

✧ Corrigé Baccalauréat Amérique du Nord Jour 2 19 mai 2022 ✧

**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

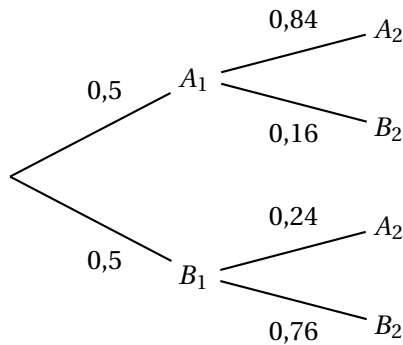
Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

**EXERCICE 1 (7 points)**

**Thèmes : probabilités, suites**

1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. a. Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer  $a_2 = p(A_2)$  :

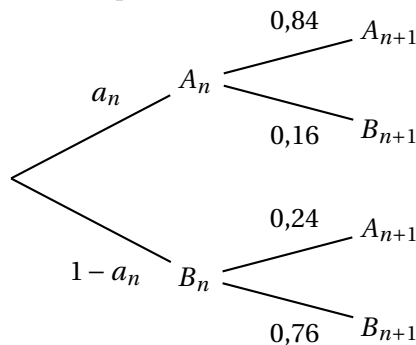
$$a_2 = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = p_{A_1}(A_2) \times p(A_1) + p_{B_1}(A_2) \times p(B_1) \\ = 0,84 \times 0,5 + 0,24 \times 0,5 = 0,54. \text{ Donc } a_2 = 0,54.$$

b. Utilisons la formule de Bayes pour calculer  $p_{A_2}(B_1)$  :

$$p_{A_2}(B_1) = \frac{p(A_2 \cap B_1)}{p(A_2)} = \frac{p_{B_1}(A_2) \times p(B_1)}{p(A_2)} = \frac{0,24 \times 0,5}{0,54} \approx 0,222$$

3. a. On remarquera au préalable que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n + b_n = 1$ .

L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



b. Utilisons là encore, la formule des probabilités totales pour déterminer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ , pour tout entier naturel non nul :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) = p_{A_n}(A_{n+1}) \times p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1}) \times p(B_n) \\ = 0,84 \times p(A_n) + 0,24 \times p(B_n) = 0,84 a_n + 0,24 b_n. \text{ Or } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 1 - a_n.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = 0,84 a_n + 0,24(1 - a_n) = 0,6 a_n + 0,24$$

c. Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$ .

*Initialisation* :  $a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{1-1} = 0,6 - 0,1 = 0,5$ . L'initialisation est vérifiée.

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et supposons que  $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$ .

Montrons que  $a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$ .

D'après la question précédente,  $a_{n+1} = 0,6 a_n + 0,24$ , donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$a_{n+1} = 0,6(0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}) + 0,24 = 0,36 - 0,1 \times 0,6 \times 0,6^{n-1} + 0,24 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$ . On obtient ce qu'il fallait démontrer. L'hérédité est démontrée.

*Conclusion* : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n$ , elle l'est aussi au rang  $n + 1$ . D'après l'axiome de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$ .

d.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^{n-1} = 0$  car  $0,6 \in ]-1 ; 1[$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$ .

Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, la probabilité qu'un vélo soit à la station A est de 60 %.

e. Résolvons :  $a_n \geq 0,599$ .  $a_n \geq 0,599 \iff 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geq 0,599$   
 $\iff -0,1 \times 0,6^{n-1} \geq -0,001 \iff 0,6^{n-1} \leq \frac{-0,001}{-0,1} \iff 0,6^{n-1} \leq \frac{1}{100}$ .

Sachant que la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$0,6^{n-1} \leq \frac{1}{100} \iff \ln(0,6^{n-1}) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right) \iff (n-1) \times \ln(0,6) \leq -\ln(100)$ . Or  $\ln(0,6) < 0$ ,

donc  $n-1 \geq \frac{-\ln(100)}{\ln(0,6)} \iff n \geq 1 - \frac{2\ln(10)}{\ln(0,6)}$ .

