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Par construction, $v_0\geqslant u_0$.

Conclusion : $\boxed{v_n\geqslant u_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}}$.

3. (a) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+v_n}{2}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}\geqslant 0$ d'après la question précédente.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante}}$.

(b) $0<u_n\leqslant v_n \Longrightarrow u_n^2\leqslant v_n^2 \Longrightarrow u_n^2+v_n^2\leqslant v_n^2+v_n^2 \Longrightarrow \dfrac{u_n^2+v_n^2}{2}\leqslant v_n^2 \Longrightarrow \boxed{v_{n+1}^2\leqslant v_n^2} \Longrightarrow$ $v_{n+1}\leqslant v_n$ (car les éléments de la suite v_n sont positifs).

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc décroissante}}$.

4. On a montré que :

- la suite u_n est croissante donc $u_0\leqslant u_n$ pour tout entier naturel n,
- la suite v_n est décroissante donc $v_n\leqslant v_0$ pour tout entier naturel n,
- pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant v_n$.

On en déduit que pour tout entier naturel $n, u_0\leqslant u_n\leqslant v_n\leqslant v_0$ d'où en particulier $\begin{cases} u_n \leqslant v_0 \\ v_n \leqslant u_0 \end{cases}$

La suite (u_n) est croissante majorée par v_0 donc, d'après théorème, elle est convergente.

La suite (v_n) est décroissante minorée par u_0 donc, d'après théorème, elle est convergente.

$\boxed{\text{Il s'agit, vous l'aurez compris, de suites adjacentes, car on peut démontrer que } \lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0}$.

Exercice 11 énoncé Antilles septembre 2012

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

1. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ car $\dfrac{x}{\ln x}$ est l'inverse de $\dfrac{\ln x}{x}$.
   Quand x tend vers 1, avec $x > 1$, $\ln x$ tend vers 0 avec $\ln x > 0$. Comme le numérateur tend vers 1, on a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$.
2. f quotient de fonctions dérivables sur $]1\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{\ln x - \frac{1}{x} \times x}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.
   Donc le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $\ln x - 1$.
   On a $\ln x - 1 > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > \mathrm{e}$ (par croissance de la fonction exponentielle.
   De même $\ln x - 1 < 0 \iff x < \mathrm{e}$.
   Enfin $\ln x - 1 = 0 \iff x = \mathrm{e}$.
   La fonction f est donc décroissante sur $]1\,;\,\mathrm{e}[$ et croissante sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$,
   $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}} = \mathrm{e}$ étant le minimum de f sur $]1\,;\,+\infty[$.
3. On vient de voir que f est croissante sur $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ et que $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ est le minimum, donc si $x \geqslant \mathrm{e}$, $f(x) \geqslant \mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

1. On a $u_0 = 5$, $u_1 = f(u_0) = \dfrac{5}{\ln 5} \approx 3,11$, $u_2 = f(u_1) \approx 2,74$.
   De A_0 on trace la verticale jusqu'à $\mathcal{C}$; de ce point l'horizontale jusqu'à la courbe d'équation $y = x$; de ce nouveau point la verticale jusqu'à l'axe des abscisses rencontré en A_1 et l'on recommence. Il semble que la suite est décroissante vers l'abscisse (ou l'ordonnée) du point commun à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{D}$.
2. **(a)** On a $u_0 = 5 > \mathrm{e}$.
   Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geqslant \mathrm{e}$, comme $u_{p+1} = f\left(u_p\right)$ on a vu lors de l'étude de la fonction f que si $x \geqslant \mathrm{e}$, alors $f(x) \geqslant \mathrm{e}$, donc $u_{p+1} \geqslant \mathrm{e}$.
   On a donc démontré par récurrence que quel que soit le naturel n, $u_n \geqslant \mathrm{e}$.

   (b) Soit $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \dfrac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n \ln u_n}{\ln u_n} = \dfrac{u_n(1 - \ln u_n)}{\ln u_n}$.

   Comme $u_n \geqslant \mathrm{e}$, $\ln u_n > \ln \mathrm{e}$ soit $\ln u_n > 1 > 0$ et comme $u_n > 0$, le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ est celui de la différence $1 - \ln u_n$.

   Or on vient de voir que $\ln u_n > 1 \iff 1 - \ln u_n < 0$.

   Conclusion $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

   (c) La suite est décroissante et minorée par e : elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant \mathrm{e}$.

   (d) Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et la fonction f étant continue car dérivable on a par limite au voisinage de l'infini : $\ell = f(\ell) \iff \ell = \dfrac{\ell}{\ln \ell} \iff 1 = \dfrac{1}{\ln \ell} \iff \ln \ell = 1 \iff \ell = \mathrm{e}$ par croissance de la fonction exponentielle et car $\ell > 0$.

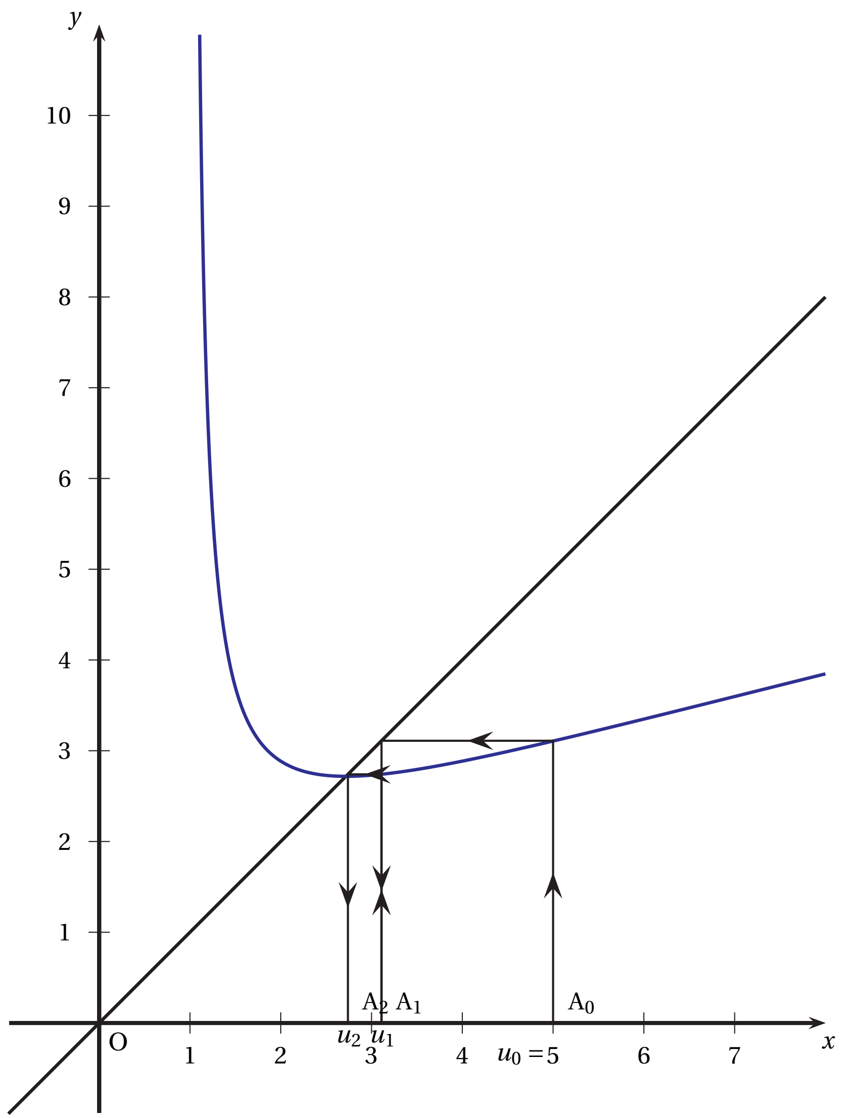
   La suite converge donc vers e.

3. L'algorithme affichera la valeur 3 : la croissance de la suite est très rapide : les trois premières décimales de e sont déjà trouvées.

ANNEXE

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie



Exercice 12 énoncé Métropole 2012

Commun à tous les candidats

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. • $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

Comme $\lim\limits_{x:\to+\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0$, on a donc $\lim\limits_{x:\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x:\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$.

• On a $\lim\limits_{x:\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, donc finalement par somme de limites : $\lim\limits_{x:\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Comme sur $[1\ ;\ +\infty[$, $x+1>0$, et $\dfrac{x}{x+1} > 0$ la fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Or $u'(x) = \dfrac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Donc $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{-x+x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Comme $x \geqslant 1$, la dérivée est clairement positive, donc la fonction est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ de $f(1) = \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{1}{2} \approx -0,193$ à 0 sa limite en plus l'infini.

3. Le tableau montre que $f(x) < 0$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots - \ln n.$$

1. L'algorithme donne successivement pour u les valeurs :

$0 + 1 = 1$

$1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$ valeur qu'il affiche.

2. Il suffit de modifier la sortie en : Afficher $u - \ln n$.

3. On peut conjecturer que pour n allant de 4 à 2000 la suite est décroissante et converge vers une valeur proche de 0,577.

Partie C

1. On a $u_{n+1} - u_n = \left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right] - \left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right] = \frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1) = \frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n)$. On a vu que pour $x \geqslant 1, f(x) < 0$, donc $u_{n+1}-u_n = f(n) < 0$ montre que $u_{n+1} < u_n$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

2. **(a)** Puisqu'on intègre de k strictement positif à $k+1$, on a donc

$0 < k \leqslant x \leqslant k+1 \iff 0 < \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$

On a donc en particulier $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k} \iff \frac{1}{k}-\frac{1}{x} \geqslant 0$. L'intégrale sur $[k\,;\,k+1]$ de la fonction continue et positive est un nombre positif.

- $\displaystyle\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \geqslant 0 \iff \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (par linéarité de l'intégrale.

Or $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\times(k+1-k) = \frac{1}{k}$.

L'inégalité précédente s'écrit donc : $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.

- On a $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1)-\ln k$.

Donc l'inégalité précédente s'écrit $\ln(k+1)-\ln k \leqslant \frac{1}{k}$ (1)

(b) On obtient la suite des inégalités suivante :

$\ln(1+1)-\ln 1 \leqslant \frac{1}{1}$

$\ln(2+1)-\ln 2 \leqslant \frac{1}{2}$

$\ln(3+1)-\ln 3 \leqslant \frac{1}{3}$

....

$\ln(n)-\ln(n-1) \leqslant \frac{1}{n-1}$

$\ln(n+1)-\ln n \leqslant \frac{1}{n}$

D'où par somme membres à membres et effet de « dominos » :

$\ln(n+1)-\ln 1 \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ ou encore

$\ln(n+1) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

(c) La fonction ln étant croissante, on a $\ln n < \ln(n+1)$ et comme $\ln(n+1) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ on en déduit que $\ln n < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \iff 0 < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, soit finalement $u_n > 0$.

3. On a vu que la suite est décroissante et ensuite qu'elle est minorée par 0 : elle converge donc vers une limite supérieure à zéro.

EXERCICE 13 énoncé **Métropole septembre 2012**

Commun à tous les candidats

1. f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{7}{x^2}\right)=\frac{1}{2x^2}\left(x^2-7\right)$ qui est du signe de x^2-7.

Donc $f'(x)=0 \iff x^2-7=0 \iff \left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)=0 \iff x=\sqrt{7}$ ou $x=\sqrt{7}$.

Il y a donc une solution dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$: $\sqrt{7}$.

Le trinôme x^2-7 est positif sauf entre ses racines donc ici sur $]0~;~\sqrt{7}[$.

Conclusion : f est décroissante sur $]0~;~\sqrt{7}[$ puis croissante sur $]\sqrt{7}~;~+\infty[$; donc $f\left(\sqrt{7}\right)$ est le minimum de f sur $]0~;~+\infty[$.

$f\left(\sqrt{7}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{7}+\frac{7}{\sqrt{7}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{7}+\sqrt{7}\right)=\sqrt{7}$. Par définition du minimum, on a donc pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$ y compris $u_0=3$, car $3^2>7$.

2. (a) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}\right)-u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{u_n}-u_n\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7-u_n^2}{u_n}\right)$.

Comme $\frac{1}{2}>0, u_n>0$ et que $u_n \geqslant \sqrt{7} \implies u_n^2 \geqslant 7 \implies u_n^2-7 \geqslant 0 \implies 7-u_n^2 \leqslant 0$, on en conclut que

$$u_{n+1}-u_n \leqslant 0$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

(b) La suite (u_n) étant décroissante et minorée par $\sqrt{7}$ est donc convergente vers une limite supérieure ou égale à $\sqrt{7}$.

(c) $\ell=\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{7}{\ell}\right) \iff 2\ell=\ell+\frac{7}{\ell} \iff \ell=\frac{7}{\ell} \iff \ell^2=7 \iff \ell=\sqrt{7}$ (puisque la limite est positive).

3. $u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}\right)-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}-2\sqrt{7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2+7-2u_n\sqrt{7}}{u_n}\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(u_n-\sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

(identité remarquable)

4. (a) *Initialisation* : $u_0-\sqrt{7}=3-\sqrt{7}\approx 0,35$ et $d_0=1$.

On a bien $u_0-\sqrt{7} \leqslant d_0$.

Hérédité :

Remarque préliminaire : on a démontré que $u_n \geqslant \sqrt{7}$, donc $u_n>1$ ou encore $\frac{1}{u_n}<1$ (2).

Supposons qu'il existe un naturel n tel que $u_n-\sqrt{7} \leqslant d_n$.

On a démontré à la question 3 que :

$u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\frac{\left(u_n-\sqrt{7}\right)^2}{u_n}$. Donc comme $u_n-\sqrt{7} \leqslant d_n \implies \left(u_n-\sqrt{7}\right)^2 \leqslant d_n^2$, l'égalité du 3 donne :

$u_{n+1}-\sqrt{7}<\frac{1}{2}d_n^2 \times \frac{1}{u_n}<\frac{1}{2}d_n^2$ d'après l'inégalité (2) ci-dessus.

