

Produit scalaire dans l'espace

I) Produit scalaire du plan (rappel)

1) Différentes expressions du produit scalaire

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ (Forme triangulaire)

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$ (Expression trigonométrique)

- Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , si deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \text{ (Expression dans un repère orthonormé)}$$

- Si dans un plan \mathcal{P} , H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \text{ (Expression à l'aide de projections)}$$

2) Propriétés du produit scalaire

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

3) Identités remarquables :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

4) Orthogonalité et produit scalaire

- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$:

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $xx' + yy' = 0$

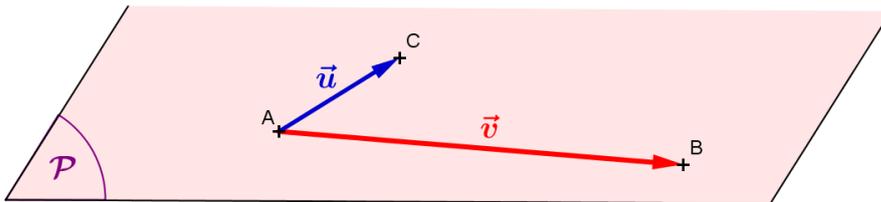
II) Produit scalaire dans l'espace

1) Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace.

Il existe trois points A, B et C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Il existe toujours un plan \mathcal{P} contenant A, B et C.



On appelle produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} dans le plan \mathcal{P} .

Remarque :

En se plaçant dans un plan \mathcal{P} , on retrouve les différentes expressions du produit scalaire excepté l'expression dans un repère du plan)

Les propriétés du produit scalaire restent les mêmes :

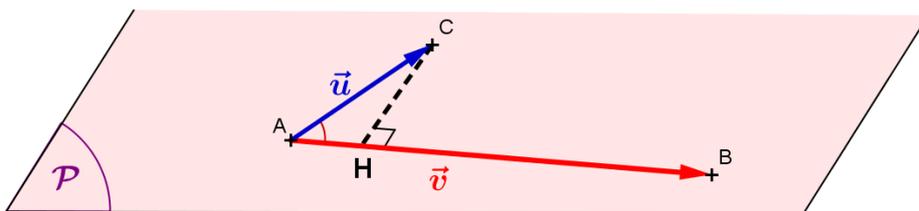
Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls de l'espace on a alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ (Forme triangulaire)

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$ (Expression trigonométrique)

- Si dans un plan \mathcal{P} , H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \quad (\text{Expression à l'aide de projections})$$



2) Expression analytique du produit scalaire

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $(x ; y ; z)$ et $(x' ; y' ; z')$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration: Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, orthonormé de l'Espace : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

alors :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} [(x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2 - (x^2 + y^2 + z^2) - (x'^2 + y'^2 + z'^2)] \\ &= \frac{1}{2} [(x^2 + 2xx' + x'^2) + (y^2 + 2yy' + y'^2) + (z^2 + 2zz' + z'^2) - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2] \\ &= \frac{1}{2} [2xx' + 2yy' + 2zz' + x^2 - x^2 + x'^2 - x'^2 + y^2 - y^2 + y'^2 - y'^2 + z^2 - z^2 + z'^2 - z'^2] \\ &= \frac{1}{2} (2xx' + 2yy' + 2zz') = xx' + yy' + zz' \end{aligned}$$

Donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Remarques:

- Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Exemple : Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(-1 ; 1 ; 2)$ $B(0 ; 1 ; 0)$ et $C(2 ; 0 ; 2)$

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Calculer AB.

Réponse :

a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 0 \times (-1) + (-2) \times 0 = 3$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$$

b) $AB = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

III) Orthogonalité dans l'espace

1) vecteurs orthogonaux

Définition:

Dans l'espace, dire que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls sont orthogonaux signifie que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

Remarque: Par convention le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls de l'espace. Soit A, B et C trois points tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

\vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$:

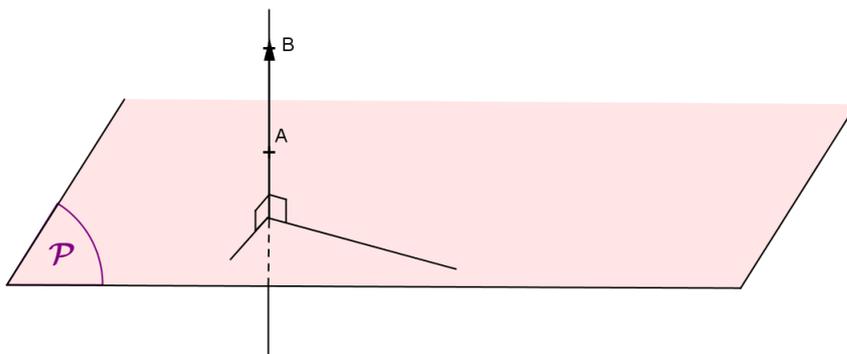
\vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$

Exemple :

$\vec{u}(1; -1; 2)$ $\vec{v}(-1; 1; 1)$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 - 1 + 2 = 0$ Donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

2) vecteur normal à un plan

Un vecteur \overrightarrow{AB} non nul, est normal à un plan \mathcal{P} signifie que la droite (AB) est perpendiculaire à ce plan \mathcal{P} .



Remarque: Tout vecteur \vec{n} non nul colinéaire à \overrightarrow{AB} est aussi un vecteur normal à ce plan \mathcal{P}

3) Théorème de la porte

Si une droite Δ est perpendiculaire en A à deux droites sécantes d'un plan \mathcal{P} , alors elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan.

Démonstration exigible:

Notons \vec{n} un vecteur directeur de Δ et \vec{u}_1 et \vec{u}_2 des vecteurs directeurs respectifs des droites d_1 et d_2 .

Comme Δ est perpendiculaire à d_1 alors on a: $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0$

Comme Δ est perpendiculaire à d_2 alors on a: $\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 0$

Comme les droites d_1 et d_2 sont sécantes en A, les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ne sont pas colinéaires.

Soit d une droite du plan \mathcal{P} , de vecteur directeur \vec{v}

Les vecteurs \vec{v} , \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont donc coplanaires et comme \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ne sont pas colinéaires, il existe deux nombres a et b tel que $\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$

On a alors :

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) = a(\vec{n} \cdot \vec{u}_1) + b(\vec{n} \cdot \vec{u}_2) = 0 \text{ car } \vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 0 \text{ donc}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

Donc Δ est orthogonale à n'importe quelle droite de ce plan \mathcal{P} .

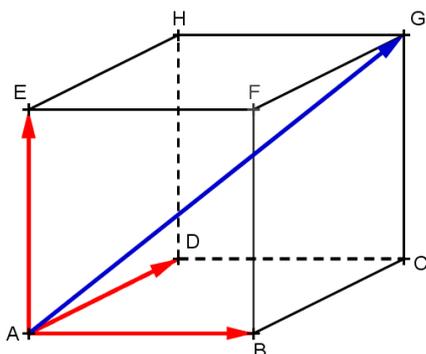
Pour montrer qu'un vecteur \vec{n} non nul est normal à un plan \mathcal{P} , il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs du plan \mathcal{P} non colinéaires.

Remarques:

- Pour montrer qu'une droite (AB) est perpendiculaire à un plan \mathcal{P} , il suffit de montrer que \vec{AB} est un vecteur normal au plan \mathcal{P}
- Pour montrer que deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont perpendiculaires, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Pour montrer que deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Exemple :

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 cm. Montrer que le vecteur \vec{AG} est normal au plan (CFH).



Réponse: Montrons que le vecteur \overrightarrow{AG} est normal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$ les points $F ; G ; H$ et C ont pour coordonnées :

$$F(1; 0; 1) ; G(1; 1; 1) ; H(0; 1; 1) \text{ et } C(1; 1; 0)$$

$$\overrightarrow{AG}(1; 1; 1) ; \overrightarrow{HF}(1; -1; 0) \text{ et } \overrightarrow{FC}(0; 1; -1)$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HF} = 1 - 1 = 0 \text{ et } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FC} = 0 + 1 - 1 = 0$$

Donc \overrightarrow{AG} est orthogonal aux deux vecteurs \overrightarrow{HF} et \overrightarrow{FC} .

