Analyse combinatoire et probabilités - Exercices et corrigés

Michel Semon

www.phymaths.ch

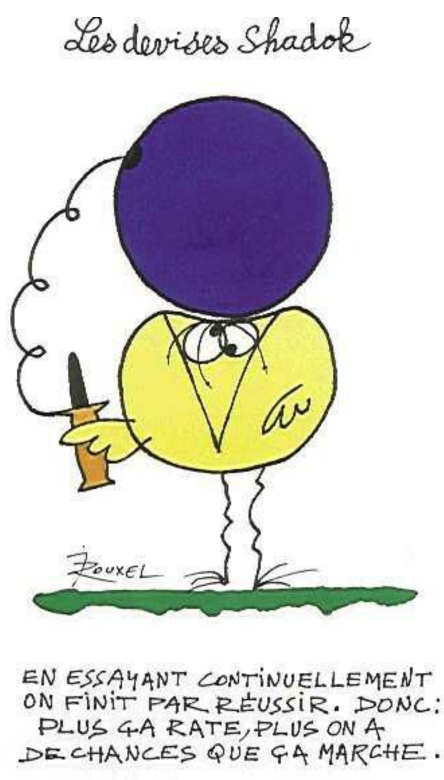

Table des matières

1 Introduction

Avant tout une petite explication au sujet du choix du petit dessin de la page de titre. Beaucoup de mes élèves n'aiment pas du tout, mais alors pas du tout les probabilités ! C'est donc pour eux et tous ceux qui pensent qu'ils n'y arriveront jamais.
Les probabilités sont un sujet un peu à part dans l'étude des mathématiques. Le sujet semble facile au premier abord, mais ce n'est qu'une apparence. L'étude paraît pouvoir se faire en utilisant son intuition, car beaucoup de problèmes traduisent des situations quotidiennes. Cependant au fur et à mesure un besoin de structuration se fait sentir et certaines notions de base (analyse combinatoire et algèbre de Boole) deviennent vite nécessaires.
Je me suis longtemps demandé si il fallait essayer de classer les exercices de probabilité ou d'analyse combinatoire en catégories distinctes. Je me suis vite rendu compte que ceci est plus embrouillant qu'utile. C'est un sujet vraiment difficile et la seule manière de le cerner est de faire beaucoup d'exercices. J'ai donc décidé de ne faire qu'une seule distinction en séparant les exercices d'analyse combinatoire de ceux de probabilité.
Le présent recueil contient plus d'une centaine de problèmes très divers. Ils sont tirés de différents livres de référence, de séries d'exercices que mes élèves ont reçues ces dernières années, d'examens de maturité et d'exemples que j'ai retrouvés dans mes notes de cours [1]. Quelques exercices ont étés traduits ou inspirés du cours de Joe Blitzstein "Statistic 110 : Probability" de l'université de Harvard et d'autres de "Physique statistique stat-340" de André-Marie Trembley, Université de Sherbrooke.
Les exercices précédés d'un **M** dans la table des matières sont des exercices donnés en classe de maturité des gymnases suisses romands durant ces dernières années aux examens de maturités (niveaux standard et renforcé). Cela ne veut pas dire qu'ils sont plus difficiles ou plus faciles que les autres. Je les ai signalés simplement pour information.

2 Enoncés

2.1 Analyse combinatoire (dénombrement)

2.1.1 Exercice M-Un cadenas à numéros a trois roues...

Un cadenas à numéros a trois roues ; chacune porte les numéros 0 à 9. Combien de "nombres" secrets y a-t-il ?
Solution

2.1.2 Exercice M-D'un jeu de 52 cartes, on tire...

D'un jeu de 52 cartes, on tire deux cartes simultanément (sans remise). De combien de manières différentes est-ce possible ?
Solution

2.1.3 Exercice M-Combien de nombres différents de 6 chiffres...

Combien de nombres différents de 6 chiffres existe-t-il

a) Si il n'y a aucune restriction ?

b) Si les nombres doivent être divisibles par 5 ?

c) si les répétitions de chiffres sont exclues ?

Solution

1. Le support de cours était le livre de Sheldon Ross, *Initiations aux probabilités*

2.1.4 Exercice M-De combien de manières peut-on arranger 5 personnes...

De combien de manières peut-on arranger 5 personnes

a) sur une ligne ?

b) Autour d'une table ronde ? (seulement la position relative des uns vis-à-vis des autres importe).

Solution

2.1.5 Exercice Combien de mots de 10 lettres...

Combien de mots de 10 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet si

a) on utilise chaque lettre une seule fois,

b) on peut réutiliser les lettres.

Solution

2.1.6 Exercice La façade d'une maison compte 8 fenêtres...

La façade d'une maison compte 8 fenêtres, ces fenêtres peuvent être soit ouvertes soit fermées.

a) De combien de manières différentes peut se présenter cette façade ?

b) Même question si on considère que chaque fenêtre a deux battants ?

c) Qu'en est-il si la première fenêtre est toujours ouverte et la 6e toujours fermée (fenêtres complètes, on n'oublie les battants).

Solution

2.1.7 Exercice Combien de couples de valeurs obtient-on...

Combien de couples de valeurs obtient-on en lançant deux dés de couleurs différentes ?

Solution

2.1.8 Exercice Le nombre d'atomes dans l'univers visible...

Le nombre d'atomes dans l'univers visible est estimé à 10^{80}. Combien de cartes différentes devraient contenir un jeu pour que le nombre des permutations possibles dépasse cette valeur "énorme" ?

Indication

2.1.9 Exercice Dans un groupe il y a 10 hommes, 8 femmes...

Dans un groupe il y a 10 hommes, 8 femmes et 7 enfants. De combien de manières différentes peut-on les placer sur une ligne si

a) ils peuvent se placer librement ?

b) Les hommes désirent rester groupés ?

Solution

2.1.10 Exercice M. Jones va disposer 10 livres...

M. Jones va disposer 10 livres sur un rayon de sa bibliothèque. Quatre d'entre eux sont des livres de mathématiques, trois de chimie, deux d'histoire et un de langue. Jones aimerait ranger ses livres de façon que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Solution

2.1.11 Exercice Soit le mot mississippi ...

Soit le mot mississippi (figure 1), combien de permutations différentes obtient-on si

a) on ne tient compte ni de la casse (majuscules, minuscules) ni des couleurs ?

b) On tient compte de la casse et des couleurs ?

FIGURE 1 –

Solution

2.1.12 Exercice Combien de nombres différents...

Combien de nombres différents peut-on écrire avec les chiffres 3,3,5,0 ?
Solution

2.1.13 Exercice De combien de manières différentes peut-on gagner à l'euro-million...

De combien de manières différentes peut-on gagner à l'euro-million ? Il faut choisir 5 numéros parmi 50 et 2 étoiles numérotées parmi 11.
Solution

2.1.14 Exercice Une boîte contient 12 boules, 3 rouges,...

Une boîte contient 12 boules : 3 rouges, 4 bleus et 5 jaunes. On tire simultanément 3 boules. Combien de combinaisons différentes existe-t-il si on désire avoir une boule de chaque couleur ?
Solution

2.1.15 Exercice À partir d'un groupe de 5 femmes et de 7 hommes...

À partir d'un groupe de 5 femmes et de 7 hommes, combien de comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes peut-on former ? Qu'en est-il si 2 des hommes s'entendent mal et refusent de siéger simultanément au comité ?
Solution

2.1.16 Exercice Un groupe de 12 personnes doit être partagé en ...

Un groupe de 12 personnes doit être partagé en 2 groupes de 6 personnes. Un groupe partira en Indes et l'autre en Australie. Combien y a-t-il de manières d'organiser les voyages ?
Solution

2.1.17 Exercice De combien de manières peut-on asseoir ...

De combien de manières peut-on asseoir sur une ligne 4 garçons et 3 filles ? Qu'en est-il

a) si les garçons doivent rester ensembles et les filles aussi ?

b) Si seuls les garçons doivent rester ensemble ?

c) Si deux personnes du même sexe ne doivent jamais voisiner ?

Solution

2.1.18 Exercice Un enfant possède 12 cahiers : 6 noirs, 4 rouges...

Un enfant possède 12 cahiers : 6 noirs, 4 rouges, 1 blanc et 1 bleu. S'il tient à placer tous les noirs les uns derrière les autres, de combien de manières peut-il placer ses cahiers ?
Solution

2.1.19 Exercice On considère un groupe de 20 personnes....

On considère un groupe de 20 personnes. Si chaque personne serre la main de toutes les autres, combien y a-t-il de poignées de main ?
Solution

2.1.20 Exercice On veut former un comité de 7 personnes,...

On veut former un comité de 7 personnes, dont 2 républicains, 2 démocrates et 3 indépendants. On a le choix parmi les 5 républicains, 6 démocrates et 4 indépendants. De combien de manières peut-on procéder ?
Solution

2.1.21 Exercice Pour une partie de bridge ...

Pour une partie de bridge chacun des 4 joueurs reçoit 13 cartes. Le jeu en compte 52. Combien y a-t-il de donnes possibles ?
Solution

2.1.22 Exercice Si 8 tableaux noirs doivent être affectés à 4 écoles...

Si 8 tableaux noirs doivent être affectés à 4 écoles, de combien de manières peut-on les répartir ? Qu'en est-il si chaque école doit recevoir au moins un tableau ? (Les tableaux noirs sont indiscernables)
Solution

2.1.23 Exercice Un ascenseur quitte le rez-de-chaussée avec 8 personnes..

Un ascenseur quitte le rez-de-chaussée avec 8 personnes (liftier non compris). Lorsqu'il repart du 6e étage, il est vide.

a) De combien de manières le liftier a-t-il pu percevoir le départ des 8 personnes si pour lui elles se ressemblent toutes ?

b) Qu'en est-il s'il peut faire la différence entre un homme et une femme, l'ascenseur contenant 5 hommes et 3 femmes au départ ?

c) Que se passe-t-il si pour lui, chaque personne est discernable ?
Solution

2.1.24 Exercice Fournir un argument d'analyse combinatoire...

Fournir un argument d'analyse combinatoire pour expliquer que

$$C_p^n = C_{n-p}^n = C_{n-p,p}^n$$

Solution

2.1.25 Exercice Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions...

Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen.

a) De combien de manières peut-il les choisir ?

b) Même question s'il est obligé de choisir au moins 3 des 5 premières questions ?

Solution

2.1.26 Exercice Huit nouveaux professeurs vont être...

Huit nouveaux professeurs vont être envoyés dans 4 écoles (les professeurs et les écoles sont discernables).

a) Combien y a-t-il d'affectations possibles ?

b) Qu'en est-il si l'on impose que chaque école recevra deux professeurs ?

Solution

2.1.27 Exercice M-Combien de séquences différentes...

a) Combien de séquences différentes peut-on lire sur un compteur kilométrique de voiture, ce compteur étant composé de 6 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9 ?

b) Parmi les configurations ci-dessus, quel est le nombre de celles où figure exactement trois fois le chiffre 5 ?

c) Même question, mais où figure au moins trois fois le chiffre 5.

d) Même question, mais où figure au moins une fois le chiffre 5.

Solution

2.1.28 Exercice M-Une classe de l'école de Nyon a reçu...

Une classe de l'école de Nyon a reçu 4 billets pour le cirque Knie. Sachant que cette classe est composée de 19 élèves, calculer le nombre de façons de distribuer ces 4 billets dans chacun des cas suivants :

a) les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet ;

b) les billets sont numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billets ;

c) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet.

Solution

2.1.29 Exercice M-Les douze tomes d'une encyclopédie...

Les douze tomes d'une encyclopédie sont rangés au hasard.

a) Combien y a-t-il de manières de les classer ?

b) Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte (dans cet ordre) ?

c) Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte ?

Solution

2.1.30 Exercice M-Il y a quelques années, chaque classe de gymnase...

Il y a quelques années, chaque classe de gymnase devait avoir une délégation de trois élèves (un laveur de tableaux, un chef et un sous-fifre). Une classe est composée de 11 filles et 3 garçons.

a) Combien y a-t-il de délégations possibles ?

b) Combien y a-t-il de délégations si le laveur de tableaux doit être un garçon ?

c) Combien y a-t-il de délégations possibles si les deux sexes doivent être présents dans la délégation ?

d) Voilà une variante du problème : supposons que chacun des délégués doit avoir un suppléant. Combien y a-t-il de délégations possibles si le délégué et le suppléant doivent être de sexe différent.

Solution

2.1.31 Exercice M-Une maîtresse de maison a onze amis ...

Une maîtresse de maison a onze amis très proches. Elle souhaite en inviter cinq à dîner.

a) Combien de groupes différents d'invités y a-t-il ?

b) Combien de possibilités y a-t-il si deux d'entre eux sont mariés et ne peuvent venir qu'ensemble ?

c) Combien de possibilités y a-t-il si deux d' eux sont en mauvais terme et ne peuvent pas être invités ensemble ?

Solution

2.1.32 Exercice De combien de manières peut-on partager

a) De combien de manières peut-on partager 12 personnes en trois groupes, un groupe de 2 et deux groupes de 5 ?

b) Idem que a) mais avec trois groupes de 4 personnes ?

Solution

2.2 Probabilités

2.2.1 Exercice M-Une urne contient 12 boules : 3 rouges, 4 bleues...

Une urne contient 12 boules : 3 rouges, 4 bleues et 5 jaunes. On tire simultanément 3 boules. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A="les trois boules sont rouges" ;

b) B="on a tiré une boule de chaque couleur" ;

c) C="aucune des trois boules n'est rouge" ;

d) D="au moins une des trois boules est rouge" ;

e) E="au moins une des trois boules est bleue" ;

f) F="au plus une des trois boules est bleue" ;

Solution

2.2.2 Exercice M-D'un jeu de 52 cartes, on tire 5 cartes...

D'un jeu de 52 cartes, on tire 5 cartes sans remise. Quelle est la probabilité de tirer

a) 5 coeurs ?

b) 2 piques et 3 coeurs ?

c) 5 trèfles ou 5 coeurs ?

d) 5 cartes de la même couleur (pique, coeur, carreau, trèfle) ?

e) 3 cartes d'une couleur et 2 d'une autre ?

f) les 4 as et une autre carte ?

Solution

2.2.3 Exercice M-De 25 calculatrices, 5 ont un défaut...

De 25 calculatrices, 5 ont un défaut. On en choisit 4 de manière aléatoire. Quelle est la probabilité qu'aucune des 4 calculatrices soit défectueuse ?
Solution

2.2.4 Exercice M-On sélectionne un échantillon ordonné...

On sélectionne un échantillon ordonné de taille 3 d'un ensemble de 26 jetons sur lesquels figurent les lettres de l'alphabet. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A = "ce sont 3 consonnes" ;

b) B = "ce sont 3 voyelles" ;

c) C = "c'est le mot MOI" ;

d) D = "c'est un anagramme du mot MOI".

Solution

2.2.5 Exercice M-On tire 10 fois de suite à pile ou face...

On tire 10 fois de suite à pile ou face avec une pièce de monnaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 fois face et 6 fois pile ?
Solution

2.2.6 Exercice M-Dans une assemblée de 400 personnes,...

Dans une assemblée de 400 personnes, 300 comprennent le français, 200 l'allemand, 90 l'anglais. 160 comprennent le français et l'allemand, 60 le français et l'anglais, 20 l'allemand mais ni l'anglais ni le français et 20 comprennent les trois langues. On choisit une personne au hasard dans cette assemblée. Quelle est la probabilité que cette personne comprenne

a) exactement deux des trois langues ?

b) Au moins une des trois langues ?

Solution

2.2.7 Exercice M-Une télé fabriquée en très grande série...

Une télé fabriquée en très grande série peut être défectueuse à cause de deux défauts différents désignés par A et B, 10% des appareils ont le défaut A, 8% ont le défaut B et 4% les deux défauts simultanément. Un client achète l'un des appareils produits.

a) Quelle est la probabilité que l'appareil soit sans défaut ?

b) Quelle est la probabilité que l'appareil ne présente que le défaut A ?

c) Quelle est la probabilité que l'appareil ne présente que le défaut B ?

Solution

2.2.8 Exercice M-Une agence de voyage fait un sondage statistique...

Une agence de voyage fait un sondage statistique sur la connaissance de trois pays A, B, C : l'Australie, la Belgique et le Canada. On constate que parmi les personnes interrogées, 42% connaissent A, 55% connaissent B, 34% connaissent C, 18% connaissent A et B, 10% connaissent A et C, 15% connaissent B et C, 8% connaissent les trois pays. Un voyage est prévu pour l'une des personnes ayant répondu au sondage. On tire au sort le gagnant. Quelle est la probabilité pour que le gagnant soit une personne :

a) connaissant au moins l'un de ces trois pays ?

b) ne connaissant aucun de ces trois pays ?

c) connaissant exactement deux des trois pays ?

d) connaissant A, mais ne connaissant ni B, ni C ?

e) connaissant A et B mais ne connaissant pas C ?