Finalement $u_{n+1}-\sqrt{7}<\frac{1}{2}d_n^2 \iff u_{n+1}-\sqrt{7}<d_{n+1}$.

L'hérédité est établie.

Pour tout entier naturel n,

$$u_n-\sqrt{7} \leqslant d_n.$$

(b) L'algorithme indique que pour que $d_n \leqslant 10^{-9}$ il faut que $n \geqslant 5$.

On a donc $d_5 \leqslant 10^{-9}$.

Comme $u_5-\sqrt{7}<u_5$ c'est-à-dire $u_5-\sqrt{7}<10^{-9}$, on en déduit que u_5 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

Exercice 14 énoncé **Pondichéry 2012**

Commun à tous les candidats

1. (a) Les fonctions représentées sont positives ; I_n représente donc l'aire de la surface limitée par le représentation de f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. Le dessin suggère que la suite (I_n) est décroissante.

(b) $f_{n+1}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}\times\mathrm{e}^{-x}}{1+x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\times\mathrm{e}^{-x}=f_n(x)\times\mathrm{e}^{-x}$.

Or $0\leqslant x\leqslant 1 \iff -1\leqslant -x\leqslant 0 \Longrightarrow$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\mathrm{e}^{-1}\leqslant\mathrm{e}^{-x}\leqslant\mathrm{e}^{0}$. En multipliant chaque membre de cette dernière inégalité par $f_n(x)>0$, on obtient :

$f_n(x)\times\mathrm{e}^{-x}\leqslant f_n(x)\times 1$, soit finalement :

$f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$.

Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ des fonctions continues f_{n+1} et f_n :

$f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)\Longrightarrow \mathrm{I}_{n+1}\leqslant\mathrm{I}_n$: la suite (I_n) est décroissante.

2. (a) $0\leqslant x\leqslant 1\Longrightarrow 1\leqslant 1+x\leqslant 2\iff \dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{1+x}\leqslant\dfrac{1}{1}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient :

$\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\leqslant\mathrm{e}^{-nx}$.

D'autre part on sait que pour $1+x\geqslant 1$, on a $(1+x)^2\geqslant 1+x\iff$

$\dfrac{1}{(1+x)^2}\leqslant\dfrac{1}{1+x}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient :

$\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$.

Enfin il est évident que $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}>0$, donc finalement :

$$0\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\leqslant\mathrm{e}^{-nx}.$$

(b) Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ des inégalités précédentes on obtient

$\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ soit encore

$0\leqslant\mathrm{J}_n\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant\left[-\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1$ c'est à dire :

$0\leqslant\mathrm{J}_n\leqslant\mathrm{I}_n\leqslant-\dfrac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-n}-1\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-n}-1\right)=0$.

Conclusion d'après le théorème des « gendarmes », les suites (I_n) et (J_n) convergent vers 0.

3. (a) Posons $\left\{\begin{array}{lcllcl} u(x) & = & \dfrac{1}{1+x} & v'(x) & = & \mathrm{e}^{-nx}\\ u'(x) & = & -\dfrac{1}{(1+x)^2} & v(x) & = & -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\end{array}\right.$

Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[0\,;\,1]$; en intégrant par parties on a donc :

$\mathrm{I}_n=\left[-\dfrac{1}{n(1+x)}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1-\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$;

$\mathrm{I}_n=\left[-\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2n}+\dfrac{1}{n}\right]-\dfrac{1}{n}\mathrm{J}_n$ ou encore

$\mathrm{I}_n=\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2}-\mathrm{J}_n\right)$.

(b) Le résultat précédent peut s'écrire en multipliant par $n\neq 0$:

$n\mathrm{I}_n=1-\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2}-\mathrm{J}_n$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n=0$, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}n\mathrm{I}_n=1$$

Remarque : on a donc pour n assez grand $\mathrm{I}_n\approx\dfrac{1}{n}$.

Exemple : pour $n=10$, la calculatrice donne $\mathrm{I}_{10}\approx 0{,}091\approx\dfrac{1}{10}$.

EXERCICE 15 énoncé **Nouvelle Calédonie 2012**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. (a) f est une somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = 5 \times \dfrac{1}{x+3} - 1 = \dfrac{5-x-3}{x+3} = \dfrac{2-x}{x+3}$.

Or $x \geqslant 0 \implies x+3 \geqslant 3 > 0$.

- $2-x > 0 \iff x < 2$.
- $2-x < 0 \iff x > 2$.
- $2-x = 0 \iff x = 2$.

(b) - La fonction f est croissante sur $[0\,;2[$.

- La fonction f est décroissante sur $]2\ ;\ +\infty[$.

- $f(2) = 5\ln(5) - 2 \approx 4,047$ est le maximum de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On a le tableau de variations suivant :

x	0		2	α	$+\infty$
$f(x)$	$5\ln 3$	$\nearrow$	$5\ln(5)-2$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

(c) Comme $x > 0$, on peut factoriser :

$f(x) = 5\ln x\left(1+\dfrac{3}{x}\right) - x = 5\ln x + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = 5\ln x - x + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

(d) On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \ln 1 = 0$, donc finalement :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 5 \times (-x) = -\infty$.

D'autre part $f(0) = 5\ln 3$.

(e) Voir le tableau plus haut.

2. (a) Sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$, f est strictement décroissante de $f(2) > 0$ à $-\infty$. Il existe donc un réel unique $\alpha > 2$, tel que

$f(\alpha) = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0$.

(b) $f(14) = 5\ln 17 - 14 \approx 0,17 > 0$ et $f(15) = 5\ln 18 - 15 \approx -0,55 < 0$, donc $14 < \alpha < 15$.

La calculatrice livre :

$f(14,2) = 5\ln(17,2) - 14,2 \approx 0,02 > 0$ et

$f(14,3) = 5\ln(17,3) - 14,3 \approx -0,05 < 0$, donc

$$14,2 < \alpha < 14,3.$$

(c) Le tableau de variations montre donc que :

- $f(x) > 0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$;
- $f(x) < 0$ sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$;
- $f(\alpha) = 0$.

Partie B

1. (a)

(b) La suite semble être croissante.

2. (a) La fonction g a même sens de variation que la fonction $\ln$, soit croissante ; on peut également calculer $g'(x) = \dfrac{5}{x+3} > 0$ comme quotient de deux nombres supérieurs à zéro.

(b) On a vu dans la partie que $f(\alpha) = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) = \alpha \iff g(\alpha) = \alpha$.

(c) *Initialisation :* On a $0 \leqslant 4 \leqslant \alpha$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;

Hérédité : Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_p \leqslant \alpha$

Comme la fonction g est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc en particulier sur $[0\ ;\ \alpha]$, on a donc :

$g(0) \leqslant g\left(u_p\right) \leqslant g(\alpha)$ c'est-à-dire

$5\ln 3 \leqslant u_{p+1} \leqslant \alpha$ (d'après la question précédente).

On a donc *a fortiori* : $0 \leqslant u_{p+1} \leqslant \alpha$.

L'encadrement est vrai au rang $p+1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$

$0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

(d) On a vu que sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha[$, $f(x) > 0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$, donc pour tout u_n tel que $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$, $\ln(u_n+3) - u_n > 0 \iff \ln(u_n+3) > u_n \iff$

$g(u_n) > u_n \iff u_{n+1} > u_n$, ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.

Cette suite est croissante et majorée par α : elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant \alpha$.

(e) La relation $u_{n+1} = 5\ln(u_n+3)$ donne par continuité de la fonction dérivable g et par limiteen plus l'infini :

$\ell = \ln(\ell+3) \iff \ln(\ell+3) - \ell = 0 \iff f(\ell) = 0$.

Or on a vu à la question 2. a. de la partie A que α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. Conclusion $\ell = \alpha$.

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

3. (a) Cet algorithm calcule successivement $u_1, u_2, \ldots$. On a vu que cette suite converge vers le nombre α supérieur à $14,2$. La condition $u - 14,2 < 0$ sera donc rélisée et l'algorithme affichera la première valeur de la suite supérieure à $14,02$.

(b) Il suffit de taper sur la calculatrice :

$u_0 = 4$ Entrée

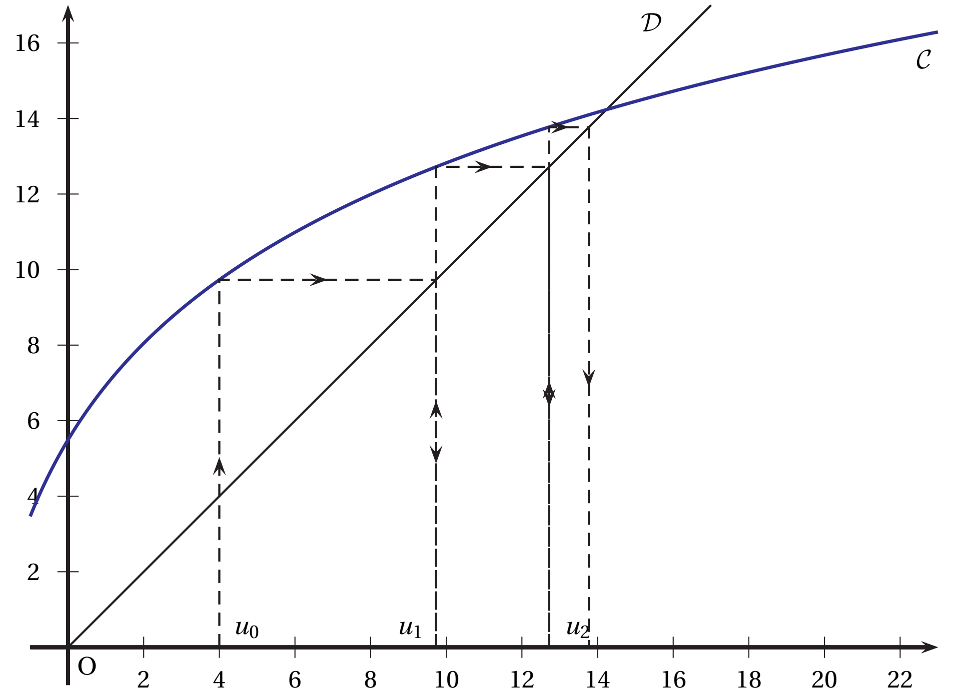
$5 \star \ln(\text{ANS}(1)+3)$ Entrée

Entrée, etc

On obtient $u_6 \approx 14,22315 > 14,2$.

Annexe

À rendre avec la copie



EXERCICE 16 énoncé **Polynésie 2012**

Partie A

Lorsque $N = 3$ l'algorithme effectue trois boucles avant de s'arrêter. À la fin de la boucle pour $k = 0$ on a $U = 3$; à la fin de la boucle $k = 1$ on a $U = 10$ et à la fin de la boucle correspondant à $k = 2$ on obtient $U = 29$.
L'affichage en sortie est donc 29.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. $u_1 = 3$ et $u_2 = 10$.

2. (a) Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : $u_n \geqslant n$.

- $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété P_0 est vérifiée.
- Supposons la propriété P_n vraie pour une valeur de n fixée.
  $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$ la propriété est donc alors vérifiée au rang $n + 1$.
- Conclusion : D'après la propriété de récurrence on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

(b) d'après le théorème de comparaison $\lim(u_n) = +\infty$.

3. Pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geqslant 3 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

(a) Pour tout entier naturel n $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 3.

(b) Pour tout entier naturel n, $v_n = 3^n$ et $u_n = v_n + n - 1$ donc $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

(a) La suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc on peut affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

(b) $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geqslant 27^p \geqslant 10^p$ donc $n = 3p$ est une valeur de n telle que $u_n \geqslant 10^p$; n_0 étant la plus petite de ces valeurs, on a donc $n_0 \leqslant 3p$

(c) $u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$ donc pour la valeur $p = 3$; $n_0 = 7$.

(d) Algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

```
Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul p.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
Tant que U < 10^p
Affecter à U la valeur 3U − 2k + 3
Affecter à k la valeur k + 1
Fin tant que
Sortie
Afficher k
```

Exercice 17 énoncé **Amerique du Nord 2013**

Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	∣ Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

(a) On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2u_0} = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2u_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$ et

$u_3 = \sqrt{2u_2} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 1.8340$ à 10^{-4} près.

(b) Cet algorithme permet le calcul du terme de rang n.

(c) D'après le tableau des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

2. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

- Initialisation

On a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leqslant 2$

- Hérédité

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n \leqslant 2$.

On a : $0 < u_n \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 < 2u_n \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{2u_n} \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

- Conclusion

$0 < u_0 \leqslant 2$

Si $0 < u_n \leqslant 2$ alors $0 < u_{n+1} \leqslant 2$.

D'après l'axiome de récurrence on a pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

(b) Déterminons le sens de variation de la suite (u_n).

Comme pour tout entier naturel n, $0 < u_n$, comparons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{2u_n}{u_n^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{u_n}}$.

Et comme on a démontré précédemment que $u_n \leqslant 2$, alors $\dfrac{2}{u_n} \geqslant 1$ et $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} \geqslant 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$; (u_n) est une suite croissante.

(c) On vient de prouver que d'une part la suite (u_n) est strictement croissante et que d'autre part elle est majorée par 2.

Ceci démontre que la suite (u_n) est convergente.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

(a) Pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$ donc en particulier :

$u_0 = \ln(u_0) - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

On a aussi pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$, mais $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

Alors : $v_{n+1} = \ln\sqrt{2u_n} - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) + \ln 2) - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln 2) = \dfrac{1}{2}v_n$

On peut en conclure que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

(b) On déduit de ce qui précède que pour tout entier naturel n, $v_n = -\ln 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$v_n = \ln(u_n) - \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{u_n}{2}\right) = v_n \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{2} = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = 2e^{v_n}$. u_n en fonction de n.

(c) Comme $\dfrac{1}{2} \in [0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x\right) = 1$, alors par composition des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^{v_n}\right) = 1$ et finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 2$

(d) L'algorithme ci-dessous permet d' afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leqslant 1,999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n

Exercice 18 énoncé Asie 2013

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. *Initialisation* : la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : supposons qu'il existe un naturel p tel que $u_p > 1$.