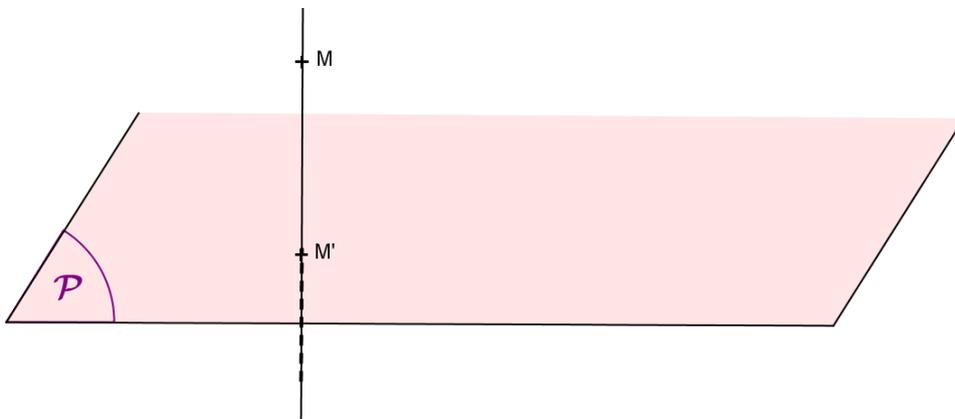
Donc \overrightarrow{AG} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CFH) donc \overrightarrow{AG} est normal au plan (CFH) .

4) Projection orthogonale sur un plan

Définition:

Soit \mathcal{P} un plan et M un point de l'espace.

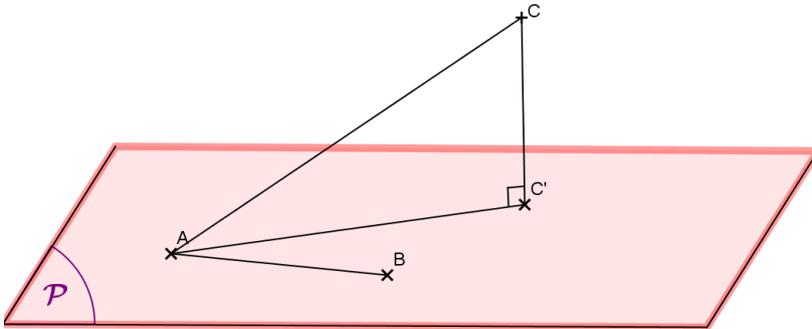
On appelle projeté orthogonal de M sur le plan \mathcal{P} le point M' , intersection de \mathcal{P} et de la droite perpendiculaire à \mathcal{P} passant par M .



Propriété:

Soient A, B et C trois points, \mathcal{P} un plan contenant A et B, C un point de l'espace n'appartenant pas à \mathcal{P} .

On note C' le projeté orthogonal de C sur \mathcal{P} . On a alors : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}'$



Démonstration:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC}' + \overrightarrow{C'C}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}' + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{C'C}$ et \overrightarrow{AB} sont orthogonaux alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C} = 0$ et donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}'$

IV) Equation cartésienne du plan

1) Théorème

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

• tout plan \mathcal{P} de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad d \in \mathbb{R}$$

• Réciproquement si a, b, c sont trois nombres donnés non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration exigible:

Soit \mathcal{P} un plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

• $M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ équivaut à : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\text{équivaut à : } a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

équivalent à : $ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

en posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$

on obtient donc: $ax + by + cz + d = 0$

• Réciproquement, soit $M(x; y; z)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$

Comme les nombres a, b et c ne sont pas tous nul alors on peut supposer que $a \neq 0$.

Dans ce cas, le point A de coordonnées $(-\frac{d}{a}; 0; 0)$ vérifie l'équation :

$ax + by + cz + d = 0$ il appartient donc au plan $ax + by + cz + d = 0$.