Solution

2.2.9 Exercice On possède une cage avec 35 lapins et 4 hamsters...

On possède une cage avec 35 lapins et 4 hamsters, on sort simultanément 3 animaux, quelles sont les probabilités d'avoir...

a) au moins 1 lapin ?

b) exactement 1 lapin ?

c) d'avoir 3 hamsters ?

Solution

2.2.10 Exercice Soit un jeu de 52 cartes à jouer...

Soit un jeu de 52 cartes à jouer, on tire 5 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir une suite (les cartes se suivent, mais n'ont pas toutes de la même couleur) ?
Remarque : Une suite dont les cartes ont la même couleur est une suite royale.

Solution

2.2.11 Exercice Un comité de 5 personnes...

Un comité de 5 personnes doit être choisi parmi 20 hommes et 5 femmes, quelle est la probabilité

a) qu'il se compose de 5 femmes ?

b) qu'il se compose de 4 hommes et 1 femme ?

Solution

2.2.12 Exercice Dans une partie de carte, on distribue...

Dans une partie de carte, on distribue les 36 cartes du jeu à 4 joueurs.

a) Quelle est la probabilité qu'un joueur reçoive tous les coeurs ?

b) Quelle est la probabilité que chaque joueur reçoive un roi ?

Solution

2.2.13 Exercice Combien de personnes faut-il réunir...

Combien de personnes faut-il réunir pour que la probabilité, que deux d'entre elles soient nées le même jour dépasse 50% ? Solution

2.2.14 Exercice Un magasin accepte les cartes de crédit...

Un magasin accepte les cartes de crédit American Express ou VISA. 24% de ses clients possèdent une carte American Express, 61% une carte VISA et 11% possèdent les deux. Quel est le pourcentage de clients possédant une carte de crédit acceptée par le magasin ? Solution

2.2.15 Exercice 60% des élèves d'une école ne portent...

60% des élèves d'une école ne portent ni bague ni collier. 20% portent une bague et 30% ont un collier. Si un des élèves est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il porte :

a) une bague ou un collier ?

b) une bague et un collier ?

Solution

2.2.16 Exercice Une école propose trois cours de langue...

Une école propose trois cours de langue : un en espagnol, un en français et un en allemand. Ces cours sont ouverts aux 100 élèves de l'école. Il y a 28 étudiants en espagnol, 26 en français et 16 en allemand. Il y a 12 étudiants qui suivent l'espagnol et le français, 4 qui suivent l'espagnol et l'allemand et 6 qui étudient le français et l'allemand. De plus, 2 élèves suivent les trois cours.

a) Si un élève est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il suive exactement un cours de langue ?

b) Si un élève est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il ne fasse partie d'aucun de ces cours ?

c) Si deux élèves sont choisis au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins un des deux suive un cours de langue ?

Solution

2.2.17 Exercice Après une soirée bien arrosée...

Après une soirée bien arrosée, Jules arrive devant sa porte avec son trousseau de 10 clefs qu'il ne peut plus distinguer. Calculer

a) La probabilité qu'exactement la sixième soit la bonne.

b) Qu'il puisse ouvrir sa porte lors des trois premières tentatives.

Solution

2.2.18 Exercice Huit tours sont disposées au hasard ...

Huit tours sont disposées au hasard sur un jeu d'échec. Calculer la probabilité qu'aucune ne puisse en prendre une autre.

Solution

2.2.19 Exercice On jette une paire de dés équilibrés...

On jette une paire de dés équilibrés. Avec quelle probabilité la valeur du résultat du deuxième dé est-elle plus grande que celle du premier ?

Solution

2.2.20 Exercice Une urne contient cinq boules rouges...

Une urne contient cinq boules rouges, six bleues et huit vertes. Si un groupe de trois boules est tiré au hasard, quelle est la probabilité que celles-ci soient

a) toutes de la même couleur ?

b) toutes de couleurs différentes ?

Solution

2.2.21 Exercice Une boîte contient n boules rouges ...

Une boîte contient n boules rouges et m boules bleues. On tire deux boules au hasard,

a) quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur ?

b) même question si on effectue le tirage avec remise ?

c) Démontrer que la probabilité b) est plus grande que a).

Solution

2.2.22 Exercice Une réserve clôturée abrite vingt cerfs...

Une réserve clôturée abrite vingt cerfs. Cinq sont capturés, marqués et relâchés. Un peu plus tard, quatre sont à nouveau capturés. Quelle est la probabilité que deux d'entre eux soient marqués ?

Solution

2.2.23 Exercice Le second Comte de Yarborough paria à 1000 contre 1...

Le second Comte de Yarborough paria à 1000 contre 1 qu'une main de 13 cartes au bridge contiendrait au moins un 10 ou une carte de valeur supérieure (c.-à-d. un dix, un valet, une reine, un roi ou un as). Aujourd'hui, on appelle une main qui n'a pas de carte supérieure à 9 une Yarborough. Quelle est la probabilité qu'au bridge, une main sélectionnée au hasard soit une Yarborough ?

Solution

2.2.24 Exercice Une ville compte cinq hôtels...

Une ville compte cinq hôtels. Si lors d'une journée trois personnes louent une chambre, quelle est la probabilité qu'elles le fassent dans trois hôtels différents ? Quelles hypothèses faites-vous ?
Solution

2.2.25 Exercice On dispose sur un rang 4 couples mariés...

On dispose sur un rang 4 couples mariés au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucun mari ne soit situé à côté de sa femme ?
Solution

2.2.26 Exercice Calculer les chances de gagner à la loterie à numéro suisse...

Calculer les chances de gagner à la loterie à numéro suisse. Il faut choisir 6 numéros sur un total de 45, plus un numéro complémentaire. Si vous pensez continuer à jouer, ne regardez pas la réponse.
Solution

2.2.27 Exercice M-Dans un porte monnaie contenant des pièces

Dans un porte monnaie contenant des pièces d'un franc, de deux francs et de cinq francs, on dénombre en tout 30 pièces dont 6 sont des pièces de un franc. On laisse tomber deux pièces.

a) Quelle est la probabilité que la somme tombée à terre soit de deux francs ?

b) Si la somme tombée par terre est un nombre impair, quelle est la probabilité qu'au moins une pièce de deux francs soit tombée du porte-monnaie ?

c) Si $\frac{1}{7}$ est la probabilité que la somme tombée à terre soit de 6 francs, combien ce porte-monnaie doit-il contenir de pièces de cinq francs ?

d) Si n est le nombre de pièces de deux francs dans ce porte-monnaie, montrer que la probabilité p que les deux pièces à terre soient de même valeur est donnée par

$$p = \frac{n^2 - 24n + 291}{435}.$$

e) Déterminer le nombre n de pièces de deux francs que doit contenir ce porte-monnaie pour que cette probabilité p soit minimale.

f) Déterminer le nombre n de pièces de deux francs que doit contenir ce porte-monnaie pour que cette probabilité p soit maximale.

Solution

2.2.28 Exercice M-Une boîte contient 36 boules,...

a) Une boîte contient 36 boules, plus précisément 21 boules bleues et 15 boules roses. Quelle est la probabilité de tirer au hasard de cette boîte deux boules de la même couleur ?

b) Une deuxième boîte contient 50 boules, des bleues et des roses. Si la probabilité de tirer de cette boîte deux boules de la même couleur est de $\frac{4}{7}$, combien peut-elle contenir de boules roses ?

c) Une autre boîte contient aussi des boules bleues et roses. On sait que la probabilité d'en tirer une boule bleue est de $\frac{3}{5}$. D'autre part, si on en tire une boule rose, la probabilité de retirer une seconde boule rose est de $\frac{5}{13}$. Combien cette boîte contient-elle de boules bleues.

d) Une dernière boîte contient à nouveau 50 boules, des roses et des bleues. Quand on en tire une boules on note sa couleur et on remet la boule dans la boîte. Si on effectue quatre fois de suite ce tirage avec remise, laprobabilité d'obtenir au moins une boule rose est de 99,99%. Combien cette boîte contient-elle de boules roses ?

Solution

2.2.29 Exercice Dans la forêt équatoriale, chaque naissance de gorilles...

Dans la forêt équatoriale, chaque naissance de gorilles donne un gorille gaucher avec une probabilité égale à 0,3. Un gorille gaucher sur trois a les yeux bleus, un gorille droitier sur quatre a les yeux bleus.

a) Calculer la probabilité pour qu'un gorille pris au hasard ait les yeux bleus.

b) Calculer la probabilité qu'un gorille ayant les yeux bleus soit gaucher.

c) Calculer la probabilité que pour six naissances, il y ait au moins un gorille gaucher aux yeux bleus.

Solution

2.2.30 Exercice M-Dans une ville, 40% de la population...

Dans une ville, 40% de la population a les cheveux bruns, 25% les yeux marrons et 15% ces deux caractéristiques simultanément. On y choisit une personne au hasard.

a) Quelle est la probabilité que cette personne n'ait ni les cheveux bruns, ni les yeux marrons ?

b) Quelle est la probabilité qu'une personne avec des yeux marrons ait les cheveux bruns ?

Solution

2.2.31 Exercice M-Dans une classe, 15% des notes de mathématiques...

Dans une classe, 15% des notes de mathématiques sont insuffisantes, 25% des notes de physique sont insuffisantes et 10% des élèves ont des notes insuffisantes dans les deux branches.

a) Un élève a une note insuffisante en physique. Calculer la probabilité qu'il ait aussi une note insuffisante en mathématiques.

b) Un élève a une note insuffisante en mathématiques. Calculer la probabilité qu'il ait aussi une note insuffisante en physique.

Solution

2.2.32 Exercice M-Dans une autre classe, la probabilité...

Dans une autre classe, la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait une note insuffisante en mathématiques vaut $\frac{1}{5}$.Si on choisit un élève avec une note insuffisante en mathématiques et qu'on choisit un deuxième élève au hasard, alors la probabilité que ce deuxième élève ait une note insuffisante en mathématiques vaut $\frac{1}{6}$.

a) Combien d'élèves sont dans cette classe ?

b) On choisit maintenant un élève au hasard, note, si l'élève a une note suffisante (S) ou insuffisante (I) en physique et répète ceci encore deux fois (3 fois en tout, un élève peut être choisi plusieurs fois). La probabilité qu'on ait noté au moins une fois I vaut alors 78.4%. Combien d'élèves ont une note insuffisante en physique ?

Solution

2.2.33 Exercice M-On fait expérimentalement les constatations suivantes...

On fait expérimentalement les constatations suivantes :

— s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est de 80%.

— s'il fait mauvais un jour la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est de 60%.

Aujourd'hui il fait beau

a) Calculer la probabilité qu'il fasse beau pendant encore 3 jours.

b) Calculer la probabilité qu'il fasse beau dans 3 jours.

Solution

2.2.34 Exercice M-Trois boîtes A, B et C contiennent...

Trois boîtes A, B et C contiennent respectivement 3 boules jaunes et 5 bleues, 2 boules jaunes et 1 bleue, 2 boules jaunes et 3 bleues. On choisit au hasard une des boîtes et on en tire deux boules. Quelle est la probabilité que les deux boules aient la même couleur ?
Solution

2.2.35 Exercice M-Un programme pour arrêter de fumer permet...

Un programme pour arrêter de fumer permet effectivement d'arrêter de fumer à 48% des femmes et 37% des hommes. Les personnes suivant ce programme avec succès sont à 60% des femmes.

a) Quelle est la proportion d'hommes parmi les personnes qui débutent ce programme ?

b) On choisit au hasard une personne ayant suivi ce programme, quelle est la probabilité qu'elle ait arrêté de fumer ?

Solution

2.2.36 Exercice M-Dans une population, il y a 5% de daltoniens...

Dans une population, il y a 5% de daltoniens chez les hommes et 0.25% chez les femmes. 48% de la population sont des hommes.

a) On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit daltonienne ?

b) La personne est daltonienne. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un homme ?

Solution

2.2.37 Exercice M-Dans un gymnase, 4% des garçons et 1% des filles...

Dans un gymnase, 4% des garçons et 1% des filles mesurent 1.80 m ou plus. 60% des élèves sont des filles.

a) On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il mesure 1.80 m ou plus ?

b) On choisit (au hasard) un élève qui mesure 1.80 m ou plus. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

c) On choisit au hasard 10 garçons. Quelle est la probabilité

i qu'ils mesurent tous 1.80 m ou plus ?

ii qu'au moins un, mesure 1.80 m ou plus ?

iii qu'exactement deux, mesurent 1.80m ou plus ?

d) Combien faut-il choisir de garçons pour que la probabilité que l'un d'entre eux au moins mesure 1.80 m ou plus soit égale à 0.9999 ?

Solution

2.2.38 Exercice On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité...

On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que les deux résultats sont différents ?
Solution

2.2.39 Exercice Une urne contient 6 boules blanches ...

Une urne contient 6 boules blanches et 9 noires. On en tire 4 sans remise.

a) Quelle est la probabilité que les deux premières soient blanches et les deux autres noires ?

b) Que devient la probabilité si on ne s'intéresse pas à l'ordre, c'est-à-dire on désire simplement deux boules noires et deux boules blanches ?
Solution

2.2.40 Exercice Le roi vient d'une famille de 2 enfants...

Le roi vient d'une famille de 2 enfants. Quelle est la probabilité qu'il ait une sœur ?
Solution

2.2.41 Exercice On choisit trois cartes au hasard...

On choisit trois cartes au hasard et sans remise dans un jeu ordinaire de 52 cartes. Calculer la probabilité conditionnelle que la première carte tirée soit un pique, sachant que les deux dernières en sont ?
Solution

2.2.42 Exercice Une récente diplômée a l'intention de passer ...

Une récente diplômée a l'intention de passer trois examens en sciences durant le prochain été. Elle passera le premier en juin. Si elle réussit, elle passera le deuxième en juillet. Puis, si elle réussit cet examen, elle passera le dernier en septembre. En cas de non-réussite, elle n'a pas le droit de passer l'examen suivant. La probabilité de réussir le premier examen est $0,9$. Si elle poursuit, la probabilité conditionnelle de réussir le deuxième est $0,8$. Si elle réussit au premier et au second examen, la probabilité conditionnelle de réussir le troisième est $0,7$.

a) Avec quelle probabilité, la candidate réussira-t-elle les trois examens ?

b) Sachant qu'elle ne réussira pas les trois examens, quelle est la probabilité qu'elle ait raté le deuxième ?

Solution

2.2.43 Exercice Une grossesse ectopique a deux fois...

Une grossesse ectopique a deux fois plus de chance de se développer lorsque la femme enceinte fume que lorsqu'elle est non fumeuse. Si 32% des femmes en âge de maternité fument, quel pourcentage de femmes, ayant une grossesse ectopique, sont fumeuses ?
Solution

2.2.44 Exercice Dans une certaine ville, 36% des familles...

Dans une certaine ville, 36% des familles possèdent un chien et 22% de celles qui ont un chien possèdent aussi un chat. De plus, 30% des familles ont un chat. Quelle est

a) la probabilité qu'une famille sélectionnée au hasard possède un chien et un chat ;

b) la probabilité conditionnelle qu'une famille choisie au hasard possède un chien sachant qu'elle a un chat ?

Solution

2.2.45 Exercice Comment placer 20 boules, dont 10 sont...

Comment placer 20 boules, dont 10 sont blanches et 10 noires, dans deux urnes de manière à maximiser la probabilité de tirer une boule blanche dans l'expérience suivante : on choisit d'abord une urne au hasard, puis une boule dans cette urne ?
Solution

2.2.46 Exercice On considère deux boîtes, l'une contient...

On considère deux boîtes, l'une contient une bille noire et une blanche et l'autre deux noires et une blanche. On désigne une boîte au hasard, de laquelle on tire une bille. Quelle est la probabilité qu'elle soit noire ? Si l'on sait que la bille est blanche, quelle est la probabilité que ce soit la première boîte qui ait été désignée ?
Solution

2.2.47 Exercice Trois cuisiniers A, B et C sont ...

Trois cuisiniers A, B et C sont chacun capables de préparer une spécialité de gâteau. Ce gâteau doit être cuit et risque de ne pas monter avec des probabilités de $0,02$, $0,03$ et $0,05$ selon les cuisiniers. Dans le restaurant où ils travaillent : A cuit 50% de ces gâteaux, B en cuit 30% et C en cuit 20%. Quelle est la proportion des gâteaux ratés attribuables à A ?
Solution

2.2.48 Exercice Une classe compte 4 garçons et 6 filles...

Une classe compte 4 garçons et 6 filles de première année, 6 garçons de seconde année. Combien doit-il y avoir de filles de deuxième année si l'on veut que sexe et année soient des facteurs indépendants lors du choix au hasard d'un étudiant ? Solution

2.2.49 Exercice La reine porte le gène de l'hémophilie...

La reine porte le gène de l'hémophilie avec une probabilité de $0,5$. Si elle est porteuse, chaque prince aura une chance sur deux de souffrir de cette maladie. La reine a eu trois fils non hémophiles.

a) Quelle est la probabilité qu'elle soit porteuse du gène ?