$\dfrac{1+3u_p}{3+u_p} = \dfrac{3+u_p-2+2u_p}{3+u_p} = \dfrac{\left(3+u_p\right)+\left(2u_p-2\right)}{3+u_p} = 1+2\dfrac{u_p-1}{3+u_p}$.

Par hypothèse de récurrence on a :

$u_p - 1$ et comme $u_p > 1, 3+u_p > 4 > 0$ donc son inverse $\dfrac{1}{3+u_p} > 0$ et finalement $\dfrac{u_p-1}{3+u_p} > 0$,

c'est-à-dire que $u_{p+1} = \dfrac{1+3u_p}{3+u_p} > 1$

Conclusion : on a démontré par récurrence que quel que soit le naturel n, $u_n > 1$.

2. (a) Quel que soit le naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

(b) On sait que quel que soit le naturel n, $u_n > 1 \implies u_n^2 > 1^2 \implies 1-u_n^2 < 0$ et comme $3+u_n > 0$ et finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers une limite supérieure ou égale à 1.

Partie B

1.

i	1	2	3
u	0,800	1,077	0,976

2. Il semble que la suite converge vers 1 par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

3. (a) $\mathrm{V}_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}-1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}+1} = \dfrac{0,5-0,5u_n}{1,5+1,5u_n} = \dfrac{-0,5\left(u_n-1\right)}{1,5\left(u_n+1\right)} = -\dfrac{1}{3}v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

(b) On a $v_0 = \dfrac{2-1}{2+3} = \dfrac{1}{3}$.

On sait qu'alors pour tout naturel n, $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. (a) Quel que soit le naturel n, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 1$, donc $v_n \leqslant \dfrac{1}{3}$ et par conséquent $v_n \neq 1$.

(b) $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1} \iff v_n\left(u_n+1\right) = u_n - 1 \iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \iff v_n u_n - u_n + = -1 - v_n \iff u_n\left(v_n-1\right) = -1 - v_n$ et comme $v_n \neq 1$,

$u_n = \dfrac{}{-1-v_n} v_n - 1 = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

(c) Comme $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, donc d'après le résultat précédent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1} = 1$.

Exercice 19 énoncé Liban 2013

Partie A

1. L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.

L'algorithme n° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n.

L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de 0 à v_n et les affiche tous.

2. D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à $n = 9$), il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3.

3. (a) Montrons par récurrence la propriété $\mathrm{P}_n : 0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n.

Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.

On suppose donc que $0 < v_n < 3$.

Donc $6 = 6-0 > 6-v_n > 6-3 = 3$, puis

$\frac{1}{6} < \frac{1}{6-v_n} < \frac{1}{3}$, car la fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$\frac{3}{2}\frac{9}{6} < \frac{9}{6-v_n} < \frac{9}{3} = 3$.

Ainsi $1 < \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3$. L'hérédité est établie puisque P_{n+1} est vraie.

Conclusion

Par le principe de récurrence, $\mathrm{P}_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n.

(b) $v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6-v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6-v_n)}{6-v_n} = \frac{(v_n-3)^2}{6-v_n}$.

Or, d'après la question précédente, $0 < v_n < 3$ pour tout n entier naturel, ainsi $6 - v_n$ est positif, donc $v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n-3)^2}{6-v_n} > 0$, ainsi la suite (v_n) est croissante.

(c) Comme la suite est majorée par 3 et croissante, alors elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

Partie B

1. $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1}-3} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{6-v_n}{3v_n-9} - \frac{1}{v_n-3} = \frac{6-v_n-3}{3v_n-9} = \frac{-v_n+3}{3v_n-9} = -\frac{v_n-3}{3(v_n-3)} = -\frac{1}{3}$.

Ainsi la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$.

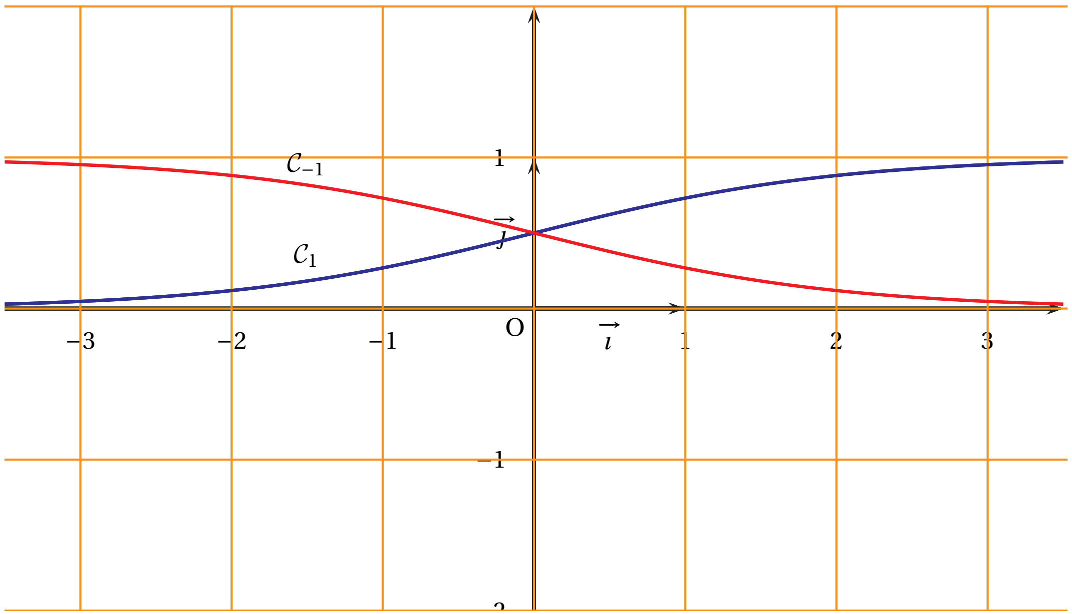
2. $w_n = w_0 + nr = \frac{1}{1-3} - \frac{1}{3}n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n$.

Comme $w_n = \frac{1}{v_n-3}$, on a $v_n = \frac{1}{w_n} + 3 = \frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}n} + 3 = \frac{6}{-3-2n} + 3$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6}{-3-2n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

ANNEXE à rendre avec la copie

Représentations graphiques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ des fonctions f_1 et f_{-1}



Exercice 20 énoncé **Métropole 2013**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) On calcule les premiers termes, par exemple en utilisant le mode récurrence de la calculatrice, et on obtient :

$u_1 = 2 + \frac{1}{3} \approx 2,33$ $\quad u_2 = 2 + \frac{8}{9} \approx 2,89$

$u_3 = 3 + \frac{16}{27} \approx 3,59$ $\quad u_i = 4 + \frac{32}{81} \approx 4,40$

(b) On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante. On pourra en tout cas affirmer qu'elle n'est pas décroissante.

2. (a) Nous allons procéder par récurrence :

Identification de la propriété : Pour tout entier naturel n, posons la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante : $u_n \leqslant n+3$.

Initialisation : Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0+3=3$, on vérifie bien :

$u_0 \leqslant 0+3$: *la propriété* $\mathcal{P}_0$ *est bien vraie.*

Hérédité : Pour un entier k naturel donné, on suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie.

On a $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1$.

Par hypothèse de récurrence : $u_k \leqslant k+3$

En multipliant par un nombre positif : $\frac{2}{3}u_k \leqslant \frac{2}{3}(k+3)$

Soit $\frac{2}{3}u_k \leqslant \frac{2}{3}k + 2$

Puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre :

$\frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leqslant \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k + 1$

Ce qui donne : $u_{k+1} \leqslant k+3 \leqslant k+4$. On a donc $u_{k+1} \leqslant (k+1)+3$, c'est à dire que la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Nous avons donc démontré le caractère héréditaire de la véracité des propriétés $\mathcal{P}_n$.

Conclusion : Puisque la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire que pour tout entier naturel n, on a $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est à dire que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \leqslant n+3$.

(b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3}$

On a donc bien $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \times (-u_n + n + 3) = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$. Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leqslant n+3$ ce qui équivaut à dire que la différence $n+3-u_n$ est positive, et elle le reste en étant multipliée par $\frac{1}{3}$, donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante, dès le rang 0.

3. (a) Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de v_n :

$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$

Donc $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

La relation de récurrence obtenue confirme que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

(b) On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite v : $v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n = u_n - n$, on en déduit :

$u_n = v_n + n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée :

$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

(c) Puisque la raison q est strictement comprise entre -1 et 1, on en déduit que la limite de la suite v est 0, et donc par limite d'une somme de suites, la limite de la suite u est donc $+\infty$, et la suite u est donc divergente.

4. (a) S_n est la somme de $n+1$ termes de la suite u_n. Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme u_n est la somme de v_n et de n, donc en réordonnant les termes, S_n est la somme de deux « sous-sommes » : celle des $n+1$ premiers termes de la suite v et celle des $n+1$ premier entiers naturels.

La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :

$$v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est à dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, donc elle vaut :

$\dfrac{0+n}{2} \times (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (résultat classique).

Finalement, on a $S_n = 6 \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(b) On en déduit : $T_n = \dfrac{6 \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Puisque, une fois encore, q est entre -1 et 1, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.

Donc par limite d'une somme de suites, puis d'un produit de suites : $\lim\limits_{n \to +\infty} 6 \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, donc par limite d'un quotient de suites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6 \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0$.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, et donc finalement, par limite d'une somme de suites, on arrive à conclure que la suite T converge vers $\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 21 énoncé Centres Étrangers 2013

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Partie A - Algorithmique et conjectures

1. Affecter à u la valeur $\dfrac{n \times u_n + 1}{2(n+1)}$
Affecter à n la valeur $n+1$.

2. Il faut rajouter avant le Fin Tant que : « Afficher la variable u ».

3. La suite (u_n) semble être décroissante vers 0.

Partie B - Étude mathématique

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = nu_{n+1} - 1 = (n+1) \times \dfrac{n \times u_n + 1}{2(n+1)} - 1 = \dfrac{n \times u_n + 1}{2} - \dfrac{2}{2} = \dfrac{n \times u_n - 1}{2} = \dfrac{1}{2} v_n$.

Cette relation montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme

$v_0 = 1 \times u_1 - 1 = \dfrac{1}{2}$.

2. On a donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 0,5 \times 0,5^{n-1} = 0,5^n$.

Or $v_n = nu_n - 1 \iff u_n = \dfrac{v_n + 1}{n} = \dfrac{1 + 0,5^n}{n}$.

3. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$, et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1 + (0,5)^{n+1}}{n+1} - \dfrac{1 + (0,5)^n}{n} = \dfrac{n + n \times 0,5^{n+1} - (n+1) - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \dfrac{-1 + 0,5n \times 0,5^n - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \dfrac{-1 + 0,5^n(0,5n - n - 1)}{n(n+1)} = \dfrac{-1 + 0,5^n(-0,5n - 1)}{n(n+1)} = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante (vers zéro).

Partie C - Retour à l'algorithmique

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u \geqslant 0,001$ Affecter à u la valeur $\dfrac{n \times u + 1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable n

EXERCICE 22 énoncé **Métropole septembre 2013**

1. (a) $u_1=\frac{4}{5}=0,8$; $u_2=\frac{14}{13}\simeq 1,08$; $u_3=\frac{40}{41}\simeq 0,98$; $u_4=\frac{122}{121}\simeq 1,01$.

(b) On voit bien que $u_0>1$; $u_1<1$; $u_2>1$; $u_3<1$; $u_4>1$ donc le signe des différences (u_n-1) change à chaque rang :

si n pair c'est $+$

si n impair c'est $-$, comme $(-1)^n$.

(c) $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n+2-(2u_n+1)}{2u_n+1}=\dfrac{1-u_n}{2u_n+1}=\dfrac{-u_n+1}{2u_n+1}$.

(d) On a admis au début de l'énoncé que tous les u_n sont strictement positifs (on pourrait le démontrer par récurrence) ; démontrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$: (u_n-1) a le même signe que $(-1)^n$:

L'initialisation est faite au b.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que (u_n-1) ait le signe de $(-1)^n$ alors $(1-u_n)$ a le signe opposé de (u_n-1) donc a le signe de $(-(-1)^n)$ donc de $(-1)^{n+1}$ et $(2u_n+1)>0$, vu que tous les u_n sont strictement positifs, donc la fraction $\dfrac{1-u_n}{2u_n+1}$ a le signe de $(-1)^{n+1}$ et comme elle est égale à $(u_{n+1}-1)$, on a prouvé que $(u_{n+1}-1)$ a le signe de $(-1)^{n+1}$, l'hérédité est prouvée.

CONCLUSION : pour tout n de $\mathbb{N}$, (u_n-1) a le même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$.

Vu que tous les u_n sont strictement positifs, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe.

(a) $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\dfrac{\frac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1}+1}=\dfrac{\frac{u_n+2-(2u_n+1)}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}}=\dfrac{u_n+2-(2u_n+1)}{u_n+2+2u_n+1}=\dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$.

(b) $v_{n+1}=\dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}=\dfrac{-1}{3}\dfrac{(u_n-1)}{u_n+1}=\dfrac{-1}{3}v_n$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{-1}{3}$.

$v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+1}=\dfrac{1}{3}$ donc $v_n=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

(c) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n=\dfrac{1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^n}$.

Comme la suite (v_n) est géométrique de raison $q=\frac{-1}{3}$, donc $-1<q<1$, (v_n) tend vers 0, donc (u_n) converge vers 1.

Exercice 23 énoncé Nouvelle Calédonie 2013

Commun à tous les candidats

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

PARTIE A

```
Variables : N est un entier
            U, V, W sont des réels
            K est un entier
Début :     Affecter 0 à K
            Affecter 2 à U
            Affecter 10 à V
            Saisir N
            Tant que K < N
                Affecter K + 1 à K
                Affecter U à W
                Affecter (2U + V)/3 à U
                Affecter (W + 3V)/4 à V
            Fin tant que
            Afficher U
            Afficher V
Fin
```

État des variables :

K	W	U	V
0	---	2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

PARTIE B

1. (a) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12}$$
$$= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

(b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

D'après le cours (forme explicite d'une suite géométrique) on peut dire que, pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. (a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{3u_n}{3} = \dfrac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \dfrac{v_n - u_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$

On a vu que, pour tout n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$; on peut en déduire que pour tout n, $w_n > 0$ et donc que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{4v_n}{4} = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4}$$

Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n.