En posant $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + \frac{d}{a}) + by + cz = ax + by + cz + d = 0$

Ce qui prouve que le point M appartient au plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

Remarque :

Pour trouver, dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un point A et un vecteur normal \vec{n} , il suffit d'exprimer l'égalité $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ à l'aide des coordonnées de A et de \vec{n}

Exemples :

Exemple 1 : Déterminer une équation cartésienne du plan par un point et un vecteur normal.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé, déterminer le plan \mathcal{P} définie par $A(2; 0; 4)$ et un vecteur normal $\vec{n}(1; 3; -3)$

Réponse : On connaît $\vec{n}(1; 3; -3)$ qui est un vecteur normal à \mathcal{P} donc \mathcal{P} a une équation de la forme :

$x + 3y - 3z + d = 0$ Comme ce plan passe par le point $A(2; 0; 4)$ alors

$$2 - 12 + d = 0 \quad \mathbf{d = 10}$$

\mathcal{P} a donc pour équation $x + 3y - 3z + 10 = 0$

Exemple 2: Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points A et B ont respectivement pour coordonnées : $A(3; -2; 2)$ et $B(6; 1; 5)$

Déterminer l'équation du plan passant par A perpendiculaire à (AB)

Réponse :

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{P} donc \mathcal{P} a une équation de la forme :

$$3x + 3y + 3z + d = 0$$

Comme il passe par le point A, on obtient :

$$9 - 6 + 6 + d = 0 \text{ donc } d = -9$$

L'équation du plan est : $3x + 3y + 3z - 9 = 0$

Exemple 3: Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points A ; B et C ont respectivement pour coordonnées : A (2 ; -4 ; 8) B(-4 ; -12 ; 10) et C(-8 ; 0 ; -6)

Déterminer l'équation du plan passant par les points A ; B et C

Réponse :

$\vec{AB}(-6; -8; 2)$; $\vec{AC}(-10; 4; -14)$ Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc il n'existe pas de nombre k tel que $\vec{AC} = k\vec{AB}$, les points A ; B et C ne sont pas alignés.

Soit \vec{n} un vecteur normal à \mathcal{P} de coordonnées : $\vec{n}(x; y; z)$ alors \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = -6x - 8y + 2z = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = -10x + 4y - 14z = 0$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} -6x - 8y + 2z = 0 \\ -10x + 4y - 14z = 0 \end{cases} \text{ en multipliant la 2}^{\text{ème}} \text{ par ligne par 2 on obtient le système équivalent:}$$

$$\begin{cases} -6x - 8y + 2z = 0 \\ -20x + 8y - 28z = 0 \end{cases} \text{ en additionnant les deux lignes on obtient le système équivalent :}$$

$$\begin{cases} -6x - 8y + 2z = 0 \\ -26x - 26z = 0 \end{cases} \text{ on obtient donc :}$$

$$\begin{cases} -6x - 8y + 2z = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

En remplace x par $-z$ dans la 1ère équation :

$$6z - 8y + 2z = 0$$

$$8z - 8y = 0 \text{ donc } y = z$$

Donc le vecteur \vec{n} est de la forme : $\vec{n}(-z; z; z)$

Nous pouvons prendre $\vec{n}(-1; 1; 1)$ Donc l'équation du plan \mathcal{P} est de la forme :

$$-x + y + z + d = 0 \text{ Comme } A \in \mathcal{P} \text{ on en déduit : } -2 - 4 + 8 + d = 0$$