Solution

2.2.50 Exercice On admet que le sexe du dernier enfant...

On admet que le sexe du dernier enfant d'un couple est indépendant de celui des autres enfants de la famille et qu'il y a autant de chances d'être masculin que féminin. Calculer, pour un couple ayant 5 enfants, les probabilités des événements suivants :

a) tous les enfants sont du même sexe,

b) les trois aînés sont des garçons, les deux autres des filles ;

c) il y a exactement 3 garçons,

d) les deux aînés sont des garçons,

e) il y a au moins une fille.

Solution

2.2.51 Exercice Si A est inclu dans B, exprimer les probabilités...

Si $A \subset B$, exprimer les probabilités suivantes le plus simplement possible :

a) $P(A|B)$;

b) $P(A|B^c)$;

c) $P(B|A)$;

Solution

2.2.52 Exercice Avant de partir en vacances vous priez ...

Avant de partir en vacances vous priez votre voisin de bien vouloir arroser une plante souffrante durant votre absence. Sans arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,8$; avec arrosage, elle mourra avec la probabilité $0,15$. Vous êtes sûr à 90% que votre voisin l'arrosera.

a) Quelle est la probabilité que la plante soit vivante à votre retour ?

b) Si elle est morte, quelle est la probabilité que le voisin ait oublié de l'arroser ?

Solution

2.2.53 Exercice Montrer que ...

Montrer que $P(A|B) = 1$ entraîne $P(B^c|A^c) = 1$.

Solution

2.2.54 Exercice M-Une urne contient quatre boules rouges...

Une urne contient quatre boules rouges et x boules jaunes. On tire simultanément deux boules de l'urne. La probabilité qu'on ait tiré deux boules de même couleur est $\frac{7}{15}$. Combien de boules jaunes étaient dans l'urne ?

Solution

2.2.55 Exercice M-Un joueur a deux pièces de monnaie : ...

Un joueur a deux pièces de monnaie : une normale et une qui a deux faces "pile". Il en choisit une au hasard et la lance. Le résultat est "pile".

a) Quelle est la probabilité que la pièce lancée soit celle qui est normale ?

b) Le joueur lance la même pièce encore une fois. Le résultat est de nouveau "pile". Quelle est maintenant la probabilité que la pièce lancée soit celle qui est normale ?

Solution

2.2.56 Exercice M-En Angleterre, on écrit le mot "rigueur"...

En Angleterre, on écrit le mot "rigueur" avec un "u" ("rigour"). En Amérique, par contre on l'écrit "rigor". Un client anglophone d'un hôtel a écrit ce mot sur un bout de papier. On choisit au hasard une lettre du mot. Il s'agit d'une voyelle ("a", "e", "i","o", "u" ou "y"). 40% des clients anglophones de l'hôtel sont anglais, 60% américains. Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit anglais ? Solution

2.2.57 Exercice M-Une urne contient 10 boules rouges...

Une urne contient 10 boules rouges et 4 bleues. On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) les deux boules tirées sont rouges ;

b) la première boule est rouge et la seconde bleue ;

c) les deux boules sont de couleurs différentes.

Calculer le(s) nombre(s) x de boules bleues à ajouter au départ pour que la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes soit maximale.

Solution

2.2.58 Exercice M-Une boîte contient 7 boules blanches...

Une boîte contient 7 boules blanches et 9 boules noires.

a) On tire deux boules de cette boîte. Quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur ?

b) Si on a tiré deux boules de la même couleur, quelle est la probabilité qu'elles soient blanches ?

c) Si on a a déjà tiré deux boules blanches, quelle est la probabilité d'en tirer une troisième de la même couleur ?

d) Quelle est la probabilité, en tirant trois boules de cette boîte, d'en avoir au moins une noire ?

On vide maintenant cette boîte et on y met x boules blanches et deux boules noires de plus que de boules blanches.

i) Montrer que la probabilité p de tirer deux boules de même couleur de cette boîte est donnée par

$$p(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x + 1}$$

ii) Combien faut-il mettre de boules en tout dans cette boîte, pour que cette probabilité p soit la plus petite possible ?

Solution

2.2.59 Exercice M-Un pêcheur a remarqué qu'après...

Un pêcheur a remarqué qu'après une heure de pêche : - En période de lune croissante, il revient avec du poisson trois fois sur cinq ; - En période de lune décroissante, il rentre bredouille une fois sur trois. (Indication : la lune peut être considérée la moitié du temps comme croissante, et l'autre moitié comme décroissante.)

a) Quelle est la probabilité qu'en pêchant une heure, il attrape du poisson ?

b) Si on le voit arriver bredouille après une heure de pêche, quelle est la probabilité que la lune soit croissante ?

c) Si, en période de lune croissante, il pêche trois heures de suite, quelle est la probabilité qu'il rentre bredouille ?

d) Si, en période de lune décroissante, il pêche aussi trois heures de suite, quelle est la probabilité qu'il rentre avec du poisson ?

e) Combien de temps doit-il pêcher en période de lune décroissante pour être sûr à 99.9% de ramener du poisson ?

Solution

2.2.60 Exercice M-On enferme dans une boîte munie d'un orifice...

On enferme dans une boîte munie d'un orifice 5 souris blanches, 7 souris grises et 3 hamsters. L'expérience consiste à laisser sortir un à un trois de ces rongeurs. Chaque rongeur ayant la même probabilité de sortir, calculer la probabilité des événements suivants :
A : "il ne sort aucune souris blanche"
B : "il y a au moins un hamster qui sort"
C : "il sort un rongeur de chaque type"
D : "deux souris blanches sortent, sachant qu'un hamster est déjà sorti". Solution

2.2.61 Exercice M-Une urne u1 contient 3 boules rouges,...

Une urne $u1$ contient 3 boules rouges, 2 vertes et une jaune. Une urne $u2$ contient 2 boules rouges, 4 vertes et 3 jaunes. On tire une boule de $u1$ que l'on remet dans $u2$. On tire enfin une boule de $u2$. Quelle est la probabilité :

a) que cette boule soit jaune ?

b) que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

c) que la première boule tirées ait été rouge si au second tirage on a tiré une boule verte.

Solution

2.2.62 Exercice M-Dans une population équatoriale...

Dans une population équatoriale 10% des personnes sont porteuses de bacilles responsable d'une maladie X sans que celle-ci soit déclarée.

a) On tire au hasard dans cette population p personnes, dans quel intervalle d'entiers doit se trouver n pour l'on obtienne au moins un porteur de bacilles avec une probabilité située entre 90 et 95% ?

b) Un test de détection de cette maladie est tel que 90% des personnes porteuses de bacilles réagissent positivement de même que 5% des personnes saines. Calculer la probabilité qu'une personne soit porteuse de bacilles sachant que son test est positif.

Solution

2.2.63 Exercice M-Lors d'un concours, un candidat...

Lors d'un concours, un candidat doit déterminer parmi 5 réponses proposées l'unique réponse correcte à une question. On suppose que la probabilité est de $\frac{1}{3}$ qu'un candidat sache quelle est la réponse correcte et qu'un candidat ne le sachant pas, choisisse au hasard l'une des 5 possibilités. Étant donné qu'un candidat a indiqué la réponse correcte, quelle est la probabilité qu'il n'ait en réalité pas su laquelle des réponses était correcte ?
Solution

2.2.64 Exercice M-Une famille a deux enfants. On sait...

Une famille a deux enfants. On sait que l'un des enfants est un garçon. Calculer la probabilité pour que l'autre enfant soit aussi un garçon, sachant que :

a) l'autre enfant est plus jeune ;

b) aucune information n'est donnée sur l'autre enfant.

Solution

2.2.65 Exercice M-Un carton contient 12 verres dont 4...

Un carton contient 12 verres dont 4 sont défectueux. On sort du carton, au hasard, 3 verres. Calculer la probabilité pour que ces 3 verres ne soient pas défectueux ?
Solution

2.2.66 Exercice M-On jette 3 fois une pièce de monnaie...

On jette 3 fois une pièce de monnaie. On considère les événements suivants :

a) A : le premier jet donne face,

b) B : le deuxième jet donne face,

c) C : (exactement) deux jets consécutifs donnent face.

Ces événement sont ils indépendant deux à deux ? Solution

2.2.67 Exercice M-On s'intéresse à une famille ...

On s'intéresse à une famille et on considère les événements :
— A : la famille a des enfants des deux sexes,
— B : la famille a au plus un garçon.

a) Montrer que A et B sont dépendants si la famille a deux enfants.

b) Montrer que A et B sont indépendants si la famille a trois enfants.

Solution

2.2.68 Exercice M-Un club de tennis de 14 membres...

Un club de tennis de 14 membres se compose de 8 hommes et de 6 femmes.

a) Au cours d'un championnat, chaque membre joue contre les autres. Combien de parties y a-t-il en tout ? Combien y a-t-il de parties mixtes ?

b) On choisit au hasard 4 personnes du club. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 hommes et 2 femmes ?

c) Pour se rendre au club afin d'y disputer une partie, Michel prend le train de 7h03, qui permet d'arriver toujours à l'heure. Cependant, comme il a le sommeil profond, il rate le train avec une probabilité de 20%. Dans ce cas, il fait du stop et, trois fois sur cinq, il arrive à l'heure. S'il est arrivé à l'heure aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il ait raté son train ?

Solution

2.2.69 Exercice M-Dans un parc national africain,...

Dans un parc national africain, le vétérinaire opère d'abord comme chasseur au moyen d'une carabine avec laquelle il injecte à distance un puissant somnifère. La probabilité de réussir son tir dépend de la distance qui le sépare de l'animal au moment de tirer :

distance d	probabilité
$d < 10$	0.7
$10 \leqslant d < 20$	0.5
$20 \leqslant d < 30$	0.3
$30 \leqslant d$	0.0

Par ailleurs, la probabilité que l'éléphant approche ou se laisse approcher par le vétérinaire à moins de 10 m, 20 m, 30 m vaut 0.2 ; 0.6 ; 0.9 respectivement.

a) Quelle est la probabilité pour que le vétérinaire endorme un éléphant qu'il voit ?

b) Le vétérinaire rencontre durant sa journée quatre éléphants. Quelle est la probabilité pour

i) qu'il endorme deux éléphants ?

ii) qu'il endorme au moins un éléphant ?

iii) qu'il n'endorme que le quatrième éléphant ?

Solution

2.2.70 Exercice On promet la liberté à un prisonnier...

On promet la liberté à un prisonnier dans l'un des cas suivants :

a) lorsqu'il extrait une boule d'une urne A, la boule est blanche ou

b) lorsqu'il extrait une boule de l'urne A et une boule de l'urne B, les deux boules sont de la même couleur.

La fille du geôlier qui aime secrètement le prisonnier, lui fait savoir que l'urne A contient 3 boules blanches et 5 boules noires alors que l'urne B contient des boules blanches et noires en nombre égal. Que doit-il faire pour recouvrer la liberté.
Solution

2.2.71 Exercice Paradoxe du Chevalier de Méré...

Lequel des deux événements suivants est le plus probable :

a) obtenir au moins une fois un six en jetant quatre fois un dé, ou

b) obtenir au moins une fois un double six, en jetant 24 fois deux dés ?

c) Combien de fois doit-on lancer une paire de dés afin d'avoir la même chance d'obtenir un double-six qu'un simple six au bout de quatre lancers d'un dé unique ?

Solution

2.2.72 Exercice M-Dans un groupe formé de ...

Dans un groupe formé de filles et de garçon, on sait que la probabilité d'avoir : une fille quand on choisit au hasard une personne est de $\frac{2}{5}$; deux filles quand on choisit au hasard deux personnes, est de $\frac{5}{32}$. Combien y a-t-il de garçons dans ce groupe.
Solution

2.2.73 Exercice M-Une fabrique de webcams teste la qualité...

Une fabrique de webcams teste la qualité de ses caméras avant de les envoyer dans les différents points de vente. On prélève au hasard une caméra dans un lot de 50. Si la caméra est défectueuse, on renvoie les 50 caméras à l'atelier pour les vérifier. Si la webcam fonctionne, on en choisit une deuxième au hasard. Si elle est défectueuse, on renvoie le lot des 50 caméras à l'atelier. Sinon, on en choisit une troisième au hasard. Si elle est défectueuse, on renvoie le lot de 50 à vérifier. Dans le cas contraire, le lot a réussi le test et est envoyé dans les points de vente.
Supposons que dans un lot de caméras 2 sont défectueuses.

a) Quelle est la probabilité que le lot soit renvoyé à l'atelier lors du premier contrôle ?

b) Quelle est la probabilité que le lot soit renvoyé à l'atelier lors du deuxième contrôle ?

c) Quelle est la probabilité que le lot soit renvoyé à l'atelier ?

d) Que devient cette probabilité si l'on remet la caméra testée dans le lot avant d'effectuer le test suivant ?

Solution

2.2.74 Exercice M-Un réfrigérateur contient 5 vaccins...

Un réfrigérateur contient 5 vaccins contre une maladie X, 8 vaccins contre une maladie Y et 15 vaccins contre une maladie Z. On choisit au hasard 3 vaccins. Quelle est la probabilité que :

a) Les 3 vaccins choisis sont contre la maladie X ;

b) Les 3 vaccins choisis sont contre la même maladie ;

c) Il y a un vaccins contre chaque maladie.

Solution

2.2.75 Exercice M-Evariste va faire un tour au "Luna Park"...

Evariste va faire un tour au "Luna Park" et décide de s'amuser au stand de tir. A jeun il touche la cible avec une probabilité de 0.8 mais, à chaque bière qu'il boit cette probabilité chute de moitié.
En supposant qu'il commence à jeun et qu'il boit une bière après chaque tir :

a) Quelle est la probsbilité qu'il touche la cible trois fois de suite.

b) Quelle est la probabilité qu'il touche la cible au moins une fois en trois tirs ?

c) Quelle est la probabilité d'avoir raté son premier tir sachant qu'il a raté son troisième tir ?

d) Quel est le nombre minimal de tirs qu'il devra effectuer s'il veut être sûr, avec une probabilité supérieure à 0.92, de toucher au moins une fois la cible ?

Solution

2.2.76 Exercice M-Le personnel d'un hôpital est réparti...

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégorie : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique). 12% sont des médecins et 71% sont des soignants. 67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes. On sait de plus que 80% du personnel de l'hôpital est féminin.
Un membre du personnel de cet hôpital est tiré au sort.

a) Quelle est la probabilité que le sort désigne une femme soignante ?

b) Un homme a été désigné. Quelle est la probabilité qu'il soit médecin ?

c) Quelle est la probabilité que la personne désignée soit une femme sachant qu'elle fait partie du personnel AT ?

Dans cet hôpital, le service d'urgence reçoit en moyenne 60 personnes par jour dont 30% doivent être hospitalisés. Les autres rentre chez elles après la consultation d'un médecin. Parmi les malades hospitalisés on constate qu'en moyenne 12 doivent subir une radiographie, 8 une perfusion et 5 ne subissent ni radiographies, ni perfusion.

d) Quelle est la probabilité qu'un malade hospitalisé subisse une perfusion et une radiographie ?

Solution

2.2.77 Exercice M-Une pochette contient dix pièces :...

Une pochette contient dix pièces : sept en argent et trois en or. Les pièces en argent sont parfaitement équilibrées, alors que celle en or tombent sur pile avec une probabilité de $\frac{1}{3}$.
On tire au hasard une pièce de cette pochette, on la lance et on note le résultat.
Calculer les probabilités des événements suivants :

a) Le résultat est "pile".

b) La pièce est en or sachant que le résultat est "face".

On répète 5 fois l'expérience précédente en remettant chaque fois la pièce dans la pochette.
Calculer les probabilités des événements suivants :

c) Il n'y a que des "pile".

d) Il y a exactement deux "pile".

On tire simultanément deux pièces de la pochette, on les lance. Calculer les probabilités des événements suivants :

e) Les deux pièces sont en argent et il y a deux "pile".

f) Il y a une pièce en or et une en argent, montrant toutes les deux "face".

Solution

2.2.78 Exercice Une famille de 6 enfants est composée...

Une famille de 6 enfants est composée de 3 filles et 3 garçons. Quelle est la probabilité que les 3 plus âgés soient des filles ?
Solution

2.2.79 Exercice Dans une ville formée de six quartiers...

Dans une ville formée de six quartiers, six vols ont lieu le même jour. Quelle est la probabilité qu'un district ait subi plus d'un vol en considérant que,

a) les six quartiers sont discernables et les 6 voleurs aussi,

b) les quartiers sont discernables mais pas les voleurs,

c) ni les quartiers ni les voleurs ne sont discernables.

