Baccalauréat général

Session 2022 – Métropole

Épreuve de Mathématiques

Sujet de spécialité — Proposition de corrigé
Sujet 1

Ce corrigé est composé de 10 pages.

Exercice 1 — Exponentielle, suites

Partie A : Étude du premier protocole

$$f : t \mapsto 3te^{-0,5t+1}$$

1. **a.** Soit $t \in [0; 10]$. D'une part, par dérivée d'une composée, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(e^{-0,5t+1}) = -0,5e^{-0,5t+1}$. D'autre part, la dérivation du produit donne :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,t}(t) = 3e^{-0,5t+1} + 3t \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(e^{-0,5t+1}\right) \\ &= 3e^{-0,5t+1} - 1,5te^{-0,5t+1} \\ &= 3\left(e^{-0,5t+1} - 0,5te^{-0,5t+1}\right) \end{aligned}$$

Finalement, en factorisant par l'exponentielle, on a bien :

$$\boxed{f'(t) = 3\,(-0,5t+1)\,e^{-0,5t+1}}$$

b. Soit $t \in [0; 10]$. La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(t)$ est celui de $-0,5t+1$, *i.e.* positif pour $t < 2$ et négatif sinon.

Il vient donc le tableau de variations de f sur son domaine de définition :

t	0		2		10
signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$30e^{-4}$

c. Il est alors possible de remarquer que f sera maximale pour $\underline{t = 2}$, alors la quantité de médicament présente dans le sang du patient vaudra $\underline{f(2) = 6}$

2. **a.** Premièrement, on a montré que sur $[0, 2]$ f est strictement croissante. De plus, $f([0, 2]) = [0, 6]$ (question précédente).

Et comme $5 \in [0, 6]$, il est possible, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires [1], d'affirmer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution $\alpha \in [0, 2]$.

Finalement, par lecture graphique, on trouve, à 10^{-2} près, $\underline{\alpha \approx 1,02}$.

b. D'après les données, le médicament est efficace lorsque sa quantité dans le sang est supérieure à 5 mg. Autrement dit, il est efficace tant que $f(t) > 5$.

Or, $f(t) > 5$ pour $t \in [\alpha, \beta]$. D'où, le médicament est efficace pendant $\beta - \alpha = 3,46 - 1,02 = 2,44\,\text{heures} = 2\,\text{heures}, 26,4\,\text{minutes}$

Le médicament sera donc efficace pendant une durée $\underline{\Delta t = 2\,\text{heures}\,26\,\text{minutes}}$ environ.

Partie B : Étude du second protocole

1. Au bout de la première heure, la quantité de médicament a diminué de 30 %, mais on a réinjecté 1,8 mg.

Il vient donc $u_1 = 0,7u_0 + 1,8 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2\,\text{mg}$.

1. il est également possible d'invoquer le théorème de la bijection

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À chaque heure, on sait que la quantité de médicament diminue de 30 %. Il restera alors, à l'heure $(n+1)$, une quantité $0,7 \times u_n$ dans le sang. Mais comme 1,8 mg sont réinjectés chaque heure, il vient finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8}$$

3. **a.** On souhaite montrer par récurrence que pout tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1} < 6$. On va donc dérouler étape par étape un raisonnement par récurrence.

— Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$. On a alors bien $u_0 \leq u_1 < 6$, la propriété est vérifiée au rang 0.

— Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang n quelconque, et montrons qu'elle reste vérifiée au rang $(n+1)$.
On a :

$$\begin{aligned} & u_n \leq u_{n+1} < 6 \\ \iff & 0,7u_n \leq 0,7u_{n+1} < 0,7 \times 6 \\ \iff & 0,7u_n + 1,8 \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8 \\ \iff & u_{n+1} \leq 0,7u_{n+1} + 1,8 < 0,7 \times 6 + 1,8 \end{aligned}$$

Et comme $0,7u_{n+1} + 1,8 = u_{n+2}$ et $0,7 \times 6 + 1,8 \approx 5,99 < 6$, il vient finalement :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} < 6$$

La propriété est donc vérifiée au rang $(n+1)$, elle est héréditaire.