$$d = -2$$

L'équation du plan \mathcal{P} est donc : $-x + y + z - 2 = 0$

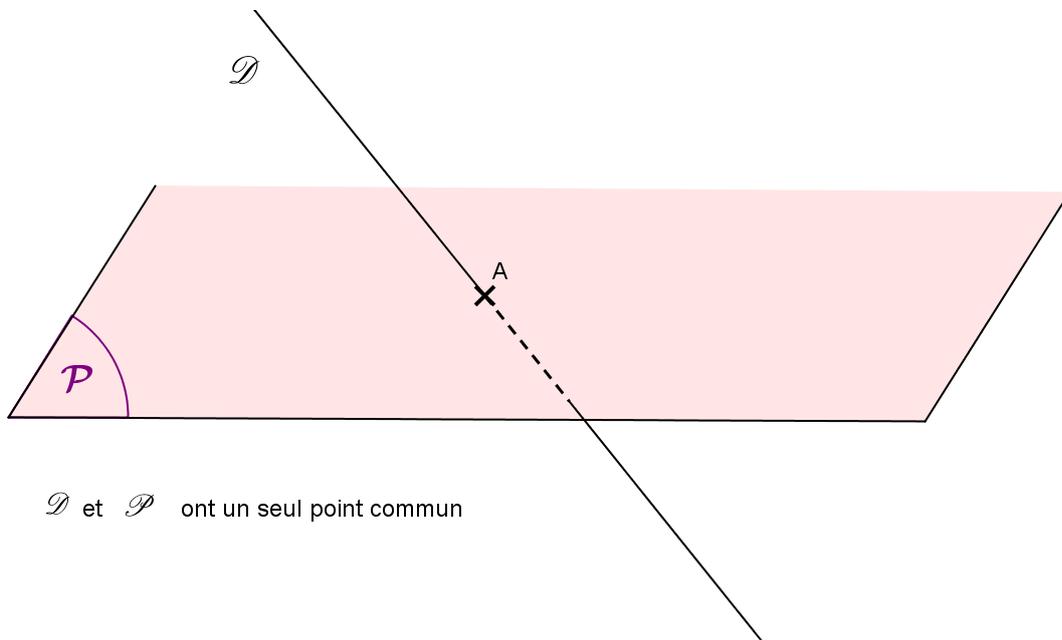
2) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Si \mathcal{D} est une droite de vecteur directeur \vec{u} et \mathcal{P} un plan de vecteur normal \vec{n} :

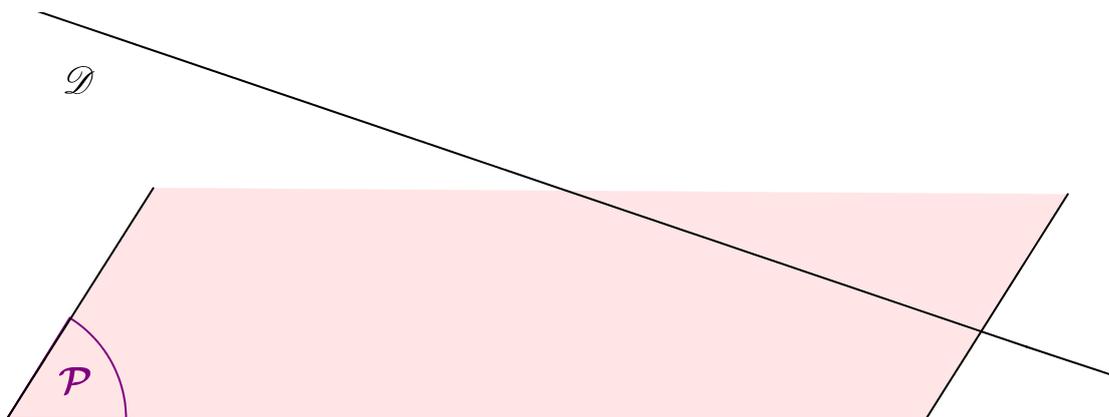
- Si $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$ alors \mathcal{P} et \mathcal{D} sont sécants en un point.
- Si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ alors la droite \mathcal{D} est strictement parallèle à \mathcal{P} ou incluse dans \mathcal{P} :

A étant un point quelconque de \mathcal{D} :

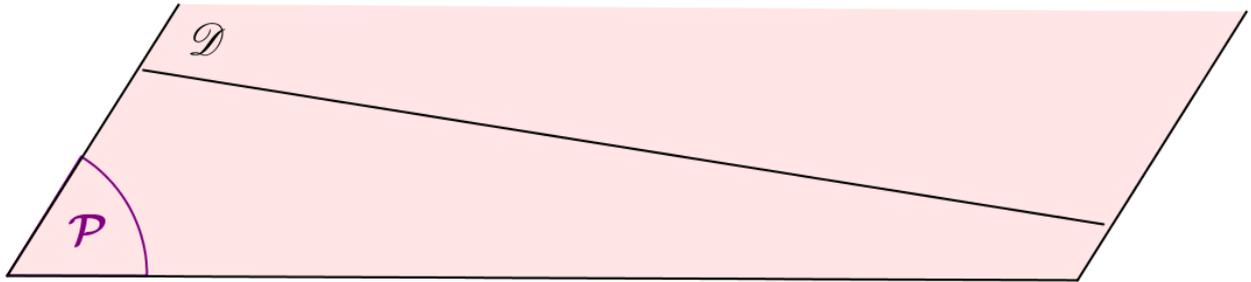
- Si $A \in \mathcal{P}$ alors la droite \mathcal{D} est incluse dans le plan
- Si $A \notin \mathcal{P}$ alors la droite \mathcal{D} est strictement parallèle au plan \mathcal{P}