À la calculatrice,  $1 - \frac{2\ln(10)}{\ln(0,6)} \approx 10,02$  donc  $n \geq 11$ .

La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à 0,599 à partir du 11-ième jour.

**EXERCICE 2 (7 points)**

**Thèmes : fonctions, fonction exponentielle**

**Partie A**

1. La fonction  $p$  est continue et dérivable sur  $[-3 ; 4]$ .

$\forall x \in [-3 ; 4], p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ( $\Delta = -24 < 0$ ) donc  $\forall x \in [-3 ; 4], p'(x) > 0$ .  
 Donc la fonction  $p$  est strictement croissante sur  $[-3 ; 4]$ .

2.  $p(-3) = -68$  et  $p(4) = 37$

La fonction  $p$  est continue et strictement croissante sur  $[-3 ; 4]$  à valeurs dans  $[-68 ; 37]$ . Or  $0 \in [-68 ; 37]$ , donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $p(x) = 0$  admet une unique solution, notée  $\alpha$ , dans l'intervalle  $[-3 ; 4]$ .

3. À la calculatrice,  $\alpha \approx -0,2$ .

4. D'après les variations de la fonction  $p$ , et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction  $p$  sur  $[-3 ; 4]$  :

$x$	-3	$\alpha$	4
$p(x)$	-	0	+

**Partie B**

1. a. La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $[-3 ; 4]$  (car  $\forall x \in [-3 ; 4], 1 + x^2 \neq 0$ ).

$\forall x \in [-3 ; 4], f'(x) = \frac{e^x \times (1 + x^2) - e^x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1 + x^2)^2} = \frac{(x - 1)^2 e^x}{(1 + x^2)^2}$ .

b.  $f'(x) = 0 \iff \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2} = 0 \iff (x-1)^2 e^x \iff (x-1)^2 \iff x-1 = 0 \iff x = 1.$

Et  $f(1) = \frac{e}{2}$ . Donc au point d'abscisse 1,  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente horizontale d'équation  $y = \frac{e}{2}$ .

2. a. Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction  $f$  est :
- convexe sur  $[-3 ; 0]$ ;
  - concave sur  $[0 ; 1]$ ;
  - convexe sur  $[1 ; 4]$ .

Donc  $\mathcal{C}_f$  admet deux points d'inflexion, aux abscisses  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

b.  $\forall x \in [-3 ; 4] : f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de  $x \in [-3 ; 4]$  pour lesquelles  $f''(x)$  s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3 ; 4], (1+x^2)^3 > 0$  et  $e^x > 0$  donc  $f''(x)$  a le même signe que  $p(x)(x-1)$ .

On construit alors le tableau de signe suivant :

$x$	-3	$\alpha$	1	4	
$p(x)$	-	0	+	+	
$x-1$	-		-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+

La fonction  $f''$  s'annule et change de signe en  $x = \alpha$  et  $x = 1$ . Donc  $\mathcal{C}_f$  admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

**EXERCICE 3 (7 POINTS)**

**THÈMES : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE**

En utilisant le repère fourni  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , les points notés ont pour coordonnées : A(6 ; 0 ; 2), B(6 ; 0 ; 0), C(6 ; 8 ; 0), D(0 ; 8 ; 0), E(0 ; 0 ; 4), F(6 ; 0 ; 4), G(6 ; 8 ; 4), H(0 ; 8 ; 4), I(6 ; 0 ; 2), R(6 ; 3 ; 4), T(3 ; 0 ; 4) et S $\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$

1. a. Les vecteurs  $\vec{AR}$  et  $\vec{AT}$  ont pour coordonnées :  $\vec{AR} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{AT} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

$AR = \|\vec{AR}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$  et  $AT = \|\vec{AT}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}$   
 $\|\vec{AR}\| = \|\vec{AT}\|$  donc le triangle ART est isocèle en A.