Solution

2.2.80 Exercice Soit un groupe de 7 personnes...

Quelle est la probabilité que les anniversaires de 7 personnes se répartissent sur chacune des quatres saisons, c'est-à-dire qu'à chaque saison il y ait au moins un anniversaire.
Solution

2.2.81 Exercice Une petite école donne 30 cours chaque semaine...

Une petite université a un seul professeur qui donne 30 cours par semaine. Tous les cours sont différents et sont donnés du lundi au vendredi à raison de 6 cours par jour. Juliette, qui prépare son programme pour la nouvelle année scolaire, doit choisir au hasard 7 cours parmi les 30. Quelle est la probabilité qu'elle doive se rendre à l'école chaque jour ?
Solution

2.2.82 Exercice Un sac contient une boule verte ou bleue...

Un sac contient une boule verte ou bleue avec la même probabilité. On rajoute une boule verte dans le sac, on mélange puis on tire une seule boule. Quelle est la probabilité que la boule originale soit verte si la boule tirée est verte également.
Solution

2.2.83 Exercice Un filtre pour messages électroniques ...

Un filtre pour messages électroniques non-désirés (spam) est programmé comme suit : le message est parcouru et si il contient le mot "gratuit" alors le message est mis de côté.
On sait que 80% des messages électroniques circulant sont des spam et que 10% de ceux-ci contiennent le mot "gratuit". Le mot "gratuit" apparaît dans 1% des messages qui ne sont pas des spam.
Un message vient d'arriver. Si il contient le mot "gratuit", quelle est la probabilité que ce soit un spam.
Solution

2.3 Variables aléatoires

2.3.1 Exercice

On choisit deux boules au hasard dans une urne contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2 Fr. pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1 Fr. pour chaque boule blanche tirée. Désignons les gains nets par la variable aléatoire X. Quelles sont les valeurs possibles pour X et quelles sont les probabiliteés associées à ces valeurs ?
Solution

2.3.2 Exercice

On classe cinq hommes et cinq femmes selon leurs résultats lors d'un examen. On fait l'hypothèse que tous les scores sont différents et que les 10! classements possibles ont tous la même probabilité. On désigne le rang de la meilleure femme par la variable aléatoire X (par exemple $X = 2$ si le meilleur résultat a été obtenu par un homme et le suivant par une femme). Trouver $P\{X = i\}, i = 1, 2, ..., 6$.
Solution

2.4 Variables aléatoires continues

2.5 Variables aléatoires simultannées

3 Réponses détaillées aux exercices

3.1 Réponses

Corrigé exercice 2.1.1 Chaque roue du cadenas représente une expérience. Le nombre de possibilités totales est donc, en appliquant le principe du dénombrement : $10 \times 10 \times 10 = 1000$, c'est en fait tous les nombres de 000 à 999.

Corrigé exercice 2.1.2 On applique le principe du dénombrement aux deux expériences ce qui donne $52 \times 51 = 2652$. Ensuite il s'agit de diviser ce résultat par deux car l'ordre dans lequel apparaissent les cartes ne nous intéresse pas, on obtient 1326. On peut également appliquer la formule des combinaisons, il s'agit en fait de trouver de combien de manières différentes on peut choisir une paire de cartes dans un jeu de 52 cartes.

$$C_{52}^{2} = \binom{52}{2} = \frac{52!}{(52-2)! \times 2!} = \frac{52 \times 51}{2 \times 1} = 1326$$

Corrigé exercice 2.1.3 Le premier chiffre ne peut pas être 0 car si tel était, le nombre aurait 5 chiffres.

a) On applique le principe de dénombrement et on obtient $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times = 900'000$.

b) Le nombre se termine soit par 0 soit par 5, donc on applique également le principe du dénombrement et on obtient $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 2 = 180'000$.

c) On applique toujours le même principe mais cette fois-ci on aura $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times = 136'080$, car chaque chiffre choisi ne peut plus être utilisé à nouveau.

Corrigé exercice 2.1.4

a) Les éléments sont discernables et l'ordre compte, on applique la formule des permutations : $5! = 120$.

b) Généralisons à n personnes, on ne s'occupe que de la position relative des personnes, donc la manière dont on place la première n'importe pas, il y a ensuite $n-1$ possibilités de placer une deuxième personne, puis $n-2$ possibilités de placer la troisième etc.. Nous avons donc dans le cas qui nous intéresse $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilités différentes. On peut également partir de a) et diviser par 5, car c'est le nombre de rotations de $72°$ que peuvent effectuer les 5 personnes autour de la table.

Corrigé exercice 2.1.5

a) $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 = 19'275'223'968'000$, on peut également le voir comme étant le nombre possible d'arrangements que l'on peut faire avec un échantillon de 10 éléments parmi 26, autrement dit $\binom{26}{10} \times 10! = A_{26}^{10} = 19'275'223'968'000$.

b) A chaque position (1 à 10) on peut mettre 26 lettres différentes donc le nombre sera 26^{10}.

Corrigé exercice 2.1.6

a) Chaque fenêtre a deux configurations possibles, ouverte ou fermée, ce qui fait 2^8 configurations.

b) Ici chaque fenêtre à 4 configurations possibles donc on a 4^8 configurations possibles.

c) On peut considérer que l'on aura $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 2^6$ configurations.

Corrigé exercice 2.1.7 On aura $36 = 6 \times 6$ couples de valeurs.
Si les dés étaient de la même couleur, c.à.d indiscernables on observerait plus que 21 valeurs différentes $((2;3) = (3;2); (1;6) = (6;1)$,etc.).

Corrigé exercice 2.1.9

a) On considère les individus comme étant tous discernables, nous sommes dans le cas d'une permutation de 25 éléments, le résultat est $25! = 15'511'210'043'330'985'984'000'000$ permutations possibles. Si on désirait les essayer toutes, cela prendrait 491'857 années à raison d'un milliard de permutations par seconde !

b) On considère les hommes comme étant un seul et unique individu. Ayant regroupé les 8 hommes il nous reste $1+8+7 = 16$ éléments à permuter donc 16!. Mais, à l'intérieur du groupe d'homme nous avons 8! permutations possibles. En appliquant le principe fondamental du dénombrement on obtient finalement $16! \times 8! = 843'606'888'284'160'000$.

Corrigé exercice 2.1.10 Nous avons 4M, 3C, 2H, 1L donc 4 groupes donnant 4! dispositions différentes, à l'intérieur de chaque groupe nous avons respectivement 4!, 3!, 2!, 1! permutations possibles. Le résultat d'après le principe fondamental est $4! \times 4! \times 3! \times 2! \times 1! = 6912$.

Corrigé exercice 2.1.11

a) Sans tenir compte de la casse ni des couleurs nous avons le mot 'mississippi', qui a 11 lettres formant 4 groupes 1m, 4i, 4s et 2p de lettres différents, la solution est donnée par la formule des permutations d'objets partiellement indiscernables.

$$\frac{11!}{1! \times 4! \times 4! \times 2!} = 34650$$

b) En tenant compte de la casse et des couleurs nous avons 11 éléments tous différents donc $11! = 39'916'800$ permutations.

Corrigé exercice 2.1.12 C'est une permutation d'objets partiellement indiscernables, le résultat est $\frac{4!}{2!} = 12$

Corrigé exercice 2.1.13 Il y a $\begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix}$ manières de choisir 5 chiffres et $\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$ manières de choisir 2 étoiles (dans ce cas l'ordre ne nous intéresse pas). D'après le principe fondamental de dénombrement on a :

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} = 116'531'800$$

Corrigé exercice 2.1.14 Il y a 3 possibilités d'avoir une rouge, 4 possibilités d'avoir une bleue et 5 possibilités d'avoir une jaune ce qui se traduit par

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 60$$

Corrigé exercice 2.1.15 Il y a $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ combinaisons possibles de choisir deux femmes et $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ combinaisons possibles de choisir 3 hommes. En appliquant le principe fondamental de dénombrement on a $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 350$ possibilités.

Dans le cas où deux hommes refusent de siéger ensemble il y aura $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$ comités où aucun des deux hommes n'apparaîtra et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 20$ où seulement un des deux siégera, d'après le principe fondamental de dénombrement le nombre de possibilités sera de $(10+20)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 300$.

Corrigé exercice 2.1.16 Il y a $\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ possibilités de former le premier groupe puis $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ possibilités de former le deuxième donc

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{12!}{6! \times 6!} \times \frac{6!}{6! \times 0!} = \frac{12!}{6! \times 6!} = 924$$

Corrigé exercice 2.1.17 Il y a $7! = 720$ manières de les asseoir sans restriction aucune.

a) On a deux groupes discernables (garçons et filles) formés de respectivement 4 et 3 individus discernables donc le nombre de manières est $2! \times 4! \times 3! = 288$. (Le 2! vient de la permutation des 2 groupes entre eux.)

b) On peut considérer 4 groupes, un formé des 4 garçons et 3 autres, chacun formé par une seule fille. Il y a 4! façons de permuter les garçons, 1! façon de permuter chaque fille dans son groupe et finalement 4! façons possibles de permuter les 4 groupes, donc en tout $4! \times 1! \times 1! \times 1! \times 4! = 4! \times 4! = 576$ manières possibles de les asseoir dans cette configuration.

c) Plaçons d'abord les 4 garçons, chacun séparé par un siège, il y a 4! manières de le faire. Ensuite il y a 3! manières possibles d'asseoir les filles dans les sièges intermédiaires, donc $4! \times 3! = 144$ manières différentes.

Corrigé exercice 2.1.19 Le premier peut serrer la main à 19 personnes, le deuxième à 18, le troisième à 17 etc.. donc $19 + 18 + 17 + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = 190$ poignées de mains. Il est beaucoup plus simple de raisonner en termes de combinaisons, il y a autant de poignées de mains qu'il est possible de former de paire d'éléments dans un ensemble de 20 éléments, c.à.d $\begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} = 190$.

Corrigé exercice 2.1.20 Il y a $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$ possibilités de choisir 2 républicains, $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 15$ possibilités de choisir 2 démocrates et $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$ possibilités de choisir 3 démocrates. En appliquant le principe fondamental de dénombrement on obtient $10 \times 15 \times 4 = 600$ comités possibles.

Corrigé exercice 2.1.21 On peut raisonner de la manière suivante : on a 52 cartes dans les mains, on a $\begin{pmatrix} 52 \\ 13 \end{pmatrix}$ possibilités pour constituer une pile de 13 cartes, ensuite il nous reste 39 cartes, donc $\begin{pmatrix} 39 \\ 13 \end{pmatrix}$

possibilités pour former une deuxième pile, puis $\binom{26}{13}$ possibilités pour la troisième et finalement $\binom{13}{13} =$ 1 pour la quatrième et dernière pile, en appliquant le principe fondamental de dénombrement :

$$\frac{52!}{13! \times 39!} \times \frac{39!}{13! \times 26!} \times \frac{26!}{13! \times 13!} \times \frac{13!}{13! \times 0!} = \frac{52!}{13! \times 13! \times 13! \times 13!} = \binom{52}{13,13,13,13}$$

ce qui donne $53'644'737'765'488'792'839'237'440'000$ possibilités.

Corrigé exercice 2.1.22 On a 4 écoles et 8 tableaux noirs à placer, les tableaux noirs sont indiscernables, donc la solution ne sera pas 4^8. On peut résoudre ce problème comme suit :
On considère non pas les écoles mais les 3 séparations entre les écoles. Il s'agit alors de trouver le nombre de permutations possibles de la suite de symboles suivante où les "|" sont les tableaux et les "+" les 3 séparations entre les 4 écoles.

$$+++||||||||\quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad \frac{11!}{3!8!} = 165 \text{ possibilités} \qquad \text{(permutations avec répétitions)}$$

Par exemple la suite "+||||||+||+" signifie : "0 tableau" dans la première école, "6 tableaux" dans la seconde école, "2" dans la troisième et aucun dans la dernière.

On peut également considérer le problème comme étant équivalent à celui de trouver toutes les solutions non-négatives d'une l'équation du type :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n \quad \text{(par exemple : 0+6+2+0=8)}$$

Une telle équation à $\binom{n+r-1}{r-1}$ solutions. Dans notre cas, $r = 4$ et $n = 8$, donc il y a $\binom{8+4-1}{4-1} = 165$ possibilités.

Dans le cas où au moins un tableau doit être mis dans chacune des écoles on peut considérer l'idée suivante :
Considérons la représentation

$$|+|+|+|+|+|+|+|$$

où les " | " représentent comme précédemment les tableaux et les sept "+" représentent les séparations de 8 écoles avec chacune un tableau. Avec 8 écoles, il n'y a qu'une seule possibilité de placer les 8 tableaux. Maintenant, considérons les 4 écoles du problème. Il suffit de garder 3 séparations parmi les 7 pour avoir au moins un tableau par école et les 4 tableaux restant distribué aléatoirement. Ce qui donne la combinaison

$$\binom{7}{3} = \binom{n-1}{r-1} = 35$$

en remarquant que si les tableaux sont indiscernables, les écoles elles, par contre le sont. Un problème équivalent est de trouver toutes les solutions non nulles de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n \quad \text{(par exemple : 1+5+1+1=8)}$$

Corrigé exercice 2.1.23

a) Il s'agit de séparer de toutes les manières possibles 8 personnes indiscernables en 6 groupes (les étages dans ce cas). Le problème se ramène à rechercher toutes les solutions non négatives de l'équation,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$$

qui sont au nombre de $\binom{8+6-1}{6-1} = 1287$.

b) L'ascenseur contient toujours 8 personnes, mais cette fois-ci le liftier peut distinguer entre les femmes et les hommes. Il y a 5 hommes et 3 femmes. Le liftier peut voir descendre les 5 hommes de $\begin{pmatrix} 5+6-1 \\ 5 \end{pmatrix} = 252$ manières différentes et le 3 femmes de $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = 56$ manières possibles. En appliquant le principe fondamental de dénombrement on obtient $252 \times 56 = 14'112$.

c) Si le liftier peut distinguer chaque personne alors le nombre de cas possibles est de $6^8 = 1'679'616$.

Explication :

Corrigé exercice 2.1.24 La première partie de l'égalité signifie que le nombre de combinaisons possibles de tirer p boules parmi n est le même que de tirer $n-p$ boules parmi n. Pour s'en convaincre

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$$

La deuxième partie peut s'illustrer comme suit. Soit une urne avec 5 boules différentes, il y a intuitivement 5×4 manières de tirer 2 boules. Ne s'intéressant pas à l'ordre, on divise par le nombre de permutation de ces deux boules c'est-à-dire 2!. Maintenant il n'y a plus qu'une seule manière de considérer les 3 boules restantes, ce que l'on peut noter $\frac{3\times2\times1}{3!}$. Finalement,

$$\frac{5\times4}{2\times1} \times \frac{3\times2\times1}{3\times2\times1} = \frac{5!}{3!\times2!} \times \frac{3!}{3!\times0!} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2,3 \end{pmatrix}$$

En généralisant à n et p, $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p,p \end{pmatrix}$

Corrigé exercice 2.1.25

a) Il s'agit de trouver le nombre de possibilités qu'il y a, de tirer 7 questions parmi 10, donc $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = 120$ possibilités.

b) Il doit choisir 3 questions parmi les cinq premières et bien sûr 4 parmi les 5 dernières donc $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 50$ possibilités.

Corrigé exercice 2.1.26 Les professeurs et les écoles sont discernables :

a) Il y a 4 choix possibles pour le premier professeur, 4 choix possibles pour le 2ème et ainsi de suite donc $4^8 = 65536$. On remarquera la différence entre cet exercice et l'exercice 2.1.22.

b) Pour la première école on peut choisir 2 professeurs parmi 8, pour la deuxième école on peut choisir 2 professeurs parmi 6 et ainsi de suite, donc

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2,2,2,2 \end{pmatrix} = 2520$$

Corrigé exercice 2.1.27

a) Le compteur peut afficher tous les nombres de 6 chiffres de 0 à $999'999$, c'est-à-dire 10^6 nombres. On peut également considérer 6 cases que l'on peut chacune remplir avec un chiffre de 0 à 9, donc $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$.

b) Trois, parmi les 6 cases, vont contenir un "5". Il y a $C_3^6 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 20$ possibilités de placer les trois 5. Dans chacune des trois cases qui restent on peut mettre n'importe quel chiffre sauf le "5". En appliquant le théorème fondamental on a

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 9^3 = 14'580$$

possibilités de nombres avec exactement trois "5".

c) Au moins trois "5" signifie : <exactement trois "5"> ou <exactement quatre "5"> ou <exactement cinq "5"> ou <exactement six "5">. Nous avons déjà le résultat pour <exactement trois "5">, il suffit donc d'ajouter les autres dénombrements en utilisant le même raisonnement que sous b),

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 9^3 + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 9^2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 9 + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot 9^0 = 15'850.$$

On peut également se dire qu'au moins trois cinq signifie le tout moins <aucun "5"> ou <exactement un "5"> ou <exactement deux "5"> c'est-à-dire :

$$10^6 - \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 9^6 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 9^5 + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 9^4 \right) = 15'850.$$

d) Au moins un "5" signifie le tout moins <aucun "5">,

$$10^6 - \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 9^6 \right) = 468'559.$$

Corrigé exercice 2.1.28

a) Il est plus simple de s'imaginer que chaque billet peut "choisir" un élève, mathématiquement parlant c'est identique. Le premier billet peut choisir entre 19 élèves, le deuxième billet entre 18 et ainsi de suite, le résultat est

$$19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = A_4^{19} = \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 4! = \frac{19!}{(19-4)!} = 93'024.$$

b) Chaque billet peut choisir entre 19 élèves donc $19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 = 19^4 = 130'321$.

c) Ne pouvant pas distinguer les billets, il suffit de choisir un groupe de quatre élèves parmi les dix-neuf de la classe et leur donner à chacun n'importe lequel des billets "identiques". Il y a $\begin{pmatrix} 19 \\ 4 \end{pmatrix} = 3876$ possibilités de choisir quatre élèves parmi dix-neuf, donc également 3876 possibilités de distribuer les billets.