\mathcal{D} et \mathcal{P} ont un seul point commun



\mathcal{D} et \mathcal{P} n'ont aucun point commun



\mathcal{D} est incluse dans \mathcal{P}

Exemples:

Exemple 1: Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, étudier la position relative du plan \mathcal{P} d'équation : $4x - 2y + 6z - 4 = 0$ et de la droite \mathcal{D} d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Réponse :

$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{P} et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} .

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 4 - 2 + 12 = 14 \neq 0$$

Donc \mathcal{P} et \mathcal{D} sont sécants en un point et ce point vérifie :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{on a donc : } 4(-2 + t) - 2(1 + t) + 6 \times 2t - 4 = 0$$

$$-8 + 4t - 2 - 2t + 12t - 4 = 0$$

$$14t - 14 = 0 \text{ donc } t = 1$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} x = -2 + 1 \\ y = 1 + 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

\mathcal{P} et \mathcal{D} sont sécants au point **A(-1 ; 2 ; 2)**

Exemple 2: Le plan \mathcal{P} d'équation $2x - y + z - 8 = 0$ et la droite \mathcal{D} passant par les points

A(3 ; -1 ; 0) et B(1 ; 1 ; -1) se coupent en un point I dont on calculera les coordonnées :

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{P} .

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -5$ donc \overrightarrow{AB} et \mathcal{P} sont sécants

$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \end{cases}$ est une équation paramétrique de \mathcal{D} . Le point d'intersection vérifie l'équation :

$$2(1 - 2t) - 1 + (-1 - t) - 8 = 0$$

$-5t - 8 = 0$ et donc $t = \frac{-8}{5}$ on obtient donc :

$\begin{cases} x = \frac{21}{5} \\ y = 1 \\ z = \frac{3}{5} \end{cases}$ Les coordonnées du point I sont $(\frac{21}{5} ; 1 ; \frac{3}{5})$

3) Positions relatives de deux plans

\mathcal{P} est un plan de vecteur normal \vec{n} et \mathcal{P}' est un plan de vecteur normal \vec{n}' :

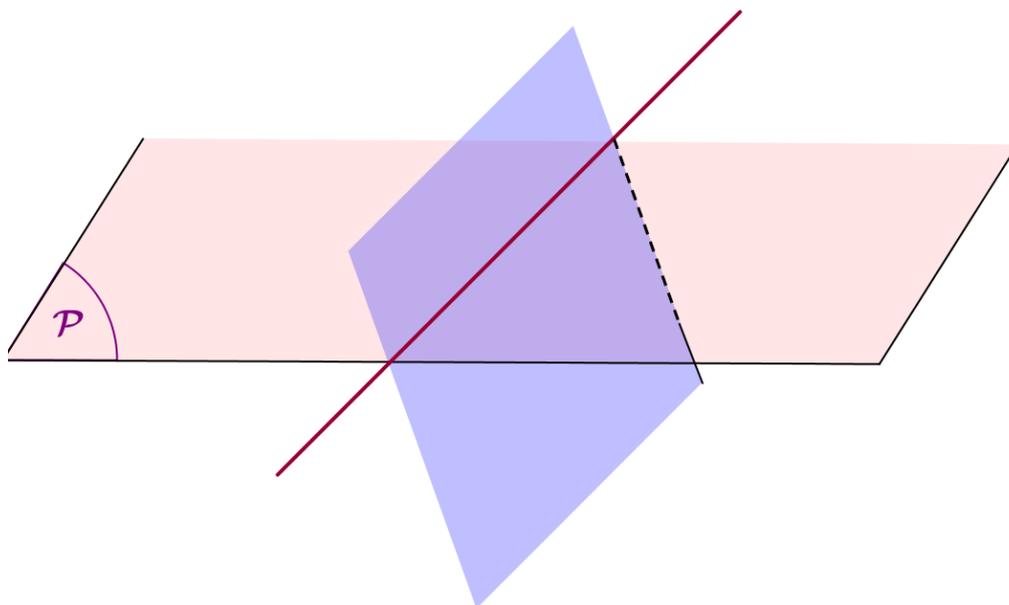
• Si \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont strictement parallèles ou confondus

A étant un point quelconque de \mathcal{P} alors :

- Si $A \in \mathcal{P}'$ alors les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont confondus.