Donc la suite (v_n) est décroissante.

(b) On a vu que, pour tout n, $w_n > 0$; donc, pour tout n, $v_n - u_n > 0$ c'est-à-dire $v_n > u_n$.

La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout n, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \leqslant 10$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ v_n \leqslant 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \leqslant 10$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout n, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ u_n \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n \geqslant 2$.

(c) La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ_u.

La suite (v_n) est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est convergente vers un réel ℓ_v.

3. La suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_v - \ell_u$.

Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$; donc on peut dire que la suite (w_n) est convergente vers 0.

La limite d'une suite est unique donc $\ell_v - \ell_u = 0$ et donc $\ell_v = \ell_u$; les suites (u_n) et (v_n) ont donc la même limite qu'on appelle ℓ.

4. $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \dfrac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$

$= 3u_n + 4v_n = t_n$ donc la suite (t_n) est constante.

$t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46$

Comme la suite (t_n) est constante, pour tout n, $t_n = t_0 = 46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.

Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers ℓ donc la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3\ell + 4\ell = 7\ell$.

La limite d'une suite est unique donc $7\ell = 46 \iff \ell = \dfrac{46}{7}$.

La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est donc $\dfrac{46}{7}$.

EXERCICE 24 énoncé **Polynésie 2013**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

1. (a) $u_1 = \dfrac{3\times u_0}{1+2u_0} = \dfrac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$

et $u_2 = \dfrac{3\times u_1}{1+2u_1} = \dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\frac{3}{4}} = \dfrac{9}{10}$.

(b) ◻ Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $0 < u_n$.

◻ Initialisation : Si $n = 0$
Alors $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

◻ Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie (c-à-d. $0 < u_k$). Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie aussi (c-à-d. $0 < u_{k+1}$).

Par hypothèse de récurrence $0 < u_k$ donc $0 < 3u_k$ et $0 < 1+2u_k$. ainsi, u_{k+1} est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $0 < u_{k+1}$ et $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

◻ $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, par récurrence on a bien pour tout entier naturel $n, 0 < u_n$.

2. (a) Comme pour tout entier naturel $n, 0 < u_n$, pour étudier les variations de la suite, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{u_n} = \frac{3}{1+2u_n}$$

Mais, $u_n < 1 \Leftrightarrow 2u_n < 2 \Leftrightarrow 1+2u_n < 3 \Leftrightarrow 1 < \dfrac{3}{1+2u_n}$ car $1+2u_n > 0$.

Finalement la suite (u_n) est croissante.

(b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 ; elle converge donc vers $\ell \leqslant 1$.

3. (a) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3.

(b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 q^n = 3^n$.

(c) Pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow (1-u_n)v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + u_n v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1+v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{3^n}{3^n+1}.$$

(d) Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. L'étude du quotient conduit donc à une forme indéterminée.

$$u_n = \frac{3^n}{3^n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$

Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$, enfin, par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

La suite (u_n) converge vers 1.

EXERCICE 25 énoncé Amerique du Sud 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. $u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}2^2 + 3 \times 2 - \frac{3}{2} = -2 + 6 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$u_3 = -\frac{1}{2}u_2^2 + 3u_2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{25}{8} + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{23}{8}$

2. En programmant à la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$, on obtient :

$u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{383}{128} \approx 2{,}99219$ et $u_4 = f(u_3) = f\left(\frac{383}{128}\right) \approx 2{,}99997$

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 3.

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3 = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2}$

$v_n^2 = (u_n - 3)^2 = u_n^2 - 6u_n + 9$ donc $-\frac{1}{2}v_n^2 = -\frac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} = v_{n+1}$

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.

2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

- $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$; la propriété est vraie au rang 0.
- Supposons la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $-1 \leqslant v_p \leqslant 0$.

  On sait que, pour tout p, $v_{p+1} = -\frac{1}{2}v_p^2$.

  $-1 \leqslant v_p \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant v_p^2 \leqslant 1 \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2}v_p^2 \leqslant 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$

  Donc $-1 \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$

3. (a) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$

(b) Pour tout n, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.

Pour tout n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $-\frac{1}{2} eq \frac{1}{2} v_n eq 0$ et donc $\frac{1}{2} eq \frac{1}{2} v_n + 1 eq 1$; donc $\frac{1}{2}v_n + 1 > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

Pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est croissante.

4. La suite (v_n) est croissante et majorée par 0 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (v_n) est convergente.

5. On note ℓ limite de la suite (v_n). On admet que $\ell \in [-1 ; 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

On résout l'équation $x = -\frac{1}{2}x^2$ dont ℓ est solution :

$x = -\frac{1}{2}x^2 \iff 2x + x^2 = 0 \iff x(2 + x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -2$

Mais on sait que $\ell \in [-1 ; 0]$ donc ne peut pas correspondre à $x = -2$.

Donc $\ell = 0$ et la limite de la suite (v_n) est 0.

6. La suite (v_n) est croissante et, pour tout n, $u_n = v_n + 3$; donc on peut dire que la suite (u_n) est croissante.

La suite (v_n) est convergente vers 0 donc, d'après les théorèmes sur les limites, on peut dire que la suite (u_n) est convergente vers 3.

Les conjectures faites dans la **partie A** sont donc validées.

Exercice 26 énoncé Amerique du Nord 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

1. « Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. » donc

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ a_n + b_n = 2200.$$

2. Au début du $n+1$-ième jour, la bassin A contient a_n, on ajoute 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0,15b_n$ et on enlève 10 % du volume présent dans A au début de la journée :

$$a_{n+1} = a_n + 0,15b_n - 0,1a_n = a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n = 0,75a_n + 330 = \frac{3}{4}a_n + 330$$

On a bien, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.

3.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1100$, faire :
		Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$
		Affecter à n la valeur $n+1$
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. (a) Remarque : on peut calculer les premiers termes pour avoir la raison.

Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= a_{n+1} - 1320 && \text{définition de } u_n\\
&= \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320 && \text{question 2.}\\
&= \frac{3}{4}a_n - 990\\
&= \frac{3}{4}(a_n - 1320)\\
&= \frac{3}{4}u_n && \text{définition de } u_n
\end{aligned}$$

On reconnait la définition d'une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

Son premier terme est $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$

(b) On a donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n = -520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Mais, par définition de u_n, on a

$u_n = a_n - 1320 \Leftrightarrow a_n = u_n + 1320$ donc $a_n = 1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Si ce jour arrive, on aura $a_n = b_n = \dfrac{2200}{2} = 1100$.

Il faut donc résoudre l'équation $1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 1100$ d'inconnue n.

$$1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100 \Leftrightarrow 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 220 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{11}{26} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right)$$

Finalement $n = \dfrac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 2,99$

On vérifie : $a_3 = 1100,625$ et $b_3 = 1099,375$ donc $a_3 - b_3 = 1,25 > 1$.

Les deux bassins n'auront donc jamais le même volume d'eau, à un mètre cube près.

Exercice 27 énoncé Antilles 2014

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

(b) Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2. (a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- **Initialisation.** On a $u_1 = 3{,}4$ et $\frac{15}{4} \times 0{,}5 = 1{,}875$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul, la propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$u_k \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^k \qquad \text{(HR)}$$

on doit alors démontrer que la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{k+1}$.
D'après (HR) :

$$\begin{aligned} u_k &\geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^k && \text{donc, en multipliant par } \frac{1}{5} : \\ \frac{1}{5}u_k &\geqslant \frac{3}{4} \times 0{,}5^k && \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0{,}5^k : \\ \frac{1}{5}u_k + 3 \times 0{,}5^k &\geqslant \frac{3}{4} \times 0{,}5^k + 3 \times 0{,}5^k && \text{c'est-à-dire :} \\ u_{k+1} &\geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^k \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel k, $0{,}5^k \geqslant 0{,}5^{k+1}$, on en déduit donc que :

$$u_{k+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{k+1}$$

et la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc héréditaire.

- **Conclusion.** La propriété $\mathcal{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

(b) Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n \\ &= 3 \times 0{,}5^n - \frac{4}{5}u_n \\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{15}{4} \times 0{,}5^n - u_n\right) \end{aligned}$$

D'après la question 1a, cela entraîne que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

(c) D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. D'après 2a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n > 0$, la suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1} \\ &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n \\ &= \frac{1}{5}u_n - 2 \times 0{,}5^n \\ &= \frac{1}{5}\left(u_n - 10 \times 0{,}5^n\right) \\ &= \frac{1}{5}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = 2 - 10 = -8$.

(b) La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
On en déduit que $-8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ et donc que : $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

(c) $-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim n{+}\infty \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, de même : $-1 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim n{+}\infty 0{,}5^n = 0$.

On en déduit par opérations sur les limites que $\lim n{+}\infty u_n = 0$.

4. L'algorithme complet est :

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que u>0,01	(1)
	n prend la valeur $n+1$	(2)
	u prend la valeur $\frac{1}{5}u+3\times 0{,}5^{n-1}$	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

EXERCICE 28 énoncé Antilles septembre 2014

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty]$ par $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$.

1. D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ ce qui équivaut à $\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x}=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$ et :

$f'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}+x\left(-1\times\mathrm{e}^{-x}\right)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$; $f(0)=0$ et $f(1)=\mathrm{e}^{-1}\approx 0{,}37$

D'où le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

On donne la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan ainsi que la droite Δ d'équation $y=x$.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$.

1. On place sur le graphique, en utilisant la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n>0$.

- $u_0=1>0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang $p\geqslant 0$, c'est-à-dire $u_p>0$.

  Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$ donc pour tout réel $x>0$, $x\mathrm{e}^{-x}>0$ donc $f(x)>0$.

  Or $u_{p+1}=f\left(u_p\right)$ et $u_p>0$ (hypothèse de récurrence) ; donc $f\left(u_p\right)>0$ et donc $u_{p+1}>0$.

  La propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vérifiée au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $p\geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout $n\geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n>0$.

3. Pour tout réel $x>0$:

$$\begin{aligned}
-x<0 &\iff \mathrm{e}^{-x}<\mathrm{e}^{0} && \text{croissance de la fonction exponentielle}\\
&\iff \mathrm{e}^{-x}<1\\
&\iff x\mathrm{e}^{-x}<x && \text{car } x>0\\
&\iff f(x)<x
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x>0$, $f(x)<x$; or, pour tout n, $u_n>0$ donc $f\left(u_n\right)<u_n$ ce qui veut dire que $u_{n+1}<u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

4. (a) La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

(b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\mathrm{e}^{-x}=x$.

On résout l'équation $x\mathrm{e}^{-x}=x$:

$$\begin{aligned}
x\mathrm{e}^{-x}=x &\iff x\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)=0 &&\iff x=0 \text{ ou } \mathrm{e}^{-x}-1=0\\
&\iff x=0 \text{ ou } \mathrm{e}^{-x}=1 &&\iff x=0 \text{ ou } -x=0
\end{aligned}$$

Donc la limite de la suite (u_n) est égale à 0.

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n$

L'algorithme suivant donne S_{100} :

```
Déclaration des variables :   S et u sont des nombres réels
                              k est un nombre entier
Initialisation :              u prend la valeur 1
                              S prend la valeur u
Traitement :                  Pour k variant de 1 à 100
                                    u prend la valeur u × e^(−u)
                                    S prend la valeur S + u
                              Fin Pour
                              Afficher S
```

Exercice 29 énoncé Asie 2014

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Pour n de $\mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit le nombre I_n par $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0;1]$, $1+x^n > 0$ donc $f_n(x) > 0$.

Donc $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe représentant la fonction f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

D'après le graphique, cette aire tend à se rapprocher de 1 quand n tend vers $+\infty$.

2. $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(1+x)\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0;1]$:

$0 \leqslant x^n \leqslant 1 \iff 1 \leqslant 1+x^n \leqslant 2 \iff \dfrac{1}{1} \geqslant \dfrac{1}{1+x^n} \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

(b) Pour tout x de $[0;1]$, $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \iff \mathrm{I}_n \leqslant [x]_0^1 \iff \mathrm{I}_n \leqslant 1$$

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout x, $(x^n)^2 \geqslant 0$ donc $1-(x^n)^2 \leqslant 1$ ce qui équivaut à $(1-x^n)(1+x^n) \leqslant 1$ et comme $1+x^n > 0$ pour $x \in [0;1]$: $1-x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$.

5. $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] - 0 = \frac{n}{n+1}$

6. On a vu que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout réel x de $[0;1]$, $1-x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$. D'après la positivité de l'intégration, on peut en déduire que $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ c'est-à-dire $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$.

On a vu aussi que pour tout n, $\mathrm{I}_n \leqslant 1$.

Donc, pour tout n, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant 1$.

On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ ce qui équivaut à $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

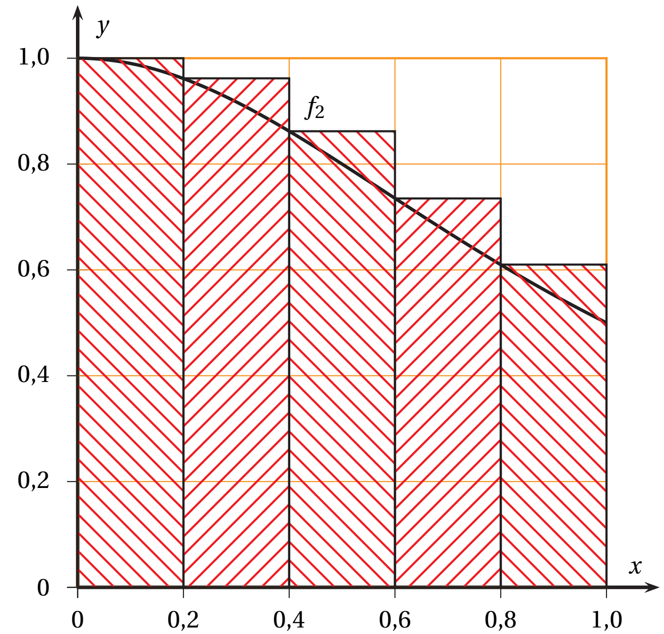
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant 1$; donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et a pour limite 1.