Corrigé exercice 2.1.30 Il y a onze filles et trois garçons donc quatorze élèves.

a) On choisit 3 élèves parmi 14 donc $\frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3!} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix} = 364$ délégations différentes.

b) Il y a 3 garçons qui peuvent chacun être laveurs de tableaux. Il reste à choisir deux élèves quelconques parmi $14 - 1 = 13$ pour former une délégation de 3, donc

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix} = 234$$

possibilités.

c) Il y a 364 délégations possibles desquelles il faut enlever celles formées uniquement de filles ou de garçons,

$$364 - \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 364 - 165 - 1 = 198$$

d) On commence par déterminer le nombre de paires mixtes que l'on peut former. Le nombre total de couples est de $\binom{14}{2} = 91$ desquels il faut enlever les couples formés uniquement de filles et de garçons, ce qui donne

$$\binom{14}{2} - \left(\binom{3}{2} + \binom{11}{2}\right) = 33.$$

De ces 33 paires il faut en choisir 3 (couples de délégués suppléants), cela nous donne $\binom{33}{3} = 5456$ délégations possibles de 3 couples. À chacune des paires on peut attribuer une des 3 charges, en plus, dans chaque paire l'un des deux élèves est soit titulaire soit suppléant donc finalement, il y a

$$\binom{33}{3} \cdot 3! \cdot 2^3 = 65'472$$

répartitions possibles.

Corrigé exercice 2.1.31

a) On choisit 5 amis parmi 11, c'est-à-dire qu'il y a $\binom{11}{5} = 462$ invitations possibles.

b) Les deux inséparables sont soit invités ensemble soit ignorés les deux. Si on les invite alors il faut choisir encore 3 autres invités parmi $11-2=9$, donc $\binom{9}{3} = 84$. Si on ne les invite pas il faut choisir 5 invités parmi 11-2=9 c'est-à-dire $\binom{9}{5} = 126$, en additionnant les deux résultats on obtient la valeur désirée $\binom{9}{3} + \binom{9}{5} = 210$.

c) Supposons que les ennemis s'appellent A et B. On peut réaliser une invitation sans problème en invitant A et 4 autres personnes sauf B, ou B et 4 autres personnes sauf A, ou encore ni A ni B, ce qui donne

$$\binom{9}{4} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = 378.$$

Corrigé exercice 2.1.32 Commençons par une petite expérience. Soit 4 personnes a, b, c, d. On aimerait les partager en un groupe de deux personnes et en deux groupes d'une seule personne. Par énumération on obtient,

$$\begin{pmatrix} ab & c & d \\ ac & b & d \\ ad & b & c \\ bc & a & d \\ bd & a & c \\ cd & a & b \end{pmatrix},$$

ce qui donne 6 solutions distinctes.
Partageons à présent ce groupe de quatre personnes en un groupe de trois et un groupe de une personne et raisonnons de la manière suivante. On choisit trois personnes parmi quatre, puis une personne parmi une, cela semble juste et c'est juste. $\binom{4}{3} \cdot \binom{1}{1} = 4$, on vérifie :

$$\begin{pmatrix} abc & d \\ abd & c \\ acd & b \\ bcd & a. \end{pmatrix}$$

Si on utilise la même formule pour le premier cas on a $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12\,!$ Que c'est-il passé ? On a en fait introduit un ordre dans les deux groupes de une personne, ordre qu'il faudra éliminer en posant

$$\frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1! \cdot 2!} = 6.$$

Ce n'est pas forcément intuitif, mais en y réfléchissant bien ç'est logique.
Revenons à notre exercice.

a) En tenant compte de ce que l'on vient d'observer, la réponse est

$$\frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}}{1! \cdot 2!} = 8'316$$

possibilités.

b) Cette fois on a trois groupes de même cardinal. On choisit 4 personnes parmi 12 pour le premier groupe, puis 4 parmi 8 pour le deuxième et finalement 4 parmi 4 pour le dernier. Ayant introduit un ordre dans des groupes qui ne sont pas discernables par leur cardinalité, on doit diviser par 3! pour ramener le résultat à sa juste valeur.

$$\frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}}{3!} = \frac{495 \cdot 70 \cdot 1}{6} = \frac{34650}{6} = 5'775$$

Une autre façon de procéder consiste à utiliser la formule des *coefficients multinomiaux* : considérons pour commencer les douze personnes alignées sur un rang, on peut faire ceci de 12! manières différentes. Considérons les quatre premières personnes dans le groupe A, les quatre suivantes dans le groupe B et les quatre dernières dans le groupe C. En se souvenant de l'exercice du mot *mississipi* cela donne

$$\frac{12!}{4!4!4!} = 34'650$$

possibilités. À présent on se rend compte que l'on a bien introduit un ordre entre les lettres A,B et C. Il faut le supprimer donc diviser par $3! = 6$ ce qui donne bien $5'775$ comme auparavant.

3.2 Probabilités

Corrigé exercice 2.2.1 Il ne faut pas perdre de vue que chacune des boules a exactement la même chance d'être choisie indépendamment de sa couleur. On commence par calculer le nombre total de combinaisons possibles de 3 boules parmi douze qui est $\binom{12}{3} = 220$.

a) Intuitivement il y a une seule possibilité de choisir 3 boules rouges parmi 3, cela se traduit mathématiquement par $\binom{3}{3} = 1$. Donc la probabilité étant définie par le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles on obtient $P(A) = \frac{1}{220} \cong 0,004545 \cong 0,45\%$.

b) Le nombre de façons différentes de tirer une boule rouge est de 3, une bleue de 4 et une jaune de 5 donc la probabilité cherchée est $P(B) \cong \frac{3\times 4\times 5}{220} \cong 27,27\%$. La "traduction mathématique" est $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}$.

Attention de ne pas additionner 3, 4 et 5.

c) Cela implique que l'on peut avoir soit :

i) (3 boules bleues et 0 boule jaune) ou

ii) (1 boule bleue et 2 boules jaunes) ou

iii) (2 boules bleues et 1 boule jaune) ou

iv) 0 boule bleue et 3 boules jaunes)

$$P(C) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{0}+\binom{4}{1}\binom{5}{2}+\binom{4}{2}\binom{5}{1}+\binom{4}{0}\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{84}{220}$$

donc $P(C) \cong 0,3818 \cong 38,18\%$.

d) On pourait suivre le même raisonnement que sous c) mais il est plus simple de se convaincre que l'événement "avoir au moins une boule rouge" est l'événement complémentaire de "n'avoir aucune boule rouge" donc d'après les axiomes de probabilités $P(D) = 1 - P(C) = \frac{136}{220} \cong 0,6181 \cong 61,81\%$.

e) "Au moins une des trois boules est bleue" signifie que l'on peut avoir 1, 2 ou 3 boules bleues. Il est parfois plus simple de calculer la probabilité l'événement complémentaire "ne pas avoir de boule bleue du tout", plutôt que celle de l'événement lui-même, le raisonnement est le même que sous c) :

$$P(1-E) = \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{0}+\binom{3}{2}\binom{5}{1}+\binom{3}{1}\binom{5}{2}+\binom{3}{0}\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{56}{220}$$

d'où $P(E) = \frac{164}{220} \cong 0,7454 \cong 74,54\%$.

f) "Avoir au plus une boule bleue" signifie ne pas en avoir du tout (déjà calculé sous e) $P(1-E) = \frac{56}{220}$) plus (+) la probabilité d'avoir exactement 1 boule bleue qui est

$$P(F) = \frac{56}{220} + \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}+\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1}+\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{168}{220}$$

c.à.d $P(F) = \frac{42}{55} \cong 0,7636 \cong 76,36\%$.

Corrigé exercice 2.2.2 Le jeu contient 52 cartes avec 13 cartes par couleur. On calcule d'abord le nombre total d'événements possibles (aussi appelé ensemble fondamental, noté en général Ω) $\operatorname{Card}\Omega = \begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix} = 2'598'960$, c.à.d le nombre de cas possibles de tirer 5 cartes d'un jeu de 52 (le terme Card signifie cardinal de Ω, c'est, en language ensembliste le nombre d'éléments que contient un ensemble quelconque). Il faut noter que ce calcul est similaire à celui fait à l'exercice 2.2.1 car le fait d'avoir 52 cartes toutes différentes ne change en rien avec le fait d'avoir une urne avec des groupes de boules indiscernables.

On peut voir un jeu de cartes comme étant une urne avec 4 séries de 13 boules de couleurs différentes numérotées de 1 à 13. De ce fait, selon l'interprétation d'un événement on peut les voir comme étant totalement discernables (as <u>et</u> coeur) ou partiellement discernables (as <u>ou</u> coeur).

a) Il y a 13 cœurs dans le jeu, donc les possibilités d'en tirer 5 sont C_{13}^5 et la probabilité de cet événement est

$$P(a) = \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{33}{66'640} = 0,000495.$$

b) Il y a 13 cœurs et 13 piques donc

$$P(b) = \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{143}{16'660} = 0,0085$$

c) Il s'agit ici de la somme des probabilités de 2 tirages distincts, soit 5 trèfles, soit 5 cœurs, il faut donc additionner les probabilités.

$$P(c) = \frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{33}{33'320} = 0,00099$$

c'est le double de $P(a)$

d) c'est 4 fois $P(a)$:

$$P(d) = 4\frac{\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{33}{16660} = 0,00198$$

e) on peut choisir 3 cartes parmi 4 couleurs et 2 cartes parmi les 3 couleurs restantes,

$$P(e) = \frac{4 \times \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} \times 3 \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{429}{4165} = 0,1030$$

f) La 5ème carte peut être n'importe quelle carte, mais elle va tout de même intervenir dans le calcul de probabilité. On va calculer en utilisant 3 méthodes différentes :

1. Raisonnons en terme d'événements. Pour tirer 5 cartes il y a $52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48$ possibilités différentes qu'il faut diviser par le nombre de permutation de 5 cartes, c'est-à-dire 5! ce qui donne $\frac{52\times51\times50\times49\times48}{5!} = 2'598'960$. Avoir 4 as et n'importe quelle carte représente 1×48 possibilités donc $P(f) = \frac{48}{2'598'960} = \frac{1}{54'145} = 1,85 \times 10^{-5}$.

ii) Par un raisonnement purement intuitif on peut affirmer que la probabilité de tirer 4 as et n'importe quelle carte est de $\frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{1}{49} \times \frac{48}{48}$. Cependant il faut multiplier ce nombre par 5 car la carte isolée peut apparaître à 5 positions différentes, donc $P(f) = \frac{1}{270'725} \times 5 = \frac{1}{54145}$

iii) Finalement en terme de combinaisons tout est beaucoup plus simple, on a

$$P(f) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{1}{54'145} = 1,85 \times 10^{-5}$$

g) 3 as 1 roi donne

$$P(g) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{1}{108'290}$$

h) l'événement "aucun as" signifie que l'on choisi 5 cartes parmi toutes celles qui ne sont pas des as, c'est-à-dire, 48 cartes :

$$P(h) = \frac{\begin{pmatrix} 48 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{35'673}{54'145}$$

i) "au moins un as" est l'événement complémentaire de "aucun as"

$$P(i) = 1 - P(h) = \frac{18'472}{54'145}$$

j) "Au plus un as" est la probabilité de ne pas en avoir, plus(+), la probabilité d'en avoir un seul. La probabilité d'avoir un as est $P(1 \text{ as}) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{3243}{10'829}$.

La probabilité cherchée est :

$$P(j) = P(h) + \frac{3243}{10'829} = \frac{35673}{54145} + \frac{3243}{10829} = \frac{51888}{54145} = 0,9583$$

Corrigé exercice 2.2.3 L'ensemble fondamental compte $\begin{pmatrix} 25 \\ 4 \end{pmatrix} = 12650$ possibilités de choisir 4 machines parmi 25. La cardinalité de l'événement "tirer 4 machines non défectueuses" est de $\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix} = 4845$ (le choix de 4 calculatrices parmi 20 en état de marche). La probabilité cherchée est

$$P = \frac{\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 25 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{4845}{12650} = 0,3830$$

Corrigé exercice 2.2.4 Le nombre de voyelles est de 6 et celui des consonnes de 20.

a) L'ordre n'importe pas ici, l'ensemble fondamental aura donc $\begin{pmatrix} 26 \\ 3 \end{pmatrix} = 2600$ éléments et le cardinal de l'ensemble qui nous intéresse $\begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix} = 1140$, de ce fait la probabilité sera

$$P(a) = \frac{\begin{pmatrix} 20 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 26 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{57}{130}$$

b) l'ordre n'importe pas non plus ici, l'ensemble fondamental aura $\begin{pmatrix} 26 \\ 3 \end{pmatrix} = 2600$ éléments et l'ensemble qui nous intéresse $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 20$ éléments, la probabilité sera

$$P(b) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 26 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{1}{130}$$

c) dans le mot "moi" l'ordre a de l'importance, le nombre d'arrangements de 3 lettres que l'on peut faire avec ces 26 jetons est $A_{26}^{3} = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 \times 25 \times 24 = 15'600$. Le mot "moi" étant l'un de ces arrangements, on a

$$P(c) = \frac{1}{15600} = 0.0000641026$$

d) $P(d) = \frac{1}{\begin{pmatrix} 26 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2600} = P(c) \times 3!$

Corrigé exercice 2.2.5 Le nombre d'éléments de l'ensemble fondamental est de $2^{10} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, on peut ensuite considérer que placer 4 piles et 6 faces est la même chose que trouver le nombre d'anagrammes du mot "FFFFPPPPPP", la probabilité cherchée sera le rapport des deux nombres

$$P = \frac{\frac{10!}{6! \times 4!}}{2^{10}} = \frac{105}{512} = 0,2050$$

$$P(i) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^{i}(1-p)^{n-i} = P(4) = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} (\frac{1}{2})^{4}(1-\frac{1}{2})^{6} = \frac{105}{512}$$

Corrigé exercice 2.2.6

Résolution à l'aide d'un diagramme : Soit la figure 2 où ont été placées les données du problème. Faire un diagramme est la manière la plus rapide et intuitive de résoudre ce genre de problèmes.

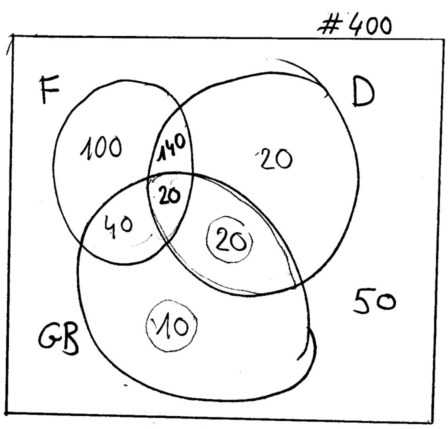

FIGURE 2 – Diagramme exercice 2.2.6

On peut facilement en déduire que

a) $140+40+20$ personnes parlent exactement 2 des trois langues. La probabilité est donc de $\frac{200}{400} = 0,5$.

b) $400-50 = 350$ ou $100+140+20+40+10+20+20 = 350$ parlent au moins une des trois langues, $p = \frac{350}{400} = \frac{7}{8}$.

Corrigé exercice 2.2.7 Soit la figure 3 où ont été placées les données du problème. On en tire $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.08$ et $P(A\cap B) = 0.04$. De la théorie on sait que $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

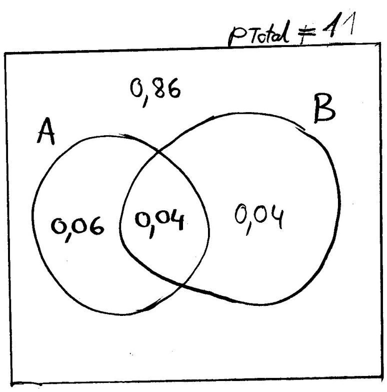

FIGURE 3 – Diagramme exercice 2.2.7

a) La probabilité de n'avoir "aucune télévision défectueuse" est l'événement complémentaire de $P(A\cup B)$ qui est : "Une télévision a au moins un défaut",

$$1-P(A\cup B) = 1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B)) = 1-(0.1+0.08-0.04) = 1-0.14 = 0.86$$

b) La probabilité de ne présenter que le défaut A est $P(A)-P(A\cap B) = P(A\cup B)-P(B) = 0.1-0.04 = 0.14-0.08 = 0.06$

c) Même raisonnement, $P(B)-P(A\cap B) = P(A\cup B)-P(A) = 0.08-0.04 = 0.14-0.1 = 0.04$.