- Si $A \notin \mathcal{P}'$ alors les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont strictement parallèles.

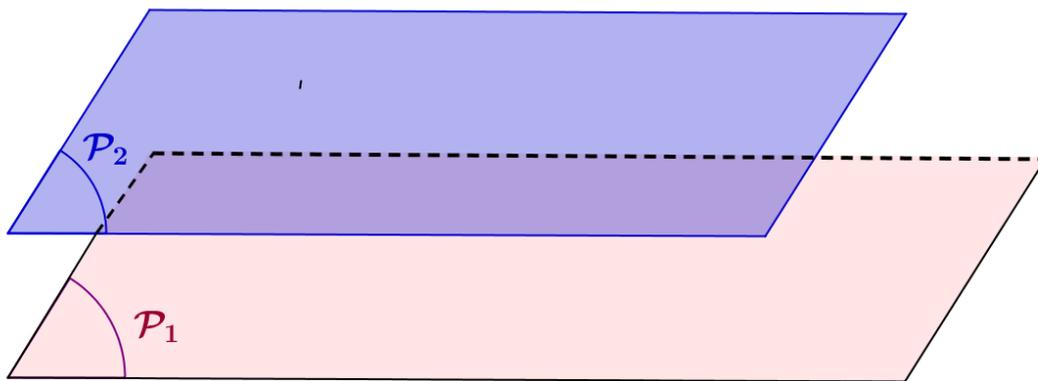
• Si \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires alors les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants leur intersection est une droite \mathcal{D} .



Leur intersection est la droite \mathcal{D}



Leur intersection est un plan



Leur intersection est vide

Exemples:

Exemple 1: Soient \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans d'équation respectifs :

$$\mathcal{P} : 2x + 2y - 2z + 4 = 0 \text{ et } \mathcal{P}' : 6x + 2y + 2z + 8 = 0$$

Déterminer une équation paramétrique de leur droite d'intersection \mathcal{D} .

Réponse :

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{P} et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{P}'

\vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires donc \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants.

Soit $M(x; y; z)$ appartenant à la droite \mathcal{D} , intersection des deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' , vérifie le système :

(S) $\begin{cases} 2x + 2y - 2z + 4 = 0 \\ 6x + 2y + 2z + 8 = 0 \end{cases}$ On soustrait la 1^{ère} ligne à la 2^{ème}, on obtient le système équivalent :

(S') $\begin{cases} 2x + 2y - 2z + 4 = 0 \\ 4x + 4z + 4 = 0 \end{cases}$ on obtient le système équivalent :

(S'') $\begin{cases} 2x + 2y - 2z + 4 = 0 \\ z = -x - 1 \end{cases}$

En remplaçant la valeur de z dans la 1^{ère} équation on obtient:

$$2x + 2y - 2(-x - 1) + 4 = 0$$

$$2x + 2y + 2x + 2 + 4 = 0$$

$$2y = -4x - 6$$

$$2y = -2x - 3$$

x prend toutes les valeurs de \mathbb{R} .

En posant $x = t$ il en résulte :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t - 3 \\ z = -t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

C'est l'équation paramétrique de la droite \mathcal{D} intersection des deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' .

Exemple 3: Déterminer l'équation du plan \mathcal{P}' parallèle au plan \mathcal{P} d'équation $3x - 2y + 4z - 2 = 0$ et passant par le point $A(2; -1; 4)$

$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à \mathcal{P} qui est aussi normal à \mathcal{P}'

\mathcal{P}' a une équation de la forme :

$$3x - 2y + 4z + d = 0 \text{ comme il passe par le point } A(2; -1; 4)$$

$$6 + 2 + 16 + d = 0 \text{ donc } d = -24$$

Donc \mathcal{P}' a pour équation : $3x - 2y + 4z - 24 = 0$