— Conclusion : La propriété étant vérifiée au rang zéro et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n.

b. Nous avons, par récurrence, montré deux choses :

— Premièrement, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

— Secondement, nous avons montré que pour tout entier naturel n, $u_n < 6$. La suite (u_n) est donc majorée.

Finalement, la suite (u_n) étant croissante et majorée, alors elle est bien convergente de limite ℓ.

c. Il vient alors très logiquement $\underline{\ell = 6}$. Autrement dit, quelle que soit la durée du traitement, la quantité de médicament présente dans le sang du patient ne pourra pas dépasser 6 mg.

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = 6 - u_n$. Alors il vient :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 6 - u_{n+1} \\ &= 6 - (0,7u_n + 1,8) \\ &= -0,7u_n + 4,2 \\ &= 0,7(6 - u_n) = 0,7v_n \end{aligned}$$

Alors finalement, pour tout entier naturel n, $\boxed{v_{n+1} = 0,7v_n}$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,7$ et premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 6 - 2 = 4$.

b. On a donc, pour la suite géométrique (v_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = 4 \times 0,7^n$$

Et finalement, comme $v_n = 6 - u_n \iff u_n = 6 - v_n$, il vient :

$$\boxed{u_n = 6 - 4 \times 0,7^n}$$

c. On cherche à savoir au bout de combien d'injections la quantité de médicament présente dans le sang sera supérieure à $5,5\,\text{mg}$. Il va donc nous falloir résoudre, pour n entier naturel, $u_n \geq 5,5$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
&u_n \geq 5,5 \\
&\quad \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geq 5,5 \\
&\quad \iff -4 \times 0,7^n \geq -0,5 \\
&\quad \iff 4 \times 0,7^n \leq 0,5 \qquad \text{(on a multiplié par un nombre négatif)} \\
&\quad \iff 0,7^n \leq 0,5/4 = 0,125 \\
&\quad \iff e^{n\ln(0,7)} \leq 0,125 \\
&\quad \iff n\ln(0,7) \leq \ln(0,125) \qquad \text{(ln strictement croissant)} \\
&\quad \iff n \geq \frac{\ln(0,125)}{\ln(0,7)} \approx 6 \qquad (\ln(0,7) < 0)
\end{aligned}$$

Il aura été nécessaire de réaliser $\underline{N = 7}$ injections avec ce protocole car u_6 correspond à la 7ème injection.

Exercice 2 — Géométrie dans l'espace

1. **a.** À partir de sa représentation paramétrique, on déduit que $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

b. Par définition de la représentation paramétrique d'une droite, on sait que le point $M(1;2;2) \in \mathcal{D}$. Alors $B \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{MB} = t\vec{u}$.
On a le vecteur :

$$\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Et on remarque alors que $\boxed{\overrightarrow{MB} = -\vec{u}}$, les deux vecteurs sont donc colinéaires, le point B appartient bien à la droite $\mathcal{D}$.

c. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$. D'où, on calcule le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 + 2 \times -1 + -3 \times 2 = 0 - 2 - 6 = -8$$

2. **a.** Le plan $\mathcal{P}$ étant orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, le vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Le plan admet alors une équation cartésienne de la forme $2x - y + 2z + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$. Il reste alors à déterminer la valeur de c.

Sachant que $A(-1, 1, 3) \in \mathcal{P}$, on a nécessairement $2 \times (-1) - 1 + 2 \times 3 + c = 0 \implies -2 - 1 + 6 + c = 0 \implies \underline{c = -3}$.

Le plan $\mathcal{P}$ admet donc bien comme équation cartésienne $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b. On cherche les coordonnées du point H d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ coordonnées du point H.