b.  $\vec{AR} \cdot \vec{AR} = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 4$

c. Utilisons la formule du produit scalaire :  $\vec{AR} \cdot \vec{AR} = \|\vec{AR}\| \times \|\vec{AT}\| \times \cos(\widehat{RAT})$

donc  $\cos(\widehat{RAT}) = \frac{\vec{AR} \cdot \vec{AR}}{\|\vec{AR}\| \times \|\vec{AT}\|} = \frac{4}{\sqrt{13}^2} = \frac{4}{13}$  donc  $\widehat{RAT} = \arccos\left(\frac{4}{13}\right) \approx 72,1^\circ$

2. a. Les vecteurs  $\vec{AR}$  et  $\vec{AT}$  ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de réel  $k$  tel que  $\vec{JK} = k \times \vec{JL}$ .

En effet le système  $\begin{cases} 0 = k \times (-3) \\ 3 = k \times 0 \\ 2 = k \times 2 \end{cases}$  n'admet pas de solution. Donc ils définissent une

base du plan (ART). Calculons :

$\vec{n} \cdot \vec{AR} = 2 \times 0 + (-2) \times 3 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$  et  $\vec{n} \cdot \vec{AT} = 2 \times (-3) + (-2) \times 0 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$ .  
Donc  $\vec{n} \perp \vec{AR}$  et  $\vec{n} \perp \vec{AT}$  donc  $\vec{n}$  est normal à tout vecteur du plan (ART), donc  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan (ART).

**b.** Le plan (ART) a pour équation cartésienne :  $ax + by + cz + d = 0$ , où  $(a ; b ; c)$  sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan. En prenant comme vecteur normal le vecteur  $\vec{n}$ , on obtient : (ART) :  $2x - 2y + 3z + d = 0$ .

Or  $A \in (\text{ART})$  donc  $12 - 0 + 6 + d = 0$  donc  $d = -18$ .

Donc (ART) a pour équation  $2x - 2y + 3z - 18 = 0$ .

**3. a.** La droite  $\Delta$  est orthogonale au plan (ART), donc elle admet comme vecteur directeur le vecteur  $\vec{u}$ , vecteur normal à ce plan. Elle passe par le point  $S\left(3 ; \frac{5}{2} ; 0\right)$ . Une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  est donc :

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 0 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \text{ soit } \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

**b.** Les coordonnées du point L sont les uniques solutions du système :

$$(S) \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \\ 2x - 2y + 3z - 18 = 0 \end{cases} \quad \text{En remplaçant } x, y \text{ et } z \text{ dans la dernière équation, on obtient :}$$

$$2x - 2y + 3z - 18 = 0 \iff 2(3 + 2k) - 2\left(\frac{5}{2} - 2k\right) + 3 \times 3k - 18 = 0 \iff 17k - 17 = 0 \iff k = 1$$

Donc  $x = 3 + 2k = 5$ ,  $y = \frac{5}{2} - 2k = \frac{1}{2}$  et  $z = 3k = 3$ . Le point L a pour coordonnées  $\left(5 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$ .

**4.** Le milieu K de [EH] a donc pour coordonnées  $(0 ; 4 ; 4)$ . N a pour coordonnées  $(0 ; 8 - 4t ; 4t)$ .

Pour  $t \in [0 ; 1]$ , les vecteurs  $\vec{DK}$  et  $\vec{ND}$  ont pour coordonnées :  $\vec{DK} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{ND} \begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$ .

On remarque alors que  $\vec{DN} = t \times \vec{DK}$ . Les deux vecteurs sont donc colinéaires, donc les points D, K et N sont alignés.

Pour vérifier que N est un point du segment [DK], montrons que  $\vec{NK} \cdot \vec{ND} \leq 0$  :

$$\vec{NK} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 + 4t \\ 4 - 4t \end{pmatrix} \text{ et } \vec{ND} \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \\ -4t \end{pmatrix}$$

donc  $\vec{NK} \cdot \vec{ND} = 0 \times 0 + (-4 + 4t) \times 4t + (4 - 4t) \times (-4t) = 32t^2 - 32t = 32t(t - 1)$ .