Corrigé exercice 2.2.8 De l'énoncé on tire : $P(A) = 0.42; P(B) = 0.55; P(C) = 0.34; P(A\cap B) = 0.18; P(A\cap C) = 0.15; P(B\cap C) = 0.15; P(A\cap B\cap C) = 0.08$, on peut en faire le diagramme de la figure 4

a) "Au moins un des pays" est l'événement complémentaire de "aucun des pays", ce dernier événement a la probabilité 0.04, donc $P(a) = 1-0.04 = 0.96$

b) $P(b) = 1-P(a) = 0.04$

c) $P(c) = P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)-3\times P(A\cap B\cap C) = 0.18+0.10+0.15-3\times 0.08 = 0.19$

d) $P(d) = P(A)-(P(A\cap B)+P(A\cap C))+P(A\cap B\cap C) = 0.42-(0.18+0.10)+0.08 = 0.22$

e) $P(e) = 0.10$

Corrigé exercice 2.2.9 Dans un premier temps on calcule le nombre d'événements de l'ensemble fondamental, ce nombre est $\begin{pmatrix} 39 \\ 3 \end{pmatrix} = 9139$, c'est le nombre possibilités différentes de choisir trois animaux parmi 39.

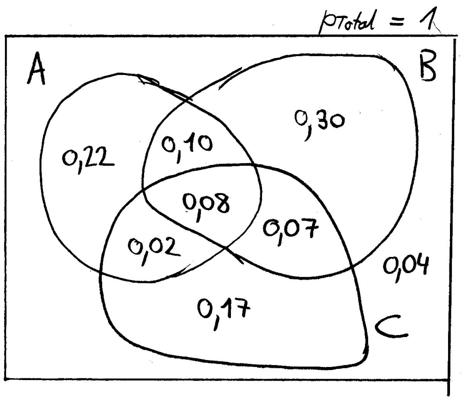

FIGURE 4 – Diagramme exercice 2.2.8

a) "au moins un lapin" signifie un, deux ou trois lapins. Il y a deux manières de procéder :

i) On va additionner les probabilités d'avoir exactement un lapin et deux hamster, deux lapins et un hamster et trois lapins sans hamster. En divisant par le nombre de cas total on obtient la probabilité recherchée.

$$\frac{\binom{35}{1}\times\binom{4}{2}+\binom{35}{2}\times\binom{4}{1}+\binom{35}{3}\times\binom{4}{0}}{\binom{39}{3}}=\frac{9135}{9139}=0.999562$$

ce qui est pour ainsi dire une certitude.

ii) On voit que la possibilité est de $\frac{9135}{9139}$ les $\frac{4}{9139}$ restant sont en fait la possibilité de n'avoir aucun lapin. On pourrait donc très bien calculer la probabilité de l'événement complémentaire et la soustraire de 1. La probabilité complémentaire à "au moins un lapin" est de n'avoir que des hamsters donc

$$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{35}{0}}{\binom{39}{3}}=\frac{4}{9139}$$

en faisant le complément à 1, on retrouve bien le résultat calculé sous i) à savoir :

$$1-\frac{4}{9139}=\frac{9135}{9139}=0.999562$$

b) "exactement un lapin" est

$$\frac{\binom{35}{1}\times\binom{4}{2}}{\binom{39}{3}}=\frac{210}{9139}=0.0229784$$

c) "exactement 3 hamsters" est

$$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{35}{0}}{\binom{39}{3}}=\frac{4}{9139}$$

Corrigé exercice 2.2.11 Le nombre total de possibilités est

$$\binom{25}{5} = 53130$$

a) Il n'y a qu'une seule manière de choisir 5 femmes ($\binom{5}{5}$), la probabilité est $\frac{1}{53130} = 0.00001882$.

b) Il y a $\binom{20}{4} = 4845$ possibilités de choisir 4 hommes parmi 20 et $\binom{5}{1} = 5$ possibilités de choisir une femme parmi 5 donc

$$\frac{\binom{20}{4} \times \binom{5}{1}}{\binom{25}{5}} = 0.45595$$

Corrigé exercice 2.2.10 On admettra que l'as peut terminer une suite (quinte à l'as), ou débuter une suite (quinte blanche). Il y a dix manières de faire une suite de 5 cartes avec 13 cartes qui se suivent.

Choisissons une des 10 suites possibles, par exemple 2, 3, 4, 5, 6. Pour le deux, nous avons 4 possibilités (trèfle, pique, coeur, carreau). Pour le 3, également et ainsi de suite jusqu'au 6. Ce qui donne en tous 4^5 possibilités. Mais notre calcul tient compte des 4 possibilités de suites royales (même couleur), qu'il faut décompter. En tenant compte des 10 possibilités de suite nous arrivons à

$$10 \times (4^5 - 4) = 10200$$

Le nombre total de possibilités de tirer 5 cartes est $\binom{52}{5}$, la probabilité recherchée est

$$\frac{10 \times (4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} = \frac{5}{1274} = 0.0039$$

Corrigé exercice 2.2.11 Le nombre de possibilités totales de former un comité de 5 personnes parmi 25 est $\frac{25\times24\times23\times22\times21}{5!} = \binom{25}{5} = 53'130$.

a) Il n'y a qu'une seule manière de choisir 5 femmes parmi 5, $\binom{5}{5} = 1$. La probabilité de l'événement est $\frac{\binom{5}{5}}{\binom{25}{5}} = 0.0000188218$.

b) Il y a $\binom{20}{4} = 4845$ possibilités de choisir 4 hommes et 5 possibilités de choisir 1 femme, $\binom{20}{4} \times \binom{5}{1} = 24'225$.
La probabilité recherchée est $\frac{24'225}{53'130} = 0.455957$.

Corrigé exercice 2.2.12

a) Il y a $\begin{pmatrix} 36 \\ 9,9,9,9 \end{pmatrix}$ possibilités de distribuer les cartes aux quatre joueurs. Admettons qu'un joueur ait les 9 cœurs, il y a $\begin{pmatrix} 27 \\ 9,9,9 \end{pmatrix}$ manières possibles de répartir les cartes restantes aux 3 joueurs restants, donc la probabilité que l'un des joueurs reçoive 9 cœurs est :

$$\frac{4\begin{pmatrix} 27 \\ 9,9,9 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 36 \\ 9,9,9,9 \end{pmatrix}} = \frac{1}{23'535'820}$$

Il y a une autre manière de voir les choses, la possibilité d'avoir les 9 cœurs est de 1 pour $\begin{pmatrix} 36 \\ 9 \end{pmatrix} = 94'143'280$, comme il y a 4 joueurs, il y a 4 fois plus de chance, ce qui donne le même résultat.

b) Supposons que chaque joueur ait déjà un roi. Il y a $\begin{pmatrix} 32 \\ 8,8,8,8 \end{pmatrix}$ manières possibles de distribuer le reste des cartes entre les quatre joueurs. Mais les rois peuvent être répartis de 4 ! manières différentes aux quatre joueurs, finalement :

$$\frac{4!\begin{pmatrix} 32 \\ 8,8,8,8 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 36 \\ 9,9,9,9 \end{pmatrix}} = \frac{729}{6545} = 0.111383$$

Corrigé exercice 2.2.13 Les n personnes peuvent avoir leurs anniversaires de 365^n possibilités différentes. Le fait d'avoir au moins deux personnes ayant leurs anniversaires le même jour est l'événement complémentaire qu'aucune des personnes n'ait son anniversaire le même jour qu'une autre. La première personne peut avoir son anniversaire de 365 manières différentes, la deuxième de 364, la troisième de 363 et ainsi de suite... donc la probabilité de l'événement complémentaire (qui en l'occurrence est la même car $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$) est

$$\frac{365 \times 364 \times 363 \times (365-n+1)}{365^n} = \frac{1}{2}$$

La résolution de cette équation donne $n = 23$. Donc, dans un groupe de 24 personnes, il y a plus d'une chance sur deux pour que l'on trouve un anniversaire en commun.

Corrigé exercice 2.2.14 On s'intéresse à l'événement un "client possède une VISA **ou** une American Express". On applique la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Posons

$$P(\text{Visa } \underline{\text{ou}} \text{ Aexpress}) = P(\text{Visa}) + P(\text{Aexpress}) - P(\text{Visa } \underline{\text{et}} \text{ Aexpress}) = 0.61 + 0.24 - 0.11 = 0.74$$

Corrigé exercice 2.2.15 Le diagramme de la situation est : (figure 5)

D'où on tire facilement qu'un élève tirer au hasard porte "une bague <u>ou</u> un collier" avec une probabilité de 0.4 et "une bague <u>et</u> un collier" avec une probabilité de 0.1.
On peut également résoudre le problème en utilisant l'algèbre des ensembles, soit les probabilités :

i) $P(B)$= probabilité de "porter une bague" = 0.20,

ii) $PC)$ = probabilité de "porter un collier" = 0.30,

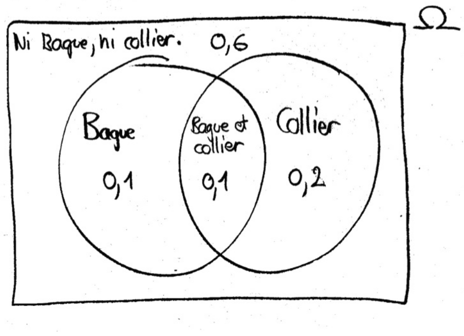

FIGURE 5 – Diagramme exercice 2.2.15

iii) $P(B^c \cap C^c)$ = probabilité de l'événement "ne porte pas de bague et ne porte pas de collier (ni bague, ni collier) = 0.60.

a) On applique la loi de Morgan à l'événement $P(B^c \cap C^c)$, ce qui donne $P(B^c \cap C^c) = P(B \cup C)^c = 0.6$ donc $P(B \cup C) = 1 - P(B \cup C)^c = 1 - 0.6 = 0.4$

b) $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) \xrightarrow{\looparrowright} P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C) = 0.2 + 0.3 - 0.4 = 0.1$

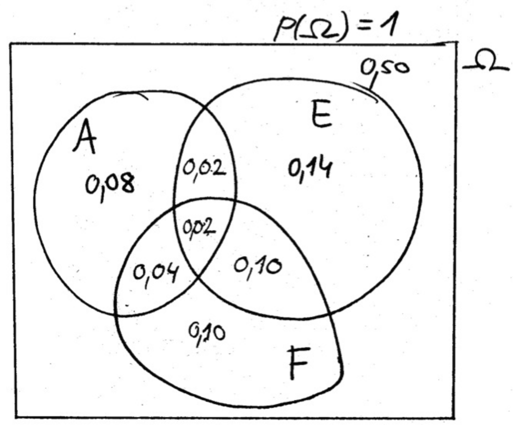

FIGURE 6 – Diagramme exercice 2.2.16

Corrigé exercice 2.2.16 Définissons :

A="parle anglais" ;

E="parle espagnol" ;

F="parle français" ;

avec les probabilités :

$P(A) = 0.16$;

$P(E) = 0.28$;

$P(F) = 0.26$;

$P(A \cap E) = 0.04$;

$P(A \cap F) = 0.06$;

$P(E \cap F) = 0.12$;

$P(A \cap E \cap F) = 0.02$;

a) L'événement "suivre exactement 1 cours de langue" se traduit par l'expression $P(A \cup E \cup F)$ qui vaut :

$$P(A \cup E \cup F) = P(A) + P(E) + P(F) - P(A \cap E) - P(A \cap F) - P(E \cap F) + P(A \cap E \cap F)$$
$$P(A \cup E \cup F) = 0.16 + 0.26 + 0.28 - 0.06 - 0.04 - 0.12 + 0.02 = 0.32$$

b) La probabilité de "ne suivre aucun cours" est l'événement complémentaire d'en suivre "exactement 1 ou exactement 2 ou exactement 3" :

i) Suivre exactement 1 cours est égal $P(A \cup E \cup F) = 0.32$

ii) Suivre exactement 2 cours donnés est égal à la probabilité de suivre l'un et l'autre, moins, la probabilité d'en suivre 3. Cela se traduit par

$$P(A \cap E) - P(A \cap E \cap F) + P(A \cap F) - P(A \cap E \cap F) + P(E \cap F) - P(A \cap E \cap F)$$
$$0.04 - 0.02 + 0.06 - 0.02 + 0.12 - 0.02 = 0.16$$

iii) La probabilité de suivre les 3 cours nous est donnée et vaut $P(A \cap E \cap F) = 0.02$

La somme de i), ii) et iii) vaut 0.50, donc l'événement complémentaire également (1-0.50=0.50).

c) "Au moins un des deux suit un cours" est l'événement complémentaire de "aucun ne suit un cours". Le nombre total de possibilités de tirer 2 élèves est $\binom{100}{2}$ et le nombre de possibilités de tirer 2 élèves ne suivant aucun cours est $\binom{50}{2}$, la probabilité de l'événement complémentaire est :

$$\frac{\binom{50}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{49}{198}$$

la probabilité de l'événement cherché est $1 - \frac{49}{198} = \frac{149}{198} = 0.7525$.

Corrigé exercice 2.2.17

a) Il faut que les 5 premières soient mauvaises et que la sixième soit la bonne, $\frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

b) On additionne les chances qu'il y a, d'ouvrir à la première, à la deuxième et à la troisième tentative :

$$\frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$$

On peut également calculer la probabilité de l'événement complémentaire qui est "ne pas ouvrir lors des 3 premières tentatives" et soustraire cette probabilité à 1.

$$1 - \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

Corrigé exercice 2.2.18 Il faut placer les tours de manière à ce qu'aucune ne puisse prendre une autre, c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver deux tours qui partagent une même ligne ou une même colonne. On peut voir sur le dessin ci-dessous comment procéder. On peut placer la première tour de 64 manières différentes, une fois placée, celle-ci interdit la ligne et la colonne où elle se trouve, c'est-à-dire 15 cases. Il reste alors 49 possibilités pour mettre la seconde, qui à son tour condamne 13 cases. Il reste alors 36 cases de libres pour la quatrième... et ainsi de suite. En étudiant de plus près la série obtenue ($64 \times 49 \times 36 \times 25....$), on se rend compte que l'on peut la traduire par l'expression :

$$\prod_{i=1}^{8} i^2$$

On peut mettre huit tours de $64 \times 63 \times 62 \times 61 \times 60 \times 59 \times 58 =$ manières possible. La probabilité recherchée est donc :

$$\frac{\prod_{i=1}^{8} i^2}{64 \times 63 \times 62 \times 61 \times 60 \times 59 \times 58} = \frac{1.6 \times 10^9}{3.12 \times 10^{12}} = 0.00051$$

Corrigé exercice 2.2.19

a) On a 36 événements différents possibles, on enlève les 6 paires de résultats équivalents (1 ;1)(2 ;2)... Il reste 30 événements dans lesquels la moitié montre le deuxième dé supérieur au premier

$$\frac{36-6-15}{36} = \frac{5}{12}$$

b) On peut également comptabiliser les événements satisfaisants : si le premier dé tombe sur 1, il y a 5 événements favorables, si il tombe sur 2, il y en a 4 et ainsi de suite jusqu'au 5 où il n'en reste plus qu'un. Ce qui donne $5+4+3+2+1 = 15$ sur 36 résultats possibles ce qui donne bien $\frac{5}{12}$.

Corrigé exercice 2.2.20 On a 5 boules rouges, 6 boules bleues et 8 boules vertes.