Premièrement, $H \in \mathcal{P}$, donc a des coordonnées vérifiant l'équation $2x-y+2z-3 = 0$.

De plus, $H \in \mathcal{D}$, donc vérifie $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Il vient donc :

$$H \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \\ 2 + 4t - 2 + t + 4 + 4t - 3 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \\ 9t + 1 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Il vient donc $t = -\frac{1}{9}$, et dans ce cas avec l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$, on a :

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9} \\ y = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9} \\ z = 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9} \end{cases}$$

Finalement, on a donc bien $\boxed{H\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)}$ coordonnées du point d'intersection entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

c. On a la distance euclidienne :

$$d = \sqrt{\left(\frac{7}{9}+1\right)^2 + \left(\frac{19}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{16}{9}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{81} + \frac{100}{81} + \frac{121}{81}}$$

$$d = \sqrt{\frac{477}{81}} = \sqrt{\frac{53}{9}}$$

Alors finalement, $\boxed{AH = \frac{\sqrt{53}}{3}}$.

3. **a.** Les points B et H appartiennent tous deux à la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors par définition, $\exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. On cherche à faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et exprimer k en fonction de son produit scalaire avec $\vec{u}$.

On commence par appliquer la relation de Chasles à l'égalité montrée prédédemment :

$$\overrightarrow{HB} = k\vec{u} \implies \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{u}$$

On prend alors, des deux côtés, le produit scalaire par $\vec{u}$:

$$(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{u} = k\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \implies \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = k \parallel \overrightarrow{u} \parallel^2$$

Or, on sait que H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$. D'où, par définition, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{u} = 0$. L'égalité devient donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = k \parallel \overrightarrow{u} \parallel^2$$

Et finalement, on obtient bien :

$$\boxed{k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2}}$$

c. On calcule alors $k = -\frac{8}{9}$ (la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}$ ayant été calculée précédemment).

Il vient donc $\overrightarrow{HB} = -\frac{8}{9}\vec{u} = -\frac{8}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Alors :

$$\begin{pmatrix} -1 - x_H \\ 3 - y_H \\ 0 - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} \\ \frac{8}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_H = \frac{16}{9} - 1 \\ y_H = 3 - \frac{8}{9} \\ z_H = \frac{16}{9} \end{cases}$$

Et finalement, on trouve bien $\boxed{H\left(\frac{7}{9}, \frac{19}{9}, \frac{16}{9}\right)}$, *i.e.* le même résultat que celui obtenu par l'autre méthode.

4. On étudie le tétraèdre ABCH. On sait que B et H sont sur la droite $\mathcal{D}$, que les points C et H sont sur le plan $\mathcal{P}$. On sait également que la droite $\mathcal{D} = (BH)$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. De plus, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$ et $A \in \mathcal{P}$, il vient donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$

Ainsi, la hauteur issue de ACH est le segment HB. Il vient donc, en notant S l'aire du triangle ACH :

$$V = \frac{1}{3} \times S \times \parallel \overrightarrow{HB} \parallel \Longrightarrow S = \frac{3 \times V}{\parallel \overrightarrow{HB} \parallel}$$

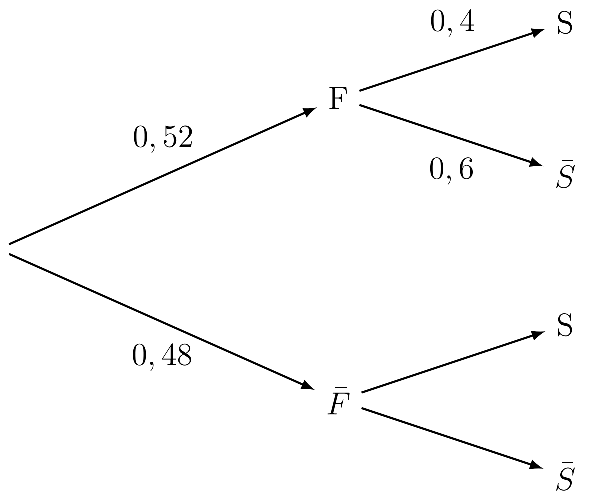
Et comme $\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} \\ -\frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}$, il vient $\parallel \overrightarrow{HB} \parallel = \frac{8}{3}$.

