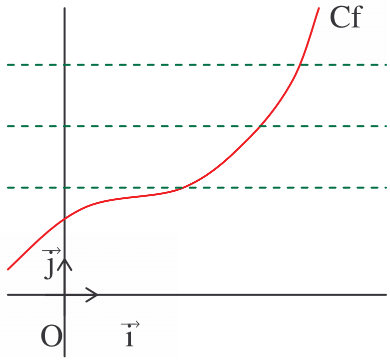
LIMITES DE FONCTIONS

I. LIMITE en $+\infty$ et en $-\infty$

a. Limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle $[\ a\ ;+\infty\ [$
Si « ***f (x) est aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand*** » ,
on dit que *f* a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

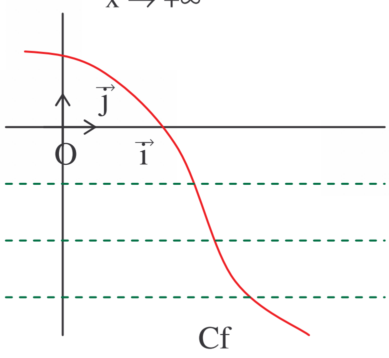


Remarque : On dit aussi que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

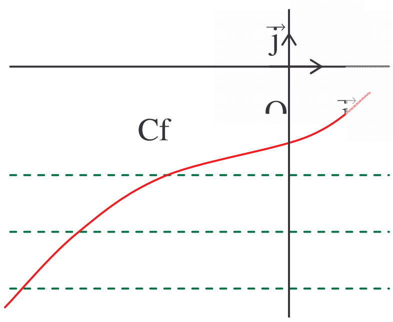
Exemples à connaître : $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

On définit de la même façon …

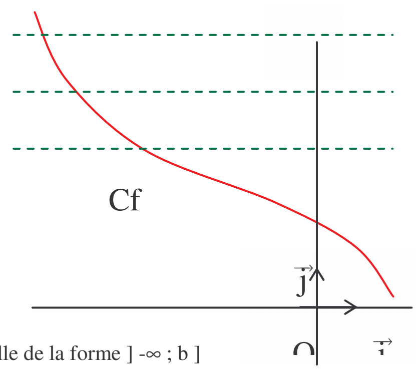
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



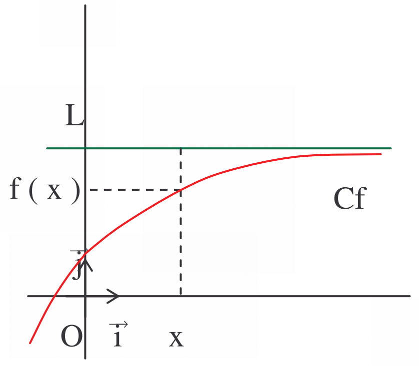
Dans ces deux cas, f est définie sur un intervalle de la forme $]\ -\infty\ ;\ b\ ]$

Exemples à connaître : $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

b. Limite finie en + ∞ et en – ∞ et asymptote horizontale

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- Intuitivement, dire que f a pour limite L en + ∞ , signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers + ∞ , les nombres $f(x)$ viennent s'accumuler autour de L .
  On note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$
- On dit que la droite d'équation y = L est **asymptote horizontale** à la courbe Cf en + ∞ .



Remarques :

- On obtient la même chose en remplaçant + ∞ en – ∞
- Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand x tend vers + ∞ .
  (Par exemple $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \cos x$ …)

Exemples à connaître :

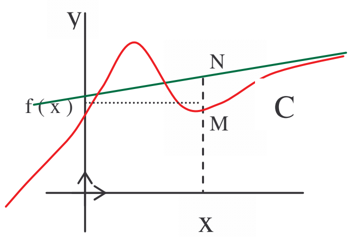
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

c. Asymptote oblique

Soit C la courbe représentant une fonction f dans un repère.
Dire que la droite d'équation y = a x + b est asymptote oblique à C en + ∞ revient à dire que :

$$\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - (ax + b) \,] = 0$$



Remarque : On obtient la même chose en remplaçant + ∞ en – ∞

II. LIMITE en a

a. Limite infinie en a et asymptote verticale

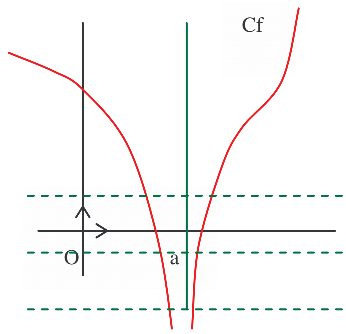
Soit *f* une fonction

- Si *« f (x) est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a »* , on dit que *f* a pour limite $+\infty$ en a et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