Tirage sans remise : Le nombre total de possibilités de tirer 3 boules parmi 19 est $\binom{19}{3} = 969$.

a) Toutes de la même couleur signifie "3 rouges ou 3 bleues ou 3 vertes". Les possibilités d'obtenir respectivement 3 rouges, 3 bleues et 3 vertes sont :

$$\binom{5}{3} = 10, \qquad \binom{6}{3} = 20 \text{ et } \qquad \binom{8}{3} = 56$$

La probabilité cherchée est la somme de ces trois valeurs, divisée par le nombre total de possibilités, $\frac{86}{969} = 0.0887513$

b) La probabilité de tirer 3 boules de couleurs différentes est

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{8}{1}}{\binom{19}{3}} = \frac{80}{323} = 0.247678$$

Tirage avec remise : Le nombre total des possibilités de tirer 3 boules est dans ce cas de $19 \times 19 \times 19 = 6859$.

a) Dans un tirage avec remises on aura $5 \times 5 \times 5 = 125$ manières de tirer 3 rouges, $6 \times 6 \times 6 = 216$ manières de tirer 3 bleues et $8 \times 8 \times 8 = 512$ manières de tirer 3 vertes. Le nombre total de possibilités est $19 \times 19 \times 19 = 6859$. La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur dans un tirage avec remise est :

$$\frac{125+216+512}{19 \times 19 \times 19} = \frac{853}{6859} = 0.124362$$

b) Ici on s'intéresse à la somme des probabilités de tirer les suites ordonnées de boules : $RBV, RVB, BRV, BVR, VBR, VI$ Chacune de ces suites de couleurs peut apparaitre avec la même probabilité (on remet les boules après tirage). La probabilité, disons, d'obtenir, la suite RBV est $\frac{5}{19} \times \frac{6}{19} \times \frac{8}{19}$, il suffit de multiplier par 6, qui est le nombre de permutations possibles, pour obtenir le résultat recherché :

$$6 \times \frac{5 \times 6 \times 8}{19^3} = \frac{1440}{6859} = 0.209943$$

Corrigé exercice 2.2.21

a) En se basant sur l'exercice précédent, la probabilité d'avoir deux boules de la même couleur lors d'un tirage sans remise est :

$$\frac{\binom{n}{2}+\binom{m}{2}}{\binom{m+n}{2}}=\frac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}$$

b) La probabilité d'avoir deux boules de la même couleur lors d'un tirage avec remise est :

$$\frac{n^2+m^2}{(n+m)^2}$$

c) Il faut démontrer que a) < b), autrement dit que

$$\frac{n(n-1)+m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}<\frac{n^2+m^2}{(n+m)^2}$$

Le dénominateur commun est$(n+m)^2(n+m-1)$, d'où

$$m^3+m^2n-m^2+mn^2-2mn+n^3-n^2<m^3+m^2n-m^2+mn^2+n^3-n^2$$

$$\iff \quad +n^3-n^2-2mn<+n^3-n^2 \quad \iff \quad -2mn<0, \quad \forall m,n>0$$

Corrigé exercice 2.2.22 Après le marquage, la forêt compte 5 cerfs marqués et 15 cerfs non marqués. La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{15}{2}}{\binom{20}{4}}=\frac{70}{323}=0.2167182$$

Il faut faire attention en utilisant les méthodes intuitives dans ce genre de problème, une faute que l'on commet souvent est la suivante. Calculons la probabilité de choisir dans l'ordre deux cerfs marqués puis deux cerfs non marqués, la probabilité est :

$$\frac{5}{20}\times\frac{4}{19}\times\frac{15}{18}\times\frac{14}{17}=\frac{35}{969}$$

maintenant, vu que l'ordre ne nous intéresse pas, il s'agit de multiplier ce nombre par $\frac{4!}{2!\times 2!}$ et non pas par 4!, comme on serait tenté de le faire.

$$\frac{35}{969}\times\frac{4!}{2!2!}=\frac{70}{323}$$

Corrigé exercice 2.2.23 Le nombre total de mains de 13 cartes dans un jeu de 52 est $\binom{52}{13}=635'013'559'600$. On s'intéresse à la possibilité de n'obtenir que des mains avec des cartes inférieures à dix. Si on enlève toutes les cartes du jeu qui sont égales ou supérieures à dix il en reste $52-(4\times 5)=32$. La probabilité recherchée est

$$\frac{\binom{32}{13}}{\binom{52}{13}}=\frac{5'394}{9'860'459}=0.000547033$$

Corrigé exercice 2.2.24 Les cinq personnes peuvent chacune choisir un hôtel don il y a $5 \times 5 \times 5 = 125$ possibilités. La première personne peut choisir parmi 5 hôtels, la deuxième parmi 4 et la troisième parmi 3. La probabilité cherchée est

$$\frac{5 \times 4 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = 0.48$$

On a ici un problème d'arrangements et non pas de combinaisons, en fait on s'intéresse à l'ordre dans lequel chaque personne peut choisir son hôtel, les hôtels et les personnes doivent être discernés.

Corrigé exercice 2.2.25 Le nombre total de possibilités est $8! = 40320$.
Qu'aucun des couples ne soit assis ensemble est l'événement complémentaire de : "un couple est ensemble ou deux couples sont ensembles ou trois couples sont ensembles ou quatre couples sont assis ensembles". Ce qui se traduit par $P(c1 \cup c2 \cup c3 \cup c4)$ qui vaut :

$$P(c1 \cup c2 \cup c3 \cup c4) = P(c1) + P(c2) + P(c3) + P(c4) -$$

$$-(P(c1 \cap c2) + P(c1 \cap c3) + P(c1 \cap c4) + P(c2 \cap c3) + P(c2 \cap c4) + P(c3 \cap c4)) +$$

$$+(P(c1 \cap c2 \cap c3) + P(c1 \cap c2 \cap c4) + P(c2 \cap c3 \cap c4) + P(c1 \cap c3 \cap c4)) - P(c1 \cap c2 \cap c3 \cap c4)$$

$$P(c1) = P(c2) = P(c3) = P(c4) = \tfrac{7! \times 2!}{8!}$$
$$P(c1 \cap c2) = P(c1 \cap c3) = P(c1 \cap c4) = P(c2 \cap c3) = P(c2 \cap c4) = P(c3 \cap c4) = \tfrac{6! \times 2^2}{8!}$$
$$P(c1 \cap c2 \cap c3) = P(c1 \cap c2 \cap c4) = P(c2 \cap c3 \cap c4) = P(c1 \cap c3 \cap c4) = \tfrac{5! \times 2^3}{8!}$$
$$P(c1 \cap c2 \cap c3 \cap c4) = \tfrac{4! \times 2^4}{8!}$$

Finalement :

$$P(c1 \cup c2 \cup c3 \cup c4) = 4 \times \frac{7! \times 2!}{8!} - 6 \times \frac{6! \times 2^2}{8!} + 4 \times \frac{5! \times 2^3}{8!} - \frac{4! \times 2^4}{8!} = \frac{23}{35}$$

Il faut encore prendre la probabilité complémentaire qui est $1 - \frac{23}{35} = \frac{12}{35}$

Corrigé exercice 2.2.26 (Année 2011) Le nombre de combinaisons possibles de 6 numéros est $\begin{pmatrix} 45 \\ 6 \end{pmatrix} = 8'145'060$.

Etudions les possibilités d'avoir :

6 bons numéros. Le nombre de possibilités d'avoir 6 bons numéros est bien sûr unique,

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 39 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Autrement dit "6 numéros gagnants et aucun autre", la probabilité de gagner est $1/8'145'060 = 1.23 * 10^{-7}$.

5 bons numéros. Le nombre de possibilités est

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 39 \\ 1 \end{pmatrix} = 234$$

c'est à dire 5 numéros gagnants parmi 6 et un numéro parmi les 39 restants, la probabilité est $234/8'145'060 = 0.000028729$

4 bons numéros. Le nombre de possibilités est

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 39 \\ 2 \end{pmatrix} = 11'115$$

La probabilité de gagner est $11'115/8'145'060 = 0.00136463$

3 bons numéros. Le nombre de possibilités est

$$\binom{6}{3}\binom{39}{3} = 182'780$$

La probabilité de gagner est $182'780/8'145'060 = 0.0224406$

2 numéros corrects Le nombre de possibilités d'avoir 2 numéros corrects est

$$\binom{6}{2}\binom{39}{4} = 1'233'765$$

La probabilité de gagner est $1'233'765/8'145'060 = 0.151474$

1 bon numéro. Le nombre de possibilités est

$$\binom{6}{1}\binom{39}{5} = 3'454'542$$

La probabilité de gagner est $3'454'542/8'145'060 = 0.424127$

aucun numéro correct Le nombre de possibilités de n'avoir aucun bon numéro est

$$\binom{6}{0}\binom{39}{6} = 3'263'623$$

La probabilité est $3'263'623/8'145'060 = 0.400565$

On remarquera que l'on a plus de chance d'avoir un bon numéro qu'aucun bon numéro.

Lorsque l'on tient compte du numéro complémentaire (C) les probabilités changent un peu du fait que les numéros non gagnants sont à choisir parmi 38 et non 39 numéros, comme vu ci-dessus.

0) $P(6 \text{ bons numéros }) = \dfrac{\binom{6}{6}\binom{38}{0}\binom{1}{0}}{\binom{45}{6}} = \dfrac{1}{8'145'060} = 1.22774 \times 10^{-7}$

1) $P(5 \text{ bons numéros } + C) = \dfrac{\binom{6}{5}\binom{38}{0}\binom{1}{1}}{\binom{45}{6}} = \dfrac{6}{8'145'060} = 7.36643 \times 10^{-7}$

2) $P(5 \text{ bons numéros }) = \dfrac{\binom{6}{5}\binom{38}{1}\binom{1}{0}}{\binom{45}{6}} = \dfrac{228}{8'145'060} = 0.0000279924$

3) $P(4 \text{ bons numéros } + C) = \dfrac{\binom{6}{4}\binom{38}{1}\binom{1}{1}}{\binom{45}{6}} = \dfrac{570}{8'145'060} = 0.0000699811$

3) $P(4 \text{ bons numéros }) = \dfrac{\binom{6}{4}\binom{38}{2}\binom{1}{0}}{\binom{45}{6}} = \dfrac{10'545}{8'145'060} = 0.00129465$

4) $P(3 \text{ bons numéros }) = \dfrac{\binom{6}{3}\binom{38}{3}\binom{1}{0}}{\binom{45}{6}} = \dfrac{168'720}{8'145'060} = 0.0207144$

Maintenant calculons le nombre de fois qu'il faut jouer pour être raisonnablement sûr de gagner au moins 4 francs (faire "au moins un 3"). Fixons notre "raisonnablement sûr" à 99,5%. "Avoir au moins 3 bons numéros" est l'événement complémentaire de ne "rien gagner du tout". En additionnant les probabilités d'avoir 3, 4, 4+, 5, 5+, 6 bons numéros on obtient 0.0221070, donc la probabilité de ne rien gagner est $1 - 0.0221070 = 0.977893$.

$$1 - 0.977893^n = 0.995 \qquad \longrightarrow \qquad n = 234$$

Il faut jouer 234 fois (plus de deux ans) pour être sûr à 99,5% de gagner quelque chose.

Si on fait le même calcul mais uniquement pour le gros lot on arrive à 43'155'100 jeux, c'est-à-dire qu'il faut jouer pendant 407'000 ans ! ! ! Chaque grille coûte 3.- donc il faut investir 127 millions de francs pour être sûr à 99,5% d'en gagner... moins de 50.
Sans commentaires !

Corrigé exercice 2.2.29 Diagramme : B= "le gorille a les yeux bleus", NB = "le gorille n'a pas les yeux bleus".

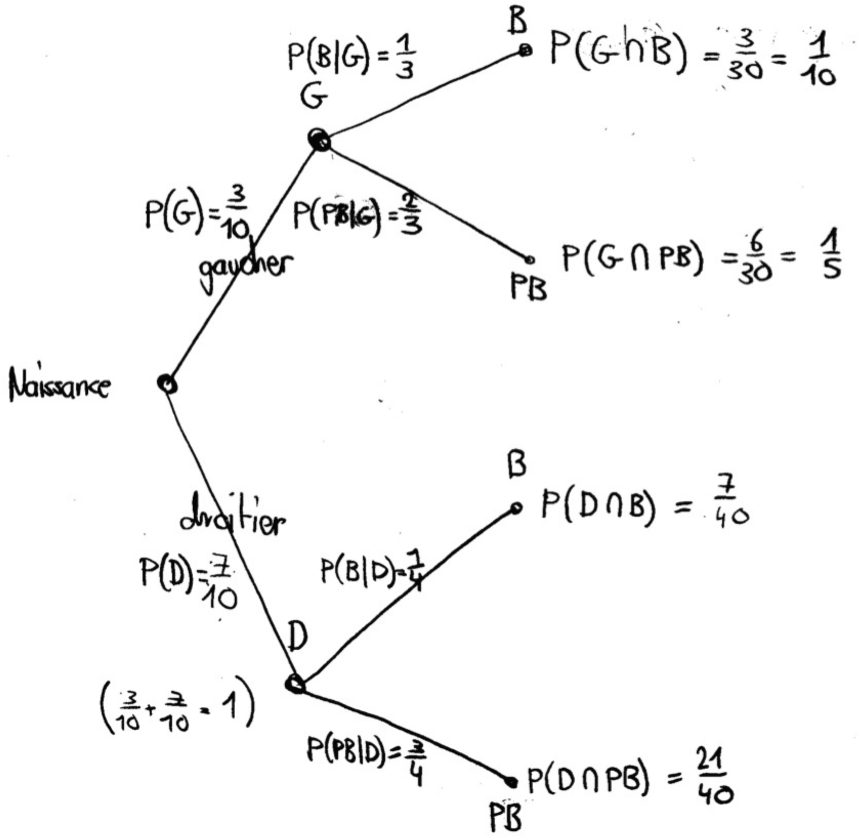

FIGURE 7 – Exercice

a) La probabilité qu'un gorille ait les yeux bleus est $P(B) = \frac{1}{10} + \frac{7}{40} = \frac{11}{40} = 0.275$

b) La probabilité que le gorille soit "gaucher si il a les yeux bleus" est le rapport entre la probabilité d'être" gaucher et avoir les yeux bleus" et la probabilité "avoir les yeux bleus", calculée en a), $P(G|B) = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{7}{40}} = 0.3636$

c) La probabilité d'avoir "au moins un gorille aux yeux bleus" est la probabilité complémentaire de "aucun gorille n'a les yeux bleus", dont la probabilité est $1-0.275=0.725$. La probabilité qu'aucun des six gorilles n'ait les yeux bleus est $0.725^6=0.1452$ donc la probabilité qu'au moins 1 ait les yeux bleus est $1-0.1452=0.8548$.

Voyons à présent la solution purement algébrique, on sait que :

- $P(G)$="probabilité d'être gaucher"=$\frac{3}{10} \Rightarrow P(D)$ ="probabilité d'être droitier"=$\frac{7}{10}$.
- $P(B|G)$ ="probabilité d'avoir les yeux bleus sachant que le gorille est gaucher"=$\frac{1}{3}$.
- $P(B|D)$ ="probabilité d'avoir les yeux bleus sachant que le gorille est droitier"=$\frac{1}{4}$.

point a) On applique la formule des probabilités totales :

$$P(B)=P(B\cap G)+P(B\cap G^c)=P(B\cap G)+P(B\cap D)$$

En utilisant la formule des probabilités conditionnelles aux deux membres de droite on obtient :

$$P(B)=P(B|G)P(G)+P(B|D)P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{7}{10}=\frac{11}{40}$$

point b) Il faut trouver $P(G|B)$. On sait que $P(G|B)=\frac{P(G\cap B)}{P(B)}$ (faisons comme si l'on ne connaissait pas encore $P(B)$)

$$P(G|B)=\frac{P(G\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|G)P(G)}{P(B)}=\frac{P(B|G)P(G)}{P(B|G)P(G)+P(B|D)P(D)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{7}{10}}=0.3636$$

Corrigé exercice 2.2.30 Soit le diagramme :

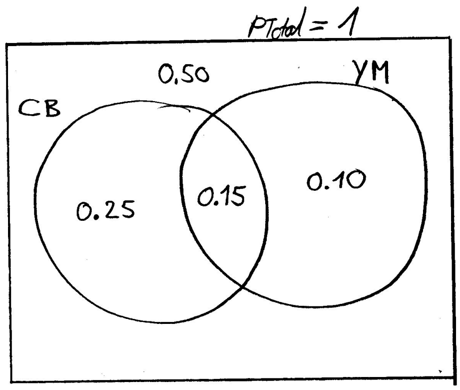

FIGURE 8 – Diagramme exercice 2.2.30

a) $P(a)=0.50$

b) Ici on s'intéresse à la probabilité de l'événement "cheveux bruns si yeux marrons", c'est une probabilité conditionnelle donnée par $P(CB|YM)=\dfrac{P(CB\cap YM)}{P(YM)}=\frac{0.15}{0.25}=\frac{3}{5}=0.60$

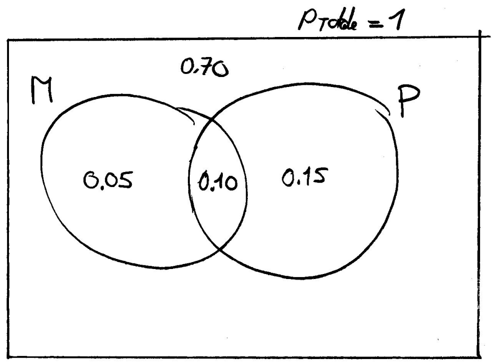

FIGURE 9 – Diagramme exercice 2.2.31

Corrigé exercice 2.2.31 Soit le diagramme :

a) C'est une probabilité conditionnelle, on sait que l'élève est insuffisant en physique, cette probabilité devient la référence, car c'est un fait acquis. La probabilité recherchée est "insuffisant en maths si insuffisant en physique"

$$P(Ma|Ph) = \frac{P(Ma \cap Ph)}{P(Ph)} = \frac{0.10}{0.25} = \frac{2}{5} = 0.40$$

b) On recherche $P(Ph|Ma)$

$$P(Ph|Ma) = \frac{P(Ma \cap Ph)}{P(Ma)} = \frac{0.10}{0.15} = \frac{2}{3} = 0.667$$

Corrigé exercice 2.2.32

a) On sait que le rapport entre les élèves insuffisants et le total d'élève est de $\frac{1}{5}$, notons avec x le nombre d'élèves insuffisants et avec T l'effectif de la classe. On sait donc que

$$P(1 \text{ insuffisant}) = \frac{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{5} \qquad \text{donc que } T = 5x$$

d'autre part

$$P(2 \text{ insuffisants}) = \frac{\begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} T \\ 2 \end{pmatrix}}$$

mais on sait on sait également que $\frac{P(2 \text{ insuffisants})}{P(1 \text{ insuffisant})} = \frac{1}{6}$ donc on pose le système

$$\left[\begin{array}{ll} T & = 5x \\ \dfrac{\left(\dfrac{\frac{x!}{(x-2)!2!}}{\frac{T!}{(T-2)!2!}}\right)}{\frac{1}{5}} & = \dfrac{1}{6} \end{array}\right. \quad \xrightarrow{\text{ↆ}} x = 5 \text{ et } T = 25$$

b) Le droit de tirer plusieurs fois le même élève veut dire tirage avec remise, donc les probabilités des événements sont constantes lors des trois tirages. Au moins "un élève insuffisant" est l'événement complémentaire de "tous les élèves suffisants". La probabilité de tirer un élève ayant une note suffisante est $\frac{25-x}{25}$ où x est le nombre d'élèves ayant une note suffisante. La probabilité de tirer 3 fois de suite un bon élève est $(\frac{x}{25})^3$ et est égale à $0,216$ il nous faut donc résoudre

$$\left(\frac{x}{25}\right)^3 = 0.216 \quad \xrightarrow{\text{♀}} \quad x = 15$$

15 étant le nombre d'élèves ayant une note suffisante, le résultat cherché est 10.