Finalement, on a $S = \frac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = 1$ unités d'aire.

Exercice 3 — Probabilités

1. **a.** On nous précise que 25 % des salariés ont suivi le stage.
Ce qui signifie que $p(S) = 0,25$.

b. On recopie et complète l'arbre pondéré :



c. On cherche à calculer la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage, ce qui revient à calculer la probabilité $p(F \cap S)$.
On a alors, les événements étant indépendants :

$$p(F \cap S) = p(F) \times p_F(S) = 0,52 \times 0,4 \approx 0,208$$

D'où, on a bien $p(F \cap S) = 0,208$.

d. On cherche la probabilité que la personne soit une femme, sachant qu'elle a suivi le stage. Ce qui revient à calculer la probabilité $p_S(F)$.
Or, d'après la formule de Bayes :

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)}$$

$$\boxed{p_S(F) = \frac{p(F)p_F(S)}{p(S)}}$$

D'où, $p_S(F) = \frac{0,208}{0,25} = 0,832$.

e. On sait que, d'après la loi des probablités totales,

$$p(S) = p(F \cap S) + p(\bar{F} \cap S) = p(F \cap S) + p(\bar{F})p_{\bar{F}}(S)$$
$$\Longrightarrow \boxed{p_{\bar{F}}(S) = \frac{p(S) - p(F \cap S)}{p(\bar{F})}} = \frac{0,25 - 0,208}{0,48} = 0,09$$

La part d'hommes ayant suivi le stage étant de 9 %, l'affirmation du directeur est vraie.

2. **a.** On prend un échantillon de 20 salariés, et on étudie le suivi du stage dans cet échantillon supposé être un tirage avec remise. La variable aléatoire X mesure donc le nombre de salariés ayant suivi le stage dans cet échantillon de 20, et suit alors la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.

D'où, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20; 0,25)$

b. Il vient donc $P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{15} \underline{\approx 0,202}$ probabilité que 5 salariés sur les 20 aient suivi le stage.

c. En saisissant `proba(5)` dans la console Python, le programme renvoie $0,617$.

On remarque que le programme Python ainsi écrit somme les $P(X = i)$ de 0 à $k \in \mathbb{N}$, donnant alors la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Autrement dit, `proba(5)` donne la probabilité $P(X \leq 5)$ qu'au plus 5 salariés aient suivi le stage sur les 20.

d. La probabilité qu'au moins 6 salariés aient suivi le stage correspond à la probabilité $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$.

D'où, $P(X \geq 6) = 1 - 0,617 \underline{\approx 0,383}$ la probabilité qu'au moins 6 salariés aient suivi le stage.

3. On sait que 25 % des salariés ont suivi le stage. Ces derniers étant augmentés à hauteur de 5 % ; les 75 % restants étant augmentés à hauteur de 2 %, il vient l'augmentation moyenne :

$$A_T = 0,25 \times 0,05 + 0,75 \times 0,02 = 0,0275$$

L'augmentation totale moyenne sera donc de $\underline{A_T = 2,8\,\%}$.

Exercice 4 — Fonctions numériques (QCM)

NB : Dans cet exercice QCM, aucune justification n'était demandée.
On les donne cependant dans ce corrigé, pour des raisons évidentes.

1. Réponse c.

Explication :

On cherche l'asymptote de la fonction $f : x \mapsto \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$. Son dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, cette question revient à une étude de ses branches infinies (*i.e.* les limites en $\pm\infty$).