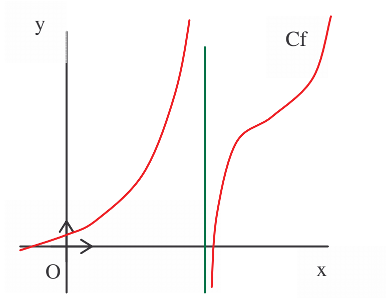
On définit de la même façon $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

- On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe Cf



Remarque :
Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites *« d'un seul côté de a »* .
Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en a** et de **limite à gauche en a** et on note :

$\lim_{x \to a+} f(x)$ et $\lim_{x \to a-} f(x)$ ou encore $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ a



Dans ce cas

$\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$

et $\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty$

Exemples à connaître :

- $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty$, $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

Les courbes représentant ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale .

b. Limite finie en a

Exemples : $\lim_{x \to 3} \sin(3x + 4) = \sin 13$, $\lim_{x \to 4} \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{19}$

III. OPERATION SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableau sont admis.
Pour la plupart d'entre eux , ils sont naturels mais … comme souvent en math, il y a quelques cas particuliers.
Par convention et pour simplifier :

- On note lim f et lim g les limites de f et de g , toutes les deux en a , en + ∞ ou en - ∞
- On note par un point d'interrogation les cas où il n'y a pas de conclusion générale. On dit qu'il s'agit de cas de **formes indéterminées .** Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

a. Limite de k f

lim f	L	+ ∞	- ∞
lim k f (avec k > 0)	k L	+ ∞	- ∞
lim k f (avec k < 0)	k L	- ∞	+ ∞

Exemple : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g : x \longmapsto -\frac{2}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0-} g(x) = -\infty$

b. Limite de f + g

lim f	L	L	L	+ ∞	- ∞	+ ∞
lim g	L'	+ ∞	- ∞	+ ∞	- ∞	- ∞
lim (f + g)	L + L'	+ ∞	- ∞	+ ∞	- ∞	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \longmapsto \sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$.

On a $h = f + g$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto -\frac{2}{x^2}$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

c. Limite de f. g

lim f	L	L > 0	L > 0	L < 0	L < 0	+ ∞	+ ∞	- ∞	0
lim g	L'	+ ∞	- ∞	+ ∞	- ∞	+ ∞	- ∞	- ∞	+/– ∞
lim (f .g)	L × L'	+ ∞	- ∞	- ∞	+ ∞	+ ∞	- ∞	+ ∞	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h : x \longmapsto (x + 2)\sqrt{x}$
On a $h = f \times g$ avec $f : x \longmapsto x + 2$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$
On sait que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$; donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$

d. Limite de f/g

	Cas où la limite de g n'est pas nulle							Cas où la limite de g est nulle				
lim f	L	L	+ ∞	+ ∞	- ∞	- ∞	+/– ∞	L > 0 ou + ∞	L > 0 ou + ∞	L < 0 ou - ∞	L < 0 ou - ∞	0
lim g	L'	+/– ∞	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	+/– ∞	0 +	0 -	0 +	0 -	0
lim f/g	L/L'	0	+ ∞	- ∞	- ∞	+ ∞	?	+ ∞	- ∞	- ∞	+ ∞	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \longmapsto \frac{2x - 4}{\sqrt{x}}$

On a $h = \frac{f}{g}$ ou $f : x \longmapsto 2x - 4$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$

On sait que $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -4$ et $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = 0+$; d'où $\lim\limits_{x \to 0+} h(x) = -\infty$