7. (a) On fait tourner l'algorithme proposé avec $n=2$ et $p=5$:

k	x	I
0	0	0,2
1	0,2	0,392
2	0,4	0,565
3	0,6	0,712
4	0,8	0,834

La valeur de I arrondie au centième qui sera affichée est 0,83.

(b) Il faut reconnaitre dans l'algorithme proposé la méthode des rectangles permettant de calculer des valeurs approchées d'aire sous une courbe ; plus précisément, comme la fonction f_n est décroissante sur $[0;1]$, on obtient la somme de rectangles majorant l'intégrale I_n cherchée.



EXERCICE 30 énoncé **Métropole 2014**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. L'image de 0 par la fonction f_1 est : $f_1(0) = 0 + \mathrm{e}^{-0} = 1$.
Le point d'abscisse 0 sur la courbe $\mathcal{C}_1$, représentative de la fonction f_1, est le point de coordonnées $\left(0\ ;\ f_1(0)\right)$, c'est à dire ici $(0\ ;\ 1)$. Le point A, de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ est donc bien un point de la courbe $\mathcal{C}_1$.

2. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbf{R}$, en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.
Sa dérivée est définie sur $\mathbf{R}$ par :
$f_1'(x) = 1 + (-1)\mathrm{e}^{-x} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
On a : $f_1'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x}$
$\iff 1 \geqslant \mathrm{e}^{-x}$
$\iff 0 \geqslant -x$, car ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$
$\iff x \geqslant 0$.
On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Justifions maintenant les deux limites :
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$, et donc par somme :
$\displaystyle\lim_{+\infty} f_1 = +\infty$.
Pour tout x on a : $f_1(x) = \mathrm{e}^{-x} \times \left(x\mathrm{e}^{x} + 1\right)$. Et on a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées. On en déduit, par somme : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} + 1 = 1$.
Comme par ailleurs on a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{y} = +\infty$, on en déduit, par produit : $\displaystyle\lim_{-\infty} f_1 = +\infty$.

Partie B

1. (a) Soit un entier naturel n non nul, et un réel x, choisi dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
x étant dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, x est positif. La fonction exponentielle étant à valeurs strictement positives, on en déduit que e^{-nx} est également un nombre positif. La somme de deux nombres positifs étant elle-même positive, on en déduit que $f_n(x)$ est positif.
On a donc prouvé que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
I_n est donc l'intégrale sur un intervalle d'une fonction positive sur cet intervalle, c'est donc l'aire (exprimée en unité d'aire) de la portion de plan délimitée par : l'axe des abscisses ; la courbe $\mathcal{C}_n$, représentative de f_n, et les droites verticales d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) et $x = 1$.

(b) Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, il semble que, plus n augmente, plus les courbes $\mathcal{C}_n$ semblent se rapprocher du segment d'équation $y = x$, chaque courbe semblant être en dessous de la courbe d'indice précédent.
On en déduit que les aires successives sous ces courbes doivent être de plus en plus petites, et donc que la suite (I_n) doit être décroissante.
Comme de plus il semble que les courbes "s'écrasent" sur le segment d'équation $y = x$, à la limite, l'aire sous la courbe devrait tendre vers l'aire sous le segment, c'est à dire $\dfrac{1}{2}$.
On peut donc émettre la conjecture que la suite converge vers $\dfrac{1}{2}$ en décroissant.

2. On a :
$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n &= \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x, \text{ par linéarité de l'intégrale.} \\
&= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-(n+1)x} - x - \mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^{x}\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$
Ce qui est ce que l'on souhaitait démontrer.
On va maintenant en déduire le signe de cette différence. Pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}$ est strictement positif, car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, quant au nombre $1 - \mathrm{e}^{x}$, il est négatif, car x étant dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on a $x \geqslant 0$, et comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, donc on en déduit que $\mathrm{e}^{x} \geqslant \mathrm{e}^{0}$, soit $\mathrm{e}^{x} \geqslant 1$, donc il suit que $1 - \mathrm{e}^{x} \leqslant 0$.
Le produit de deux nombres de signes contraires étant négatif, on vient de prouver que, pour tout entier n naturel non nul et pour tout x dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, le nombre $\mathrm{e}^{-(n+1)x}(1 - \mathrm{e}^{x})$ est négatif. L'intégrale entre deux bornes bien rangées d'une fonction négative étant négative, on en

déduit que, pour tout entier n non nul, la différence $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n$ est négative. On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.
Comme par ailleurs, on a déjà prouvé que, pour tout n naturel non nul, la fonction f_n est à valeurs positives sur l'intervalle d'intégration $[0\,;\,1]$, on en déduit que l'intégrale de cette fonction positive entre des bornes (0 et 1) bien rangées est positive, donc cela signifie que pour tout n naturel non nul, I_n est positif. On a donc prouvé que la suite est minorée par 0.
(I_n) étant une suite minorée et décroissante, on peut en conclure qu'elle est convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$, car la suite est minorée par 0.

3. Nous allons maintenant déterminer cette limite ℓ. Pour tout entier n naturel non nul, une primitive de f_n sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est définie par :
$\mathrm{F}_n(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{-1}{n}\mathrm{e}^{-nx}=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}$. On a donc :
$$\mathrm{I}_n=\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1=\mathrm{F}_n(1)-\mathrm{F}_n(0)$$
$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{2}\times 1^2-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n}-\left(\frac{1}{2}\times 0^2-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\times\left(1-\mathrm{e}^{-n}\right).$$
Comme on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\mathrm{e}^{-n}=1$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, par produit, puis par somme de limites, on en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=\frac{1}{2}.$$
Finalement, nos deux conjectures sont bien vérifiées : la suite est bien décroissante, et converge vers une limite qui est bien $\dfrac{1}{2}$, l'aire sous la droite d'équation $y=x$ entre les abscisses 0 et 1.

Exercice 31 énoncé **Métropole septembre 2014**

Commun à tous les candidats

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

(a) Comme 20 % du médicament est éliminé par minute, il en reste 80 % ; prendre 80 % d'un nombre c'est multiplier par $0,8$ donc $u_{n+1} = 0,8\,u_n$.

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $0,8$ et de premier terme $u_0 = 10$.

(b) La suite (u_n) es géométrique, donc pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 10 \times 0,8^n$.

(c) La quantité de médicament est inférieure à 1 % de la quantité initiale quand $u_n < \dfrac{1}{100} \times u_0$ c'est-à-dire $u_n < 0,1$.

On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}
u_n < 0,1 &\iff 10 \times 0,8^n < 0,1 \\
&\iff 0,8^n < 0,01 \\
&\iff \ln\left(0,8^n\right) < \ln 0,01 && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;+\infty[\\
&\iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} && \text{car } \ln 0,8 < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$ donc c'est au bout de 21 minutes que la quantité de médicament dans le sang devient inférieure à 1 % de la quantité initiale.

On trouve à la calculatrice que $u_{20} \approx 0,115 > 0,1$ *et* $u_{21} \approx 0,092 < 0,1$.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit. Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n. L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute :

Variables :	n est un entier naturel.
	v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15
	Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
	Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$
	Afficher v.
	Fin de boucle.

(a) Le tableau ci-dessous donne la quantité restante de médicament minute par minute :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4	5,12	8,10	6,48	5,18	8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

(b) Les 15 premières minutes, le patient a absorbé 10 mL au début, puis 4 mL les minutes 4, 7, 10 et 13 soit 16 mL ; ce qui fait un total de 26 mL.

(c) On programme la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

L'algorithme suivant affiche la quantité de médicament restant dans le sang minute par minute :

Variables :	n est un entier naturel.
	v est un nombre réel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à 30
	Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
	Si $v \leqslant 6$ alors affecter à v la valeur $v + 2$
	Afficher v.
	Fin de boucle.

3. On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

(a) Comme 20 % du médicament est éliminé chaque minute, il en reste 80 % donc on multiplie par 0,8. De plus, toutes les minutes, on rajoute 1 mL.

On peut donc dire que, pour tout n, $w_{n+1} = 0,8 w_n + 1$.

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$, donc $w_n = z_n + 5$.

$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0,8 w_n + 1 - 5 = 0,8 (z_n + 5) - 4 = 0,8 z_n + 4 - 4 = 0,8 z_n$

$z_0 = w_0 - 5$; or à l'instant 0, on injecte 10 mL donc $w_0 = 10$. On a donc $z_0 = 5$.

La suite (z_n) est donc géométrique de premier terme $z_0 = 5$ et de raison $q = 0,8$.

(c) D'après les propriétés des suites géométriques, on peut dire que, pour tout n : $z_n = z_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n$.

Or $w_n = z_n + 5$ donc, pour tout n, $w_n = 5 \times 0,8^n + 5$.

(d) La suite (z_n) est géométrique de raison 0,8 ; or $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite (w_n) est convergente vers 0. D'après les théorèmes sur les limites de suite, on peut en déduire que la suite (w_n) est convergente et a pour limite 5.

Cela veut dire que, si on poursuit ce traitement, la quantité de médicament présente dans le sang du patient va se rapprocher de 5 mL.

EXERCICE 32 énoncé Nouvelle Calédonie 2014

Candidats n'ayant pas suivi renseignement de spécialité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x+2}$.

1. $f'(x) = 0 - \dfrac{0(x+2) - 4\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0$ sur $[0;+\infty[$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. On résout dans $[0;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$:

$$f(x) = x \iff 5 - \frac{4}{x+2} = x \iff \frac{5(x+2)-4-x(x+2)}{x+2} = 0 \iff \frac{5x+10-4-x^2-2x}{x+2} = 0$$

$$\iff \frac{-x^2+3x+6}{x+2} = 0 \iff -x^2+3x+6 = 0 \text{ et } x+2 \neq 0$$

On résout $-x^2+3x+6 = 0$; $\Delta = 9 - 4\times 6\times(-1) = 33 > 0$.

Les solutions sont donc $\dfrac{-3-\sqrt{33}}{-2} = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$.

Cette deuxième solution est négative donc l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$ est $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4{,}37$.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur la figure de **annexe 1**, on place les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 ; voir page **??**.

On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers α.

4. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

- Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_1 = f(u_0) = 5 - \dfrac{4}{1+2} = \dfrac{11}{3}$; de plus $\alpha \approx 4{,}37$.

  On a $0 \leqslant 1 \leqslant \dfrac{11}{3} \leqslant \alpha$ ce qui veut dire que la propriété est vraie au rang 0.

- On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, autrement dit : $0 \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant \alpha$.

  On sait d'après la question **1.** que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$; donc : $0 \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant \alpha \Longrightarrow f(0) \leqslant f(u_p) \leqslant f(u_{p+1}) \leqslant f(\alpha)$

  $f(0) = 3 \geqslant 0$, $f(u_p) = u_{p+1}$ et $f(u_{p+1}) = u_{p+2}$.

  De plus, α est solution de l'équation $f(x) = x$ donc $f(\alpha) = \alpha$.

  On a donc $0 \leqslant u_{p+1} \leqslant u_{p+2} \leqslant \alpha$; on peut dire que la propriété est vraie au rang $p+1$.

- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

(b) Pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout n, $u_n \leqslant \alpha$ donc la suite (u_n) est majorée par α.

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

(a) $S_0 = u_0 = 1$; $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \dfrac{11}{3} = \dfrac{14}{3} \approx 3{,}7$

$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = S_1 + u_2$; $u_2 = f(u_1) = f\left(\dfrac{11}{3}\right) = \dfrac{73}{17}$ donc $S_2 = \dfrac{14}{3} + \dfrac{73}{17} = \dfrac{457}{51} \approx 9{,}0$

(b) On complète l'algorithme donné en annexe 2 pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur ; voir page **??**.

(c) On sait que la suite (u_n) est croissante donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$.

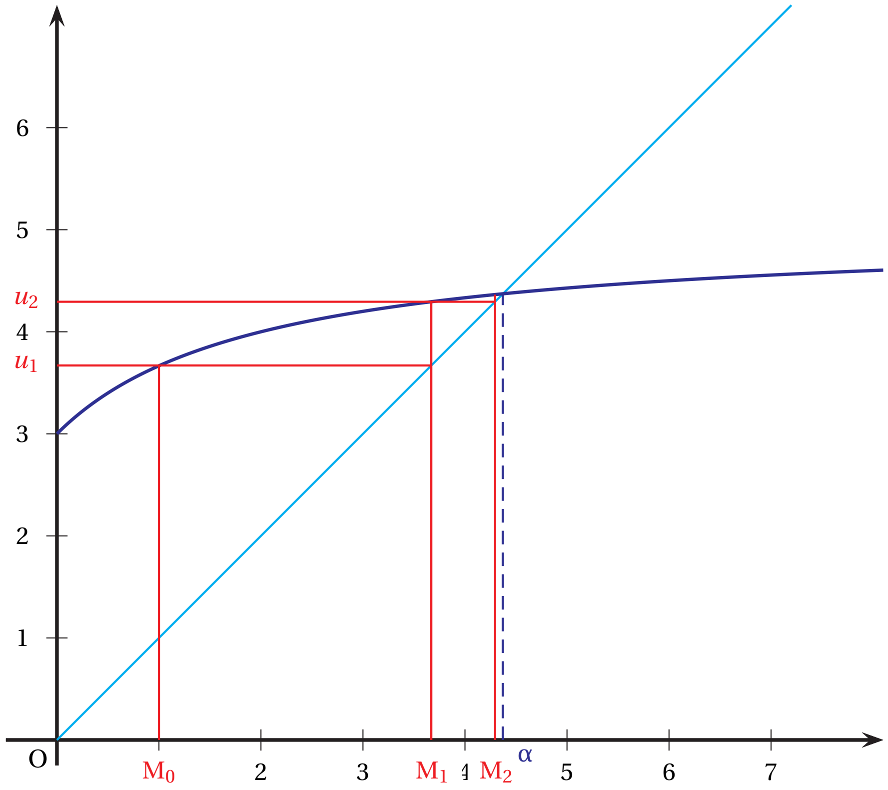
Or $u_0 = 1$, donc, pour tout n, $u_n \geqslant 1$ et donc $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \geqslant n+1$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ donc, d'après les théorèmes de comparaison sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

Annexe 2

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que $i < n$
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur $5 - \dfrac{4}{u+2}$
	Affecter à s la valeur $s+u$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s



Annexe 1

Exercice 33 énoncé **Nouvelle Calédonie mars 2014**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

1. D'après le cours, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\end{array}\right\}\ \lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty \text{ (par produit) donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables :

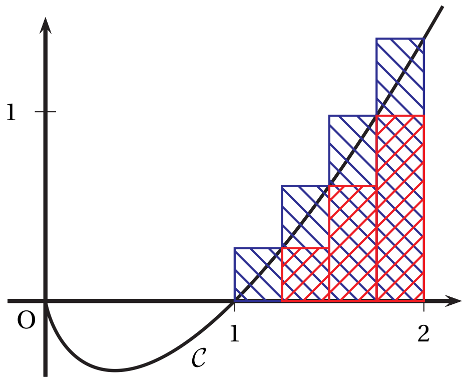
$f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x} = \ln(x)+1$.

3. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$: $\ln(x)+1>0 \iff \ln(x)>-1 \iff x>\mathrm{e}^{-1}$

Donc :

- La fonction f est strictement décroissante sur $]0;\mathrm{e}^{-1}]$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1};+\infty[$.

Figure



Algorithme

Variables
k et n sont des entiers naturels
U, V sont des nombres réels
Initialisation
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
Affecter à U la valeur $\mathrm{U}+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $\mathrm{V}+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
Afficher U
Afficher V

1. (a) Sur la figure ci-dessus, le nombre U représente la somme des aires des rectangles inférieurs (en rouge) ; cette somme minore l'aire sous la courbe. Le nombre V représente la somme des aires des rectangles supérieurs (en bleu) ; cette somme majore l'aire sous la courbe.

(b) On fait tourner l'algorithme ci-dessus :

Variables	k	U	V	n
Initialisation		0	0	4
Traitement	0	0	0,069 8	4
	1	0,069 7	0,221 8	4
	2	0,221 7	0,466 7	4
	3	0,466 6	0,813 2	4
Affichage	On affiche la valeur de U : 0,466 6			
	On affiche la valeur de V : 0,813 2			

(c) On peut donc en déduire que $0{,}4666 < \mathcal{A} < 0{,}8132$.

2. On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $\mathrm{U}_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant \mathrm{V}_n$.

(a) Sachant que $\mathrm{U}_n = \dfrac{1}{n}\left[f(1)+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$ et que

$\mathrm{V}_n = \dfrac{1}{n}\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)+f(2)\right]$,

on peut dire que $\mathrm{V}_n - \mathrm{U}_n = \dfrac{1}{n}\left(f(2)-f(1)\right) = \dfrac{2\ln(2)-0}{n} = \dfrac{2\ln(2)}{n}$.

$\mathrm{V}_n - \mathrm{U}_n < 0,1 \iff \dfrac{2\ln(2)}{n} < 0,1 \iff 2\ln(2) < 0,1\,n \iff \dfrac{2\ln(2)}{0,1} < n$

Or $\dfrac{2\ln(2)}{0,1} \approx 13,86$ donc le plus petit entier n tel que $\mathrm{V}_n - \mathrm{U}_n$ soit inférieur à 0,1 est 14.

Vérification : $\mathrm{V}_{13}-\mathrm{U}_{13} \approx 0,107 > 0,1$ et $\mathrm{V}_{14}-\mathrm{U}_{14} \approx 0,099 < 0,1$.

(b) Pour obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$ dans l'algorithme, il suffit d'entrer 14 comme valeur de n ; autrement dit, au lieu de « n prend la valeur 4 », on entrera « n prend la valeur 14 ».

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

1. $\mathrm{F}'(x)=\dfrac{2x}{2}\times\ln(x)+\dfrac{x^2}{2}\times\dfrac{1}{x}-\dfrac{2x}{4}=x\ln(x)+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{2}=x\ln(x)=f(x)$

Donc F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. La fonction f est croissante sur $[1\,;2]$ et $f(1)=0$ donc la fonction f est positive sur $[1\,;2]$; on peut donc dire que $\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(2)-\mathrm{F}(1)=(2\ln(2)-1)-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=2\ln(2)-\dfrac{3}{4}$

EXERCICE 34 énoncé **Polynésie 2014**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. $u_1 = u_0 = 2 \times 0 + 2 = 2$ et $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2 = 6$.

2. Le second affiche en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur.

3. Étude de la suite (u_n) :

(a) La suite (u_n) semble être croissante.

Démonstration :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n + 2 > 0 \text{ pour tout } n \text{ naturel}$$

(b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.

$$\begin{cases} u_0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \\ u_1 = a \times 1^2 + b \times 1 + c = 2 \\ u_2 = a \times 2^2 + b \times 2 + c = 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + 2b = 6 \\ c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \\ c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n + 2$.

(a) C'est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$.

(b) On définit, pour tout entier naturel $n, \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = (n+1)v_0 + \frac{n(n+1)}{2} \times r = 2(n+1) + n(n+1) = (n+1)(n+2)$$

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel $n, \mathrm{S}_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

$$\mathrm{S}_n = (\cancel{u_1} - u_0) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_1}) + \cdots + (\cancel{u_n} - \cancel{u_{n-1}}) + (u_{n+1} - \cancel{u_n}) = u_{n+1} - u_0$$

$$\mathrm{S}_{n-1} = u_n - u_0 \Longleftrightarrow u_n = \mathrm{S}_{n-1} + u_0 = n(n+1) + 0 = n(n+1)$$

EXERCICE 35 énoncé Antilles 2015

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u+0,5(k-1)-1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

valeur de k	1	2	
valeur de u	5	1	$-0,5$

On obtient en sortie : $-0,5$.

Partie B

$$u_{n+1}=0,5u_n+0,5n-1,5.$$

1.

Algorithme modifié :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u+0,5(k-1)-1,5$ Afficher u
Sortie :	Fin de pour

2. Puisque $u_4>u_3$ la suite (u_n) n'est pas décroissante, du moins pas avant le rang 4.

3. *Initialisation* On vient de voir que $u_4>u_3$: la relation est vraie pour $n=3$.

Hérédité On suppose qu'il existe un naturel p tel que $u_{p+1}>u_p$.

D'où $0,5u_{p+1}>0,5u_p$; D'autre part : $p+1>p\Rightarrow 0,5(p+1)>0,5p$ d'où par somme des ces deux dernières inégalités :

$0,5u_{p+1}+0,5(p+1)>0,5u_p+0,5p$ et en ajoutant $-1,5$ à chaque membre :

$0,5u_{p+1}+0,5(p+1)-1,5>0,5u_p+0,5p-1,5$ soit $u_{p+2}>u_{p+1}$: la relation est vraie au rang $p+1$.

On a donc démontré que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1}>u_n$ ce qui montre que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

4. Pour tout naturel n, on a :

$v_{n+1}=0,1u_{n+1}-0,1(n+1)+0,5=0,1u_{n+1}-0,1n+0,4=0,1(0,5u_n+0,5n-1,5)-0,1n+0,4=0,05u_n+0,05n-0,15-0,1n+0,4=0,05u_n-0,05n+0,25=0,5(0,1u_n-0,1n+0,5)=0,5v_n$: la suite (v_n) rdy donc géométrique de raison 0,5.

Le premier terme est :

$v_0=0,1\times5-0,1\times0+0,5=1$.

On a donc pour tout naturel n, $v_n=1\times0,5^n=0,5^n=\dfrac{1}{2^n}$.

5. On a $v_n=0,1u_n-0,1n+0,5 \iff 0,5^n=0,1u_n-0,1n+0,5 \iff 10\times0,5^n=u_n-n+5 \iff u_n=10\times0,5^n+n-5$.

6. Comme $-1<0,5<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}0,5^n=0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$. La suite (u_n) ne converge pas.

Exercice 36 énoncé **Asie 2015**

Commun à tous les candidats

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on définit la fonction f_n pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}$.

1. On sait que, pour tout X, $\mathrm{e}^{X} > 0$ donc $\mathrm{e}^{n(x-1)} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Sur $[0; 1]$, $x \geqslant 0$, donc $x + \mathrm{e}^{n(x-1)} > 0 \iff f_n(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = 1 + n\mathrm{e}^{n(x-1)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $n\mathrm{e}^{n(x-1)} > 0$ donc $f_n'(x) > 0$ donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

2. $f_n(1) = 1 + \mathrm{e}^0 = 2$ donc toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point A de coordonnées $(1; 2)$.

3. À l'aide des représentations graphiques, on peut conjecturer que le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_n$ est égal à $f_n'(x_{\mathrm{A}}) = f_n'(2) = 1 + n\mathrm{e}^n$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n'(2) = +\infty$$

Soit x un réel fixé de l'intervalle $[0 ; 1]$. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = f_n(x)$.

1. Dans cette question, on suppose que $x = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = 2$ donc la suite (u_n) est constante et chacun de ses termes est égal à 2 ; la suite (u_n) admet donc le nombre 2 comme limite.

2. Dans cette question, on suppose que $0 \leqslant x < 1$.

$x \in [0 ; 1] \Longrightarrow x - 1 < 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n(x-1) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n(x-1)} = 0$ (limite de fonctions composées)

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(x + \mathrm{e}^{n(x-1)}\right) = x$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
À partir des représentations graphiques et particulièrement en regardant l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_{100}$, on peut conjecturer que la limite de la suite A_n est $\dfrac{1}{2}$.

Pour démontrer cette conjecture, on cherche une primitive de la fonction f_n : pour $n > 0$, la fonction F_n définie par $\mathrm{F}_n(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{n(x-1)}}{n}$ est une primitive de f_n sur $[0; 1]$.

La fonction f_n est positive sur $[0; 1]$ donc l'aire A_n est donnée par $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour $n > 0$, $\mathrm{A}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}_n(1) - \mathrm{F}_n(0) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] - \left[0 + \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right) = \frac{1}{2} \text{ ; donc } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \frac{1}{2}$$

Exercice 37 énoncé Centres Étrangers 2015

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}(\mathrm{e}^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - x$

(a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 1$.

Or $(\mathrm{e}^x - 1)(2\mathrm{e}^x + 1) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 1 = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 1$

Donc $g'(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(2\mathrm{e}^x + 1)$.

(b) Les variations de la fonction g dépendent du signe de g' sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $2\mathrm{e}^x + 1 > 0$; donc $g'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 1$:

$\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$

$g(0) = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0 - 0 = 0$

La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$, strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et admet un minimum égal à 0 pour $x = 0$.

(c) $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n} - u_n = g(u_n)$.

Or la fonction g a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$ donc $g(u_n) \geqslant 0$ pour tout n et donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n. La suite (u_n) est donc croissante.

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

(a) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \leqslant 0$.

- $u_0 = a$; or $a \leqslant 0$ donc $u_0 \leqslant 0$. La propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang p (où $p \geqslant 0$), c'est-à-dire $u_p \leqslant 0$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  On sait que $u_{p+1} = \mathrm{e}^{u_p}(\mathrm{e}^{u_p} - 1)$

  D'après l'hypothèse de récurrence, $u_p \leqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{u_p} \leqslant 1$ donc $\mathrm{e}^{u_p} - 1 \leqslant 0$.

  Comme $\mathrm{e}^{u_p} > 0$ on déduit que $u_{p+1} \leqslant 0$ et la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété $u_n \leqslant 0$ est vraie en 0 ; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.

(b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

(c) La suite est croissante donc, pour tout n, $u_n \geqslant u_0$.

Si $a = 0$, $u_0 = 0$; comme, pour tout n, $u_n \geqslant u_0$ donc $u_n \geqslant 0$.

Or on a vu que, pour tout n, $u_n \leqslant 0$.

Donc pour tout n, $u_n = 0$.

On peut déduire que la suite (u_n) est constante et égale à 0 donc sa limite est 0.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout n, $u_n \geqslant a$; comme $a > 0$, on peut en déduire que, pour tout n, $u_n > 0$.

(a) On a vu que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

Or $0 < a \leqslant u_n$ pour tout n ; on sait que la fonction g est strictement croissante sur $[0; +\infty]$ donc $g(0) < g(a) \leqslant g(u_n)$ et donc $g(u_n) \geqslant g(a)$ pour tout n.

On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

(b) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

- Pour $n = 0$, $u_0 = a$ et $a + n \times g(a) = a + 0 = a$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang p (où $p \geqslant 0$), c'est-à-dire $u_p \geqslant a + p \times g(a)$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  On sait que $u_{p+1} - u_p \geqslant g(a)$; or $u_p \geqslant a + p \times g(a)$ (HR). Donc $u_{p+1} \geqslant a = p \times g(a) + g(a)$ ce qui équivaut à $u_{p+1} \geqslant a + (p+1) \times g(a)$.

  La propriété est donc vraie au rang $p+1$.
- La propriété $u_n \geqslant a + n \times g(a)$ est vraie en 0 ; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.

(c) $a > 0$ donc $g(a) > 0$ car 0 est le minimum de la fonction g, atteint en 0.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n \times g(a)) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$

Comme $u_n \geqslant a + n \times g(a)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$, on peut déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > \mathrm{M}$, où M désigne un réel positif.