Soit $x > 0$. En $+\infty$, on remarque que la limite de la fonction f est une forme indéterminée. Il va donc falloir lever cette incertitude. On a :

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2(-2 + 3/x - 1/x^2)}{x^2(1 + 1/x^2)}$$

D'où, comme $x > 0$:

$$f(x) = \frac{-2 + 3/x - 1/x^2}{1 + 1/x^2}$$

Et on remarque que ce résultat est valable également pour $x < 0$. D'où, il vient naturellement :

$$\boxed{\lim_{\pm\infty} f = -2}$$

La droite d'équation $y = -2$ est donc asymptote à la courbe représentative de f.

2. Réponse d.

Explication :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que $f(x)$ est de la forme $au'e^u$ avec $a \in \mathbb{R}$ et u une fonction continue et dérivable.

On identifie alors $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$. Dans ce cas, il vient $a = \frac{1}{2}$.

Donc les primitives de f sont les fonctions $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$ une constante.

Reste alors à chercher la valeur de la constante C permettant de vérifier la condition imposée. On a :

$$F(0) = \frac{1}{2}e^0 + C = \frac{1}{2} + C$$

Et comme il faut $F(0) = 1$, il vient $C = 1 - 1/2 \underline{= 1/2}$.

Finalement, la primitive cherchée est définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}}$.

3. Réponse c.

Explication :

On souhaite étudier la convexité de la fonction f. Pour cela, on nous donne la courbe représentative de sa fonction dérivée.

On remarque dans un premier temps que cette fonction dérivée n'est pas monotone sur $[2; +\infty[$, et ne l'est donc pas d'avantage sur $[0; +\infty[$, ce qui permet d'éliminer immédiatement toutes les réponses évoquant une convexité unique sur ces domaines.

Il ne reste alors, pour se convaincre, plus qu'à vérifier que f' est bien croissante sur $[0; 2]$, ce qui implique bien que la fonction f est convexe sur cet intervalle.

4. Réponse a.

Explication :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut sans trop de difficultés affirmer que $f(x) = 2e^{-x^2} + 2$ est une quantité positive (strictement) comme somme de deux termes positifs (strictement).

Il vient donc naturellement de ce résultat que toutes les primitives de f sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

5. Réponse d.

Explication :

Soit $x > 0$. On a :

$$f(x) = \frac{2\ln(x)}{3x^2 + 1} = \frac{\ln(x)}{x^2} \times \frac{2}{3 + 1/x^2}$$

Or, par somme et quotient de limites, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3+1/x^2}) = 2/3$.

Et par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

Alors finalement,

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = 0}$$

6. Réponse c.

Explication :

On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^{2x} + e^x - 12 = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors :

$$(\mathcal{E}) \iff X^2 + X - 12 = 0$$

Il suffit donc de chercher les racines de ce polynôme. Ce dernier a pour discriminant :

$$\Delta = 1 + 4 \times 12 \underline{= 49 = 7^2 > 0}$$

Le polynôme admettra donc deux racines :

$$X_1 = \frac{-1-7}{2} = -4 \qquad ; \qquad X_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$$

Il reste alors à FAIRE BIEN ATTENTION ET NE PAS RÉPONDRE TROP VITE !
En effet, on a trouvé au polynôme deux racines réelles, $X_1 = -4$ et $X_2 = 3$. Or, il ne faut pas oublier que $X = e^x$, et on cherche les solutions pour $x \in \mathbb{R}$, il faut donc maintenant revenir de X à x.
Pour cela, on se rappelle qu'une exponentielle est positive, il est donc impossible dans $\mathbb{R}$ d'avoir $e^x = -4$; cela ne nous laisse donc qu'une seule solution, qui peut être trouvée rapidement par bijectivité de l'exponentielle :

$$X_2 = 3 = e^x \implies \boxed{x = \ln(3)}$$

L'équation admet donc une unique solution réelle.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com),
pour le site https://www.sujetdebac.fr/
Compilé le 19 septembre 2022.