1 Fonction convexe, fonction concave

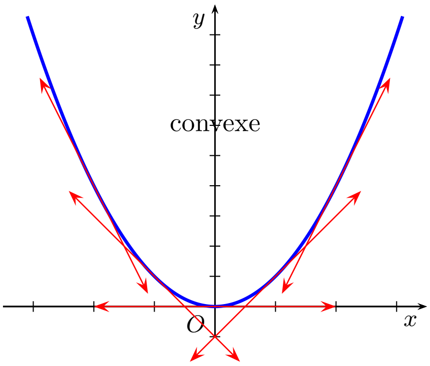
Définition 1.

Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite :

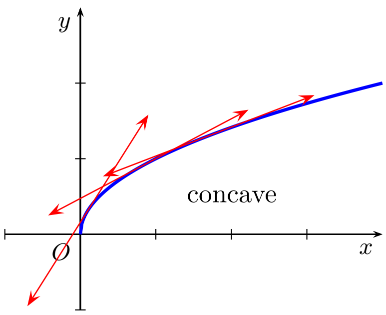
- **convexe** sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- **concave** sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située en desosus de chacune de ses tangentes.

Remarque.
f convexe $\Longleftrightarrow$ tout segment reliant deux points de la courbe est au-dessus de la courbe

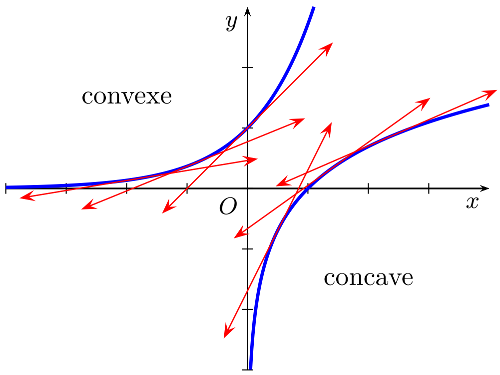
Exemple 2
Parmi les fonctions usuelles, on a :



fonction $x \longmapsto x^2$



fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$



fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto \ln x$

2 Lien avec la dérivée

Proriété 3.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, de dérivée f'. Alors :

- f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur I ;
- f est concave sur I si, et seulement si, f' est décroissante sur I.

Conséquence :
Si f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I :

- si la dérivée seconde est positive, alors la fonction f est convexe ;
- si la dérivée seconde est négative, alors la fonction f est concave.

x	a		x_0		b
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		↘		↗	
		concave		convexe	

Exemple 4
Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2$.
On a successivement : $f'(x) = 3x^2 - 6x$ puis $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$.
Or, $6(x-1) > 0 \Longleftrightarrow x > 1$ et $6(x-1) < 0 \Longleftrightarrow x < 1$, d'où :
f est concave sur $]-\infty\,;1]$ et convexe sur $[1\,;+\infty[$.