$t \in [0 ; 1]$  donc  $32t(t - 1) \leq 0$  donc N est un point du segment [DK].

5. Les vecteurs  $\overrightarrow{SL}$  et  $\overrightarrow{SN}$  ont pour coordonnées :  $\overrightarrow{SL} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{SN} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{11}{2} - 4t \\ 4t \end{pmatrix}$

Les vecteurs  $\overrightarrow{SL}$  et  $\overrightarrow{SN}$  sont orthogonaux donc  $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$ .

$$\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0 \iff 2 \times (-3) + (-2) \times \left(\frac{11}{2} - 4t\right) + 3 \times 4t = 0 \iff 20t - 17 = 0 \iff t = \frac{17}{20}.$$

Le point N aura alors pour coordonnées :  $N\left(0; 8 - 4 \times \frac{17}{20}; 4 \times \frac{17}{20}\right)$  soit  $N\left(0; \frac{23}{5}; \frac{17}{5}\right)$

**EXERCICE 4 (7 points)****Thème : fonction logarithme népérien, probabilités**

1.  $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right) = \ln(3^2) + \ln(\sqrt{3}) - \ln(3) - \ln(3^2) = \frac{1}{2}\ln(3) - \ln(3) = -\frac{1}{2}\ln(3)$

**Réponse d**

2. Donnons en premier le domaine de définition. Il faut que  $x > 0$  et  $x > 10$ . Donc  $\mathcal{D}_f = ]10; +\infty[$ .

$$\ln(x) + \ln(x - 10) = \ln(3) + \ln(7) \iff \ln(x(x - 10)) = \ln(31) \iff x(x - 10) = 21$$

$$\iff x^2 - 10x - 21 = 0. \text{ Ce trinôme admet deux solutions : } \Delta = 184 \text{ et } \sqrt{\Delta} = \sqrt{184} = 2\sqrt{46}.$$

Les deux solutions sont :  $x_1 = \frac{10 - 2\sqrt{46}}{2} = 5 - \sqrt{46}$  et  $x_2 = \frac{10 + 2\sqrt{46}}{2} = 5 + \sqrt{46}$ .

**Réponse c**

3. La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par l'expression  $f(x) = x^2(-1 + \ln(x))$ . Elle est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

$$\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = 2x \times (-1 + \ln(x)) + x^2 \times \frac{1}{x} = -2x + 2x \ln(x) + x = -x + 2x \ln(x) = x(2\ln(x) - 1).$$

$$f'(x) = 0 \iff x(2\ln(x) - 1) = 0 \iff 2\ln(x) - 1 \iff \ln(x) = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

La tangente au point d'abscisse  $a = \sqrt{e}$  est horizontale. Son équation est donnée par :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ . Sachant que  $f'(\sqrt{e}) = 0$  et que  $f(\sqrt{e}) = \sqrt{e}^2(-1 + \ln(\sqrt{e})) = e\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e$ . L'équation de cette tangente horizontale est donc :  $y = -\frac{1}{2}e$ .

**Réponse d**

4. Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.

Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 5 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. Si on note par  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaunes tirés, alors  $X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$  :  $X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right)$

$$\text{Ainsi } p(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{5-2} = 0,3456 \approx 0,346.$$

**Réponse b**

5. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.  $X$  est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et  $X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$  :

$$X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right).$$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx 0,922.$$

**Réponse d**

6. On reprend les conditions précédentes : un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.  $X$  est la variable aléatoire donnant le nombre de jetons jaune tirés et  $X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$  :

$$X \sim \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{5}\right).$$

L'espérance d'une loi binomiale est égale à :  $E(X) = np$ .

$$\text{Ici, } E(x) = 5 \times \frac{2}{5} = 2.$$

**Réponse c**