(a) On complète l'algorithme :

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que $u \leqslant \mathrm{M}$ u prend la valeur $\mathrm{e}^{2u} - \mathrm{e}^{u}$ n prend la valeur $n+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

(b) On suppose $\mathrm{M} = 60$. On trouve à la calculatrice $u_{35} \approx 2,13$ et $u_{36} \approx 62,35$; donc la valeur affichée par l'algorithme pour $\mathrm{M} = 60$ est 36.

Exercice 38 énoncé **Liban 2015**

1. Sur $[0 ; 1]$, $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$, donc une primitive sur cet intervalle de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est $x \longmapsto \ln(1+x)$. D'où :

$u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

2. (a) Par linéarité de l'intégrale :

$u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

(b) La relation précédente donne pour $n = 0$,

$u_1 + u_0 = 1 \iff u_1 = 1 - u_0 = 1 - \ln 2$.

3. (a) • Il faut initialiser la suite à $u_0 = \ln 2$.

• La relation $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$ s'écrit au rang précédent, soit pour $n \geqslant 1$, $u_n + u_{n-1} = \dfrac{1}{n}$, soit $u_n = -u_{n-1} + \dfrac{1}{n}$.

Pour passer d'un terme à l'autre il faut donc prendre l'opposé du terme précédent et ajouter $\frac{1}{n}$. D'où l'algorithme :

Variables :	i et n sont des entiers naturels ($n \geqslant 1$)
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur $\ln 2$
Traitement :	Pour i variant de 1 à n
	| Affecter à u la valeur $-u + \frac{1}{i}$
	FindePour
Sortie :	Afficher u

(b) Conjecture : il semble que la suite (u_n) soit décroissante vers zéro.

4. (a) Pour tout naturel n, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Or on a vu que sur $[0 ; 1]$, $1+x > 0$, $x^n \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x-1 \leqslant 0$, donc finalement $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$.

Conclusion : l'intégrale de cette fonction négative sur $[0 ; 1]$ est négative.

Or $u_{n+1} - u_n < 0$ quel que soit n montre que la suite (u_n) est décroissante.

(b) u_n intégrale d'une fonction positive sur $[0 ; 1]$ est quel que soit le naturel n, un nombre positif ou nul.

La suite (u_n) décroissante et étant minorée par zéro converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 0$.

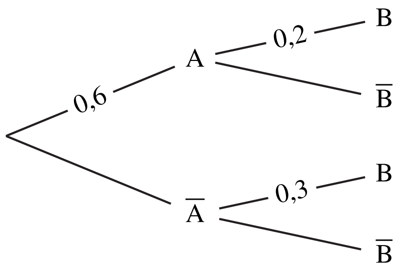
5. Pour tout naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puisque $u_{n+1} \geqslant 0$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Conclusion $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = 0$.

Exercice 39 énoncé **Métropole septembre 2015**

On considère l'arbre de probabilités ci-contre :



Quelle est la probabilité de l'évènement B ?

a. 0,12 **b.** 0,2 $\boxed{\textbf{c. } 0{,}24}$ **d.** 0,5

$P(B) = 0,6 \times 0,2 + (1-0,6) \times 0,3 = 0,24$

Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T, en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

a. 0,125 $\boxed{\textbf{b. } 0{,}25}$ **c.** 0,75 **d.** 0,875

Pour une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ, on sait que $P(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$.

Donc $P(T \geqslant 60) = e^{-\frac{\ln 2}{30} \times 60} = 0,25$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

Quelle est la valeur arrondie au millième de la probabilité $P(X \geqslant 135)$?

$\boxed{\textbf{a. } 0{,}159}$ **b.** 0,317 **c.** 0,683 **d.** 0,841

On peut faire le calcul à la machine ou utiliser le fait que $P(X \geqslant 135) = P(X \geqslant \mu + \sigma)$. Et comme on sait que $P(\mu - \sigma) \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$, on déduit aisément $P(X \geqslant \mu + \sigma)$.

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois de suite.

Lequel des intervalles ci-dessous est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile de cette pièce ?

a. [0,371 ; 0,637] **b.** [0,480 ; 0,523] $\boxed{\textbf{c. } [0{,}402 ; 0{,}598]}$ **d.** [0,412 ; 0,695]

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition de la face pile est $\left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0,402 ; 0,598]$

Des quatre intervalles proposés, c'est le seul centré sur 0,5.

Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

a. 400 **b.** 800 $\boxed{\textbf{c. } 1\,600}$ **d.** 3 200

L'intervalle de confiance généralement utilisé est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ d'amplitude $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

$\dfrac{2}{\sqrt{n}} < 0,05 \iff \dfrac{2}{0,05} < \sqrt{n} \iff 1600 < n$

EXERCICE 40 énoncé **Métropole septembre 2015**

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que : $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-x}$

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x=\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

On admet dans le texte que la fonction f est positive sur $[0;+\infty[$ donc sur $[n;n+1]$; on peut en déduire que $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x>0$ et donc que $\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n>0$ pour tout n.

La suite (I_n) est donc croissante.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^x-x\geqslant\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

(a) Sur $[0\,;\,+\infty[$, on sait que $\mathrm{e}^x-x\geqslant\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$; de plus, pour tout x, $\mathrm{e}^x-x>0$. donc $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-x}\leqslant\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$.

On multiplie cette inégalité par $x\geqslant 0$ donc : $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-x}\leqslant\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}$

D'après la positivité de l'intégration : $\displaystyle\int_0^n\frac{x}{\mathrm{e}^x-x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^n\frac{2x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

ce qui équivaut à $\mathrm{I}_n\leqslant\displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

(b) Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que : $\mathrm{H}(x)=(-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$

La fonction H est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et

$\mathrm{H}'(x)=-1\times\mathrm{e}^{-x}+(-x-1)(-1)\,\mathrm{e}^{-x}=-\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}=x\mathrm{e}^{-x}$

(c) On déduit de la question précédente que la fonction 2H est une primitive de la fonction $x\longmapsto 2x\mathrm{e}^{-x}$.

Donc $\displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Big[2(-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^n=2(-n-1)\,\mathrm{e}^{-n}-\big[2(-1)\,\mathrm{e}^0\big]=2-2(n+1)\,\mathrm{e}^{-n}$

Pour tout x, $\mathrm{e}^x>0$ donc $2(n+1)\,\mathrm{e}^{-n}>0$ donc $2-2(n+1)\,\mathrm{e}^{-n}\leqslant 2$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{I}_n\leqslant\displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\ \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\leqslant 2\end{array}\right\}\Longrightarrow\mathrm{I}_n\leqslant 2$$

3. La suite (I_n) est croissante et majorée par 2 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (i_n) est convergente.

1. On fait fonctionner l'algorithme pour $\mathrm{K}=4$ donc pour $h=0,25$:

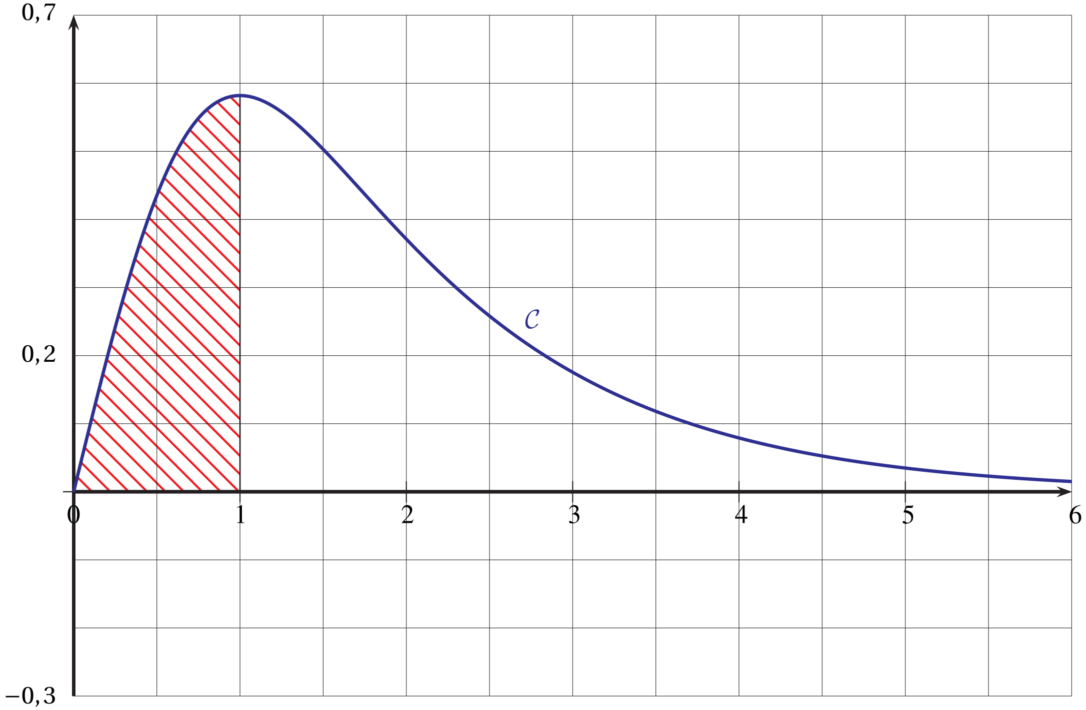
i	A	x
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

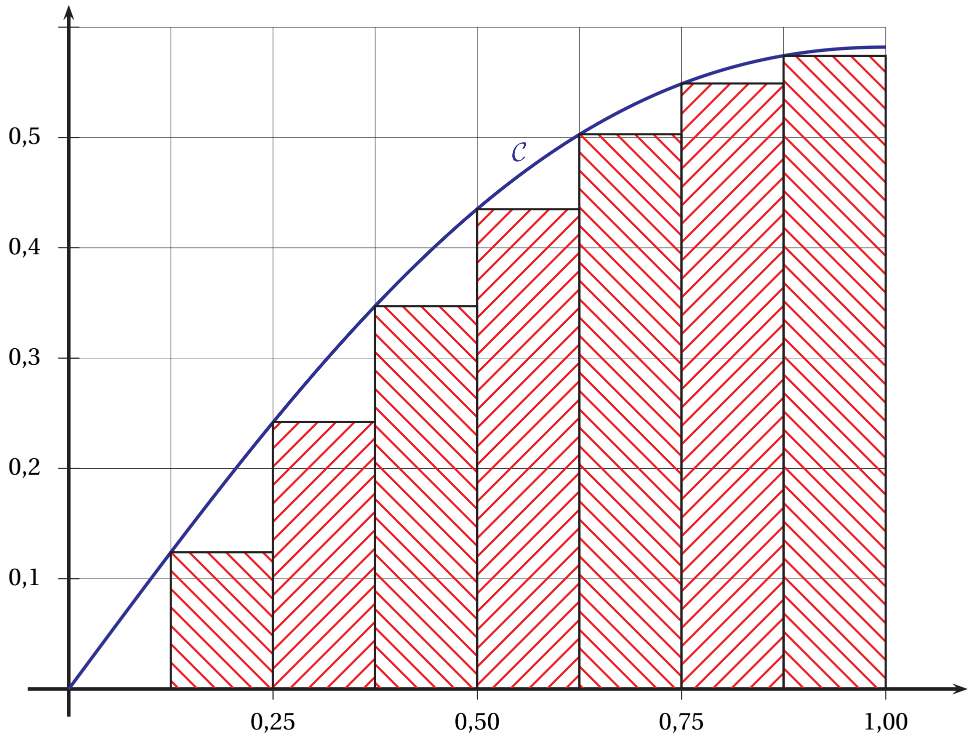
2. Pour $\mathrm{K}=8$, l'algorithme donne la somme des aires des rectangles hachurés sur le graphique du bas de la page **??**.

3. Quand K devient grand, l'algorithme donne une valeur approchée par défaut de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ (voir page **??**, le graphique du haut).

À rendre avec la copie

Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,6]$





Courbe $\mathcal{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;1]$

EXERCICE 41 énoncé Polynésie 2015

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A -- Conjectures à l'aide d'un algorithme

1.

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur $\ln(2)$
	S prend la valeur v
Traitement :	Pour k variant de 2 à n faire
	v prend la valeur $\ln(2-\mathrm{e}^{v})$
	S prend la valeur S + v
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. D'après les valeurs affichées il semble que la suite (S_n) soit croissante.

Partie B -- Étude d'une suite auxiliaire

1. On a $u_1 = \mathrm{e}^{v_1} = \mathrm{e}^{\ln(2)} = 2$.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{v_{n+1}} = \mathrm{e}^{\ln\left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right)} = \left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right) =$
$2-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{v_n}} = 2-\dfrac{1}{u_n} = u_{n+1}$.

2. D'après le résultat précédent :

$u_2 = 2-\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$;

$u_3 = 2-\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$;

$u_4 = 2-\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$.

3. Démonstration par récurrence :

Initialisation : la relation est vraie pour $n = 4$;

Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel $p > 4$ tel que $u_p = \dfrac{p+1}{p}$.

On a $u_{p+1} = 2-\dfrac{1}{u_p} = 2-\dfrac{p}{p+1} = \dfrac{2p+2-p}{p+1} = \dfrac{p+2}{p+1}$: la relation est donc vraie au rang $p+1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C -- Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \mathrm{e}^{v_n} \Rightarrow v_n = \ln u_n$.

De la question précédente on peut écrire :

$v_n = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1)-\ln n$.

2. $\mathrm{S}_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3 = \ln 4-\ln 1 = \ln 4$.

3. $\mathrm{S}_n = v_1+v_2+\cdots+v_n = \ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3+\cdots+\ln n-\ln(n+1)+\ln(n+1)-\ln n = \ln(n+1)$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = +\infty$. La suite (S_n) est divergente.

Exercice 42 énoncé **Pondichéry 2015**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} =$

$au_n + \frac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n - a\frac{b}{1-a} = a\left[u_n - \frac{b}{1-a}\right] = av_n$.

L'égalité $v_{n+1} = av_n$, vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. On sait que $v_n = v_0 \times a^n$; donc si $a \in]-1\,;\,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \frac{b}{1-a}$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$.

Partie B

1. Après la taille la plante mesure $80 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 80 \times \frac{3}{4} = 60$ (cm). Au bout de 1 an elle a poussé de 30 cm ; elle mesurera donc en mars 2016 avant la tailles $60 + 30 = 90$ cm.

2. (a) D'une année sur l'autre, tailler le quart revient à multiplier par $\frac{3}{4} = 0,75$ et la pousse annuelle est de 30 cm, donc :

$h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.

(b) Mars 2015 correspondant à $n = 0$, on a : $h_0 = 80$; $h_1 = 90$,

$h_2 = 0,75 \times 90 + 30 = 67,5 + 30 = 97,5$: la suite semble être croissante.

Initialisation : on sait déjà que $h_0 < h_1$;

Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $h_p < h_{p+1}$, alors

$0,75h_p < 0,75h_{p+1} \iff 0,75h_p + 30 < 0,75h_{p+1} + 30 \iff h_{p+1} < h_{p+2}$: l'hérédité est démontrée, donc la suite (h_n) est croissante.

(c) Si la suite (h_n) converge vers ℓ, par continuité l'égalité :

$h_{p+1} = 0,75h_p + 30$ donne en passant aux limites à l'infini :

$\ell = 0,75\ell + 30 \iff 0,25\ell = 30 \iff \ell = 120$.

La plante aura donc une taille inférieure à 120 cm. (À la calculatrice

$h_{20} \approx 119,873$ cm).

On utilise le résultat de la partie A avec la suite (h_n) et les coefficients $a = 0,75$ et b = 30.

Comme $-1 < 0,75 < 1$, la suite (h_n) converge vers $\frac{b}{1-a} = \frac{30}{1-0,75} = \frac{30}{0,25} = 120$.

Exercice 43 énoncé **AmeriqueSudS2016-exo-3.tex**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

1. (a) On calcule les premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$

On peut conjecturer que, pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

- **Initialisation**

  Pour n=0, $u_n = u_0 = 0$ et $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{0}{1} = 0$.

  Donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

  Soit n un entier naturel quelconque.

  On suppose que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ (hypothèse de récurrence).

  On va démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est à dire $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

  $$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

  On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion**

  On a vérifié que la propriété était vraie au rang 0.

  On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout n.

  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

(b) Pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

D'après le cours : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n+1} = 1$.

On peut donc en déduire que la limite ℓ de la suite (u_n) est égale à 1.

2. On complète l'algorithme pour qu'il affiche le plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$:

Variables :	n, a et b sont des nombres.
Initialisation :	n prend la valeur 0
	a prend la valeur 0
	b prend la valeur $0,5$
Traitement :	Tant que $\lvert b-a\rvert > 10^{-3}$
	n prend la valeur $n+1$
	a prend la valeur b
	b prend la valeur $\dfrac{1}{2-b}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Explications

Pour n donné, a joue le rôle de u_n et b celui de u_{n+1}.

Si l'objectif $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$ n'est pas atteint, on passe au rang $n+1$: on remplace u_n par u_{n+1}, c'est-à-dire a par b, et on remplace u_{n+1} par u_{n+2}, c'est-à-dire b par $\dfrac{1}{2-b}$.

Exercice 44 énoncé Asie 2016

Partie A : premier modèle -- avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. (a) On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc $u_0 = 1000$ puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries.

D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 10 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1 + \dfrac{20}{100} = 1,2$. Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.

Donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1,2\,u_n - 100$ avec $u_0 = 1\,000$.

(b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg soit 30 000 g.

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 30000$.

À la calculatrice, on trouve $u_{22} \approx 28\,103$ et $u_{23} \approx 33\,624$; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.

(c) On complète l'algorithme :

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1 000 n prend la valeur 0 Tant que $u \leqslant 30\,000$ faire u prend la valeur $1,2 \times u - 100$ n prend la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

2. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \geqslant 1\,000$.

- $u_0 = 1\,000 \geqslant 1\,000$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- On suppose la propriété vraie pour un rang quelconque $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_p \geqslant 1\,000$.
  $u_{p+1} = 1,2\,u_p - 100$; $u_p \geqslant 1000$ donc $1,2\,u_p \geqslant 1200$ donc $1,2\,u_p - 100 \geqslant 1\,100$.
  Donc $1,2\,u_p - 100 \geqslant 1000$ et on a démontré que la propriété était vraie au rang $p+1$.
- La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Pour tout n, $u_n \geqslant 1\,000$.

(b) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 1,2\,u_n - 100 - u_n = 0,2\,u_n - 100$

Or, pour tout n, $u_n \geqslant 1000$ donc $0,2\,u_n \geqslant 200$ et donc $0,2\,u_n - 100 \geqslant 100$

On a donc démontré que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$ donc, $u_n = v_n + 500$.

(a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,2\,u_n - 100 - 500 = 1,2(v_n + 500) - 600 = 1,2\,v_n + 600 - 600 = 1,2\,v_n$

$v_0 = u_0 - 500 = 1\,000 - 500 = 500$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $v_0 = 500$.

(b) On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$.

Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 500$, on en déduit que $u_n = 500 + 500 \times 1,2^n$.

(c) La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme positif ; or $1,2 > 1$ donc, d'après le cours, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Pour tout n, $u_n = v_n + 500$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Partie B : second modèle -- avec une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{50}{1 + 49\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

1. (a) $f(0) = \dfrac{50}{1 + 49\mathrm{e}^{0}} = \dfrac{50}{1 + 49} = 1$

(b) Pour tout t, $\mathrm{e}^{-0,2t} > 0$ donc $1 + 49\mathrm{e}^{-0,2t} > 1$ et donc $\dfrac{1}{1 + 49\mathrm{e}^{-0,2t}} < 1$

On en déduit que $\dfrac{50}{1 + 49\mathrm{e}^{-0,2t}} < 50$ et donc que, pour tout t, $f(t) < 50$.

(c) La fonction $t \longmapsto -0,2t$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto \text{e}^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $t \longmapsto \text{e}^{-0,2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction $t \longmapsto 1+49\text{e}^{-0,2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc, par composition, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+49\text{e}^{-0,2t}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en conclut que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(d) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0,2t = -\infty$; on pose $\text{T} = -0,2t$. Or $\displaystyle\lim_{\text{T}\to-\infty} \text{e}^{\text{T}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \text{e}^{-0,2t} = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 1+49\text{e}^{-0,2t} = 1$ et donc que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 50$.

2. On sait que $f(t)$ représente la masse, en kg, de bactéries au temps t, exprimé en jours.

- $f(0) = 1$ signifie que la masse des bactéries à l'instant $t = 0$ est de 1 kg ;
- $f(t) < 50$ pour tout t signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50 kg ;
- f est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps ;
- $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 50$ signifie que la masse de bactéries dans la cuve va se rapprocher de 50 kg.

3. On résout l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$:

$$\begin{aligned}
f(t) > 30 &\iff \frac{50}{1+49\text{e}^{-0,2t}} > 30 \\
&\iff 50 > 30 + 30 \times 49\text{e}^{-0,2t} && \text{car } 1+49\text{e}^{-0,2t} > 0 \text{ pour tout } t \\
&\iff \frac{50-30}{30\times 49} > \text{e}^{-0,2t} \\
&\iff \frac{2}{147} > \text{e}^{-0,2t} \\
&\iff \ln\left(\frac{2}{147}\right) > -0,2t && \text{croissance de la fonction ln sur } [0\ ;\ +\infty[\\
&\iff \frac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} < t && \text{division par un nombre négatif}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} \approx 21,5$ donc on en conclut que la masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

Partie C : un contrôle de qualité

On prend un échantillon de taille $n = 200$ et dans lequel l'entreprise affirme que 80 % des bactéries (celles de type A) produiront une protéine ; donc la proportion de bactéries de type A est $p = 0,8$.
$n = 200pg50$; $np = 160 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 40 \geqslant 5$ donc les conditions sont vérifiées pour qu'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] =$$
$$\left[0,8 - 1,96\frac{\sqrt{0,8\times 0,2}}{\sqrt{200}}\ ;\ 0,8 + 1,96\frac{\sqrt{0,8\times 0,2}}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,74\ ;\ 0,86]$$

La fréquence de bactéries dans l'échantillon est de $f = \dfrac{146}{200} = 0,73$; cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation calculé.
Donc, au risque de 5 % ; on peut remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

EXERCICE 45 énoncé **Nouvelle Calédonie 2017**

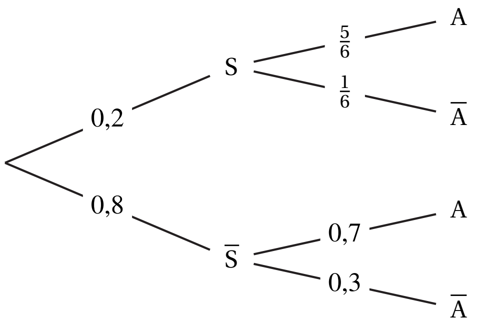
Le thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maîtriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème.
Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A :

- $30\,\%$ des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
- $\dfrac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

On sait de plus que $20\,\%$ des étudiants participent au stage.
On note :

- S l'évènement « l'étudiant a suivi le stage » et $\overline{S}$ son évènement contraire ;
- A l'évènement « il y a un exercice portant sur le thème A » et $\overline{A}$ son évènement contraire.

On établit un arbre de probabilité résumant la situation :



On cherche $P_{\overline{A}}(S)$ c'est-à-dire $\dfrac{P(S\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}$.
D'après l'arbre : $P(S\cap\overline{A}) = P(S)\times P_S(\overline{A}) = 0,2\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{0,2}{6} = \dfrac{1}{30}$.
D'après la formule des probabilités totales : $P(\overline{A}) = P(S\cap\overline{A})+P(\overline{S}\cap\overline{A}) = \dfrac{1}{30}+0,8\times 0,3 = \dfrac{1}{30}+\dfrac{24}{100} = \dfrac{41}{150}$.

$$P_{\overline{A}}(S) = \dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{41}{150}} = \dfrac{1}{30}\times\dfrac{150}{41} = \dfrac{5}{41}\approx 0,122.$$

EXERCICE 46 énoncé **Nouvelle Calédonie novembre 2016**

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + c$.

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$, donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$.

1. On calcule, à la calculatrice, u_n pour les premières valeurs de n (valeurs de u_n arrondies) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
u_n	1	1,8	2,44	2,95	3,36	3,69	3,95	4,16	4,33	...

n	...	20	21	22	23	24	25	26	27	28
u_n	...	4,95	4,96	4,97	4,976	4,981	4,985	4,988	4,990	4,992

La suite (u_n) semble croissante et semble converger vers le nombre 5.

2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

- **Initialisation**

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $5 - 4 \times 0,8^0 = 5 - 4 = 1$. Donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

- **Hérédité**

Soit n un entier naturel quelconque.

On suppose que la propriété est vraie pour le rang n c'est-à -dire $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$ (c'est l'hypothèse de récurrence), et on veut démontrer qu'elle est encore vraie pour le rang $n + 1$.

$u_{n+1} = 0,8u_n + 1$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$; donc :

$u_{n+1} = 0,8(5 - 4 \times 0,8^n) + 1 = 0,8 \times 5 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 = 4 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 = 5 - 4 \times 0,8^{n+1}$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

On a démontré que, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.

La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc héréditaire pour tout n.

- **Conclusion**

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Elle est héréditaire à partir du rang 0.

Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

3. $u_{n+1} - u_n = \left(5 - 4 \times 0,8^{n+1}\right) - (5 - 4 \times 0,8^n) = 5 - 4 \times 0,8^{n+1} - 5 + 4 \times 0,8^n = 4 \times 0,8^n (1 - 0,8)$
$= 4 \times 0,8^n \times 0,2 > 0$

Pour tout n, on a démontré que $u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

- $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite géométrique $(0,8^n)$ de raison 0,8 converge vers 0.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} 4 \times 0,8^n = 0 \implies \lim\limits_{n \to +\infty} 5 - 4 \times 0,8^n = 5$

Donc la suite (u_n) est convergente vers 5.

On peut donc dire que si l'apiculteur rachète chaque année 10 000 abeilles, le nombre d'abeilles va augmenter chaque année et va tendre vers 50 000.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$; donc, pour tout n, $u_n = v_n + 5c$.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 5c = 0,8u_n + c - 5c = 0,8(v_n + 5c) - 4c = 0,8v_n + 4c - 4c = 0,8v_n$

- $v_0 = u_0 - 5c = 1 - 5c$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = 1 - 5c$.

2. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = 1 - 5c$ donc, pour tout n,

$$v_n = v_0 \times q^n = (1 - 5c)\,0,8^n\,.$$

3. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 ; or $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.

Pour tout n, $u_n = v_n + 5c$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite $5c$.

L'apiculteur veut que le nombre d'abeilles tende vers 100 000 ; il faut donc que $5c = 10$, autrement dit que $c = 2$.

Pour que le nombre d'abeilles tende vers 100 000, il faut que l'apiculteur rachète chaque année 20 000 abeilles.

EXERCICE 47 énoncé **Polynésie 2016**

1. En C2 on entre « =B2+2*A2 × A2+3*A2+5 » et

en B3 on entre « =2*B2+2*A2 × A2-A2 »

2. Il semblerait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 7 \times 2^n$

on aurait alors $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ car $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $7 \times 2^0 - 2 \times 0^2 - 3 \times 0 - 5 = 7 - 5 = 2$

donc la propriété est vérifiée au rang $n = 0$

Hérédité : Supposons que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on ait $u_k = 7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5$

alors $u_{k+1} = 2\left(7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5\right) + 2k^2 - k = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 7k - 10$

or $7 \times 2^{k+1} - 2(k+1)^2 - 3(k+1) - 5 = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 4k - 2 - 3k - 3 - 5 = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 7k - 10$

donc si $u_k = 7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5$, cela entraîne que $u_{k+1} = 7 \times 2^{k+1} - 2(k+1)^2 - 3(k+1) - 5$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang 0 or elle est vérifiée au rang 0, donc d'après le principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$

et donc

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5 = 7 \times 2^n$