Corrigé exercice 2.2.33

Résolution avec diagramme Soit le diagramme de la figure 10 de la situation

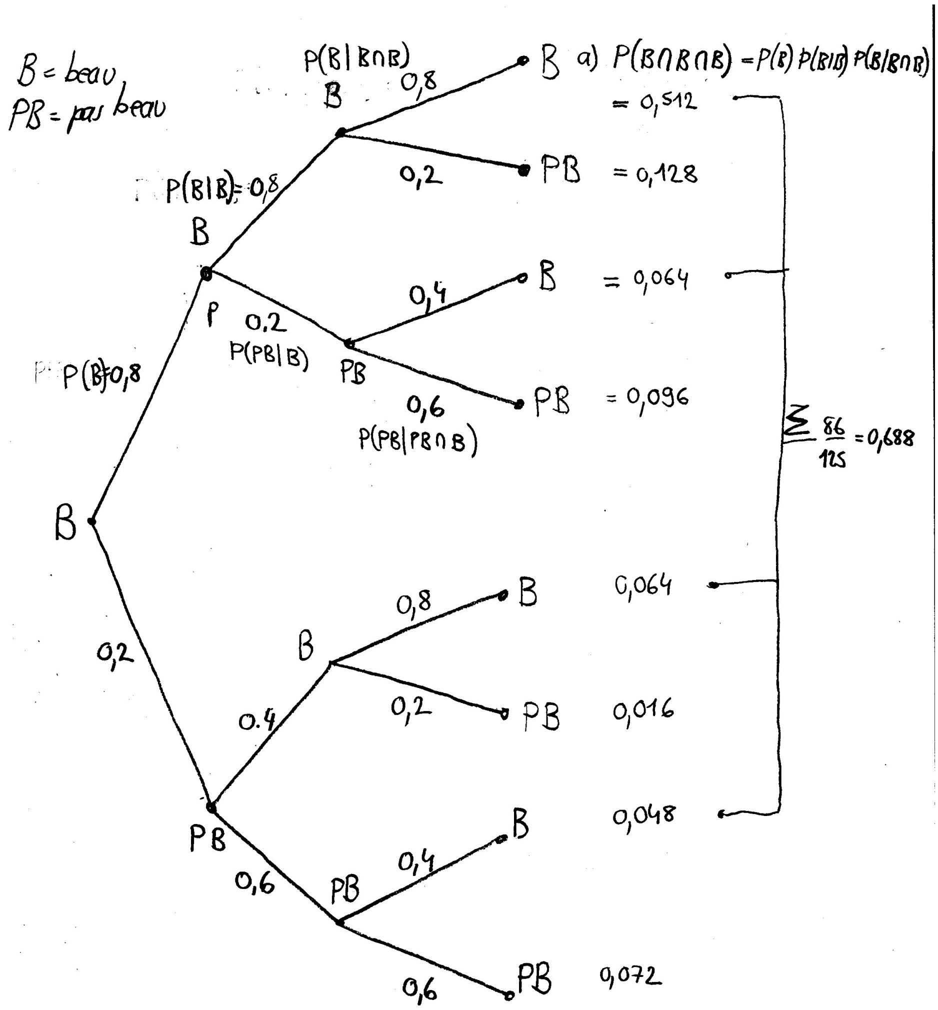

FIGURE 10 – Diagramme exercice 2.2.33

a) Qu'il fasse beau pendant 3 jours correspond à la probabilité

$$P(B \cap B \cap B) = P(B)P(B|B)P(B|B \cap B) = 0.8 \times 0.8 \times 0.8 = 0.521$$

b) Qu'il fasse beau dans 3 jours correspond une addition des probabilités :

$$P(B\cap B\cap B)+P(B\cap PB\cap B)+P(PB\cap B\cap B)+P(PB\cap PB\cap B)=0.688$$

Corrigé exercice 2.2.34 Soit le diagramme de la figure 11.

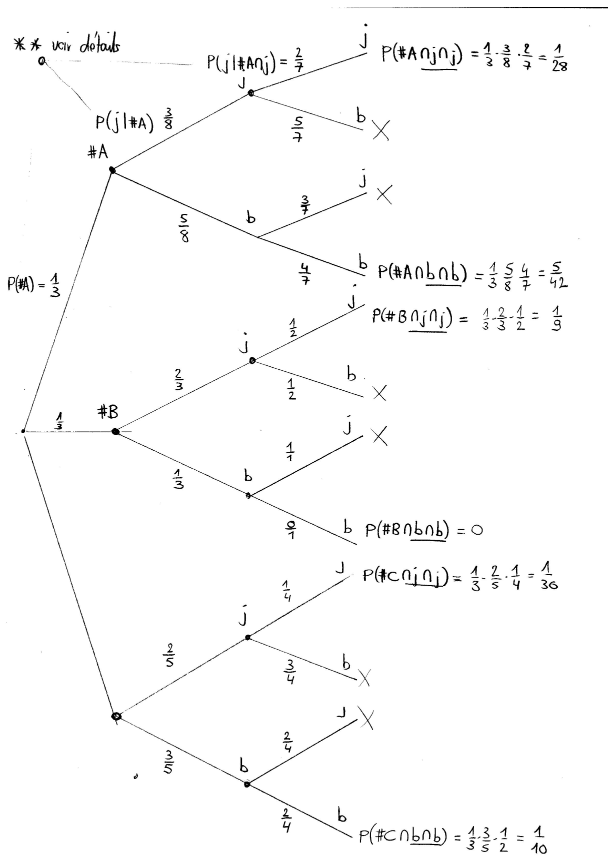

FIGURE 11 – Diagramme exercice 2.2.34

Du diagramme on tire que la probabilité d'avoir deux boules de la même couleur est la somme des probabilités suivantes :

$$P(A\cap \text{ jaune } \cap \text{ jaune })+P(A\cap \text{bleu}\cap \text{bleu})+P(B\cap \text{ jaune } \cap \text{ jaune })+P(B\cap \text{bleu}\cap \text{bleu})+$$
$$+P(C\cap \text{ jaune } \cap \text{ jaune })+P(C\cap \text{bleu}\cap \text{bleu})=\frac{1}{28}+\frac{5}{42}+\frac{1}{9}+\frac{0}{9}+\frac{1}{30}+\frac{1}{10}=\frac{503}{1260}=0.399$$

** Détails

1. $P(A)$ est la probabilité de choisir la boîte A au hasard, c.à.d $\frac{1}{3}$.

2. $P(\text{jaune}|A)$ est la probabilité de tirer une boule jaune si la boîte A à déjà été choisie, cette probabilité vaut $\frac{3}{8}$, on peut poser d'après la théorie des probabilités conditionnelles

$$P(\text{jaune}\,|\,A)=\frac{P(\text{jaune}\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}$$

3. $P(\text{jaune}\,|\,(A\cap j))$ est la probabilité de tirer une boule jaune sachant que l'on a déjà choisi la boîte A et tiré une première boule jaune.

$$P(\text{jaune}\,|\,(A\cap\text{jaune})) = \frac{P(A\cap\text{jaune}\cap\text{jaune})}{P(\text{jaune}\cap A)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}}{\frac{3}{24}} = \frac{2}{7}$$

Corrigé exercice 2.2.35 Diagramme de la situation, figure 12.
"Les personnes suivant ce programme avec succès sont à 60% des femmes" signifie que la probabilité d'être

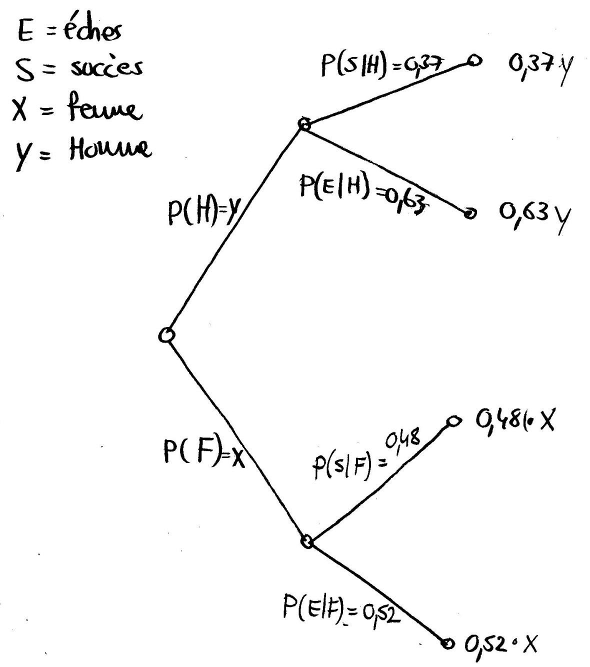

FIGURE 12 – Diagramme exercice 2.2.35

une femme, si la cure de désintoxication est un succès ($P(F|S)$), est de 0.6 (60%).

a) On demande $P(H)$?

$$P(F|S) = 0.6 = \frac{P(F\cap S)}{P(S)} = \frac{0.48\times x}{P(S)} \qquad \text{(probabilités conditionnelles)}$$

On conditionne $P(S)$ à l'aide de la formule de Bayes, (on a posé, $x = P(F)$) :

$$P(S) = P(S|F)P(F) + P(S|H)P(H) = 0.48\times x + 0.37\times(1-x)$$

En substituant on obtient :

$$0.6 = \frac{0.48\times x}{0.48\times x + 0.37\times(1-x)} \quad \xrightarrow{\;\;} \quad x = P(F) = 0.536$$

d'où $P(H) = 0.464$.

b) on demande ici $P(S)$

$$P(S) = P(S|F)P(F) + P(S|H)P(H) = 0.48\times 0.536 + 0.37\times 0.464 = 0.429$$

Corrigé exercice 2.2.36 On sait que :

"daltonien si homme" : $P(D|H) = 0.05$

"daltonien si femme" : $P(D|F) = 0.0025$

"être un homme" : $P(H) = 0.48$

"être une femme" $P(F) = 0.52$

a) On cherche $P(D)$, la probabilité "être daltonien". On peut conditionner $P(D)$:

$$P(D) = P(D|H)P(H) + P(D|F)P(F) = 0.05 \times 0.48 + 0.0025 \times 0.52 = 0.0253$$

b) on cherche $P(H|D)$ autrement dit la probabilité "être un homme si daltonien".

$$P(H|D) = \frac{P(H \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)} = \frac{0.05 \times 0.48}{0.0253} = 0.949$$

Corrigé exercice 2.2.37 On sait que :

"grand si homme" : $P(g|H) = 0.04$

"grand si femme" : $P(g|F) = 0.01$

"être un homme" : $P(H) = 0.40$

"être une femme" $P(F) = 0.60$

a) on cherche $P(g)$, c.à.d. "être grand"

$$P(g) = P(g|F)P(F) + P(g|H)P(H) = 0.01 \times 0.60 + 0.04 \times 0.40 = 0.022$$

b) on cherche $P(F|g)$, qui signifie "être une fille si grand"

$$P(F|g) = \frac{P(g \cap F)}{P(g)} = \frac{P(g|F)P(F)}{P(g)} = \frac{0.01 \times 0.60}{0.022} = 0.2727$$

c) on demande

i) $P(g|H)^{10} = 1.048 \times 10^{-14}$

ii) Qu'au moins un des dix garçons mesure 1.80m ou plus est l'événement complémentaire de "aucun des 10 garçons ne mesure 1.80m ou plus.

$$P(normal|H) = 1 - P(g|H) = 0.96 \longrightarrow 1 - P(normal|H)^{10} = 0.3351$$

iii)

$$P(g = 2) = \binom{10}{2} P(g|H)^2 \times P(normal|H)^8 = 0.05194$$

d) on reprend c)ii) et on pose

$$1 - P(normal|H)^x = 0.0001 \qquad \longrightarrow \qquad x \geqslant 226$$

Corrigé exercice 2.2.38 Le nombre total de possibilités est 36, on doit enlever 6 tirages montrant deux faces identiques, il reste donc 30 combinaisons vérifiant l'événement "les deux résultats sont différents". "Au moins un d'entre eux montre six" (dans les trentes restants) est constitué des couples $(1;6),(2;6),(3;6),(4;6),(5;6),(6;1$ donc 10 occurrences. La probabilité recherchée est par conséquent $\frac{10}{30} = 0.33$.

Corrigé exercice 2.2.39

a) Il y a 6 possibilités sur 15 de tirer une première boule blanche, puis 5 sur 14. Pour les boules noires, on aura 9 choix possibles sur 13 boules et puis 8 choix sur 12 boules pour la dernière. Le résultat est :

$$\frac{6}{15}\frac{5}{14}\frac{9}{13}\frac{8}{12}=\frac{6}{91}=0.0659341$$

Il faut remarquer que la probabilité aurait été la même pour n'importe quel ordre de boules.

b) Si on ne s'intéresse pas à l'ordre il y a $\frac{6!}{2!2!}=6$ permutations possibles entre les boules blanches et noires. La probabilité devient

$$\frac{6}{15}\frac{5}{14}\frac{9}{13}\frac{8}{12}=\frac{6}{91}\times 6=\frac{36}{91}=0.395604$$

c) Dans le cas b) on peut aussi trouver le résultat en se demandant de combien de manières on peut tirer 2 boules parmi 6 et 2 boules parmi 9, ce qui donne :

$$\frac{\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}15\\4\end{pmatrix}}=\frac{36}{91}=0.395604$$

Corrigé exercice 2.2.40 Dans une famille de deux enfants on a les possibilités suivantes : (FF)(FG)(GF)(GG). Le roi appartenant à l'une des 3 dernières possibilités, parmi lesquels 2 comptent une fille, la probabilité est de $\frac{2}{3}$.

Corrigé exercice 2.2.41 La probabilité d'avoir trois piques est donnée par la règle de multiplication :

$$P(p_1\cap p_2\cap p_3)=P(p_1)\times P(p_2|p_1)\times P(p_3|(p_1\cap p_2)=\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}=\frac{11}{850}$$

Ensuite, on aurait tendance à penser que la probabilité de l'événement : «la première est un pique sachant que les deux dernières en sont» est la même chose que, «la troisième est un pique sachant que les deux premières en sont», la probabilité cherchée devrait être de $\frac{11}{50}$. Mais il reste à le prouver.
On sait que l'intersection d'ensemble est une opération commutative, donc les deux équations suivantes sont identiques :

$$P(p_1\cap p_2\cap p_3)=P(p_1)\times P(p_2|p_1)\times P(p_3|(p_1\cap p_2)$$
$$P(p_3\cap p_2\cap p_1)=P(p_3)\times P(p_2|p_3)\times P(p_1|(p_3\cap p_2)$$

Ce que l'on cherche est la valeur de $P(p_1|(p_3\cap p_2))$, donc

$$P(p_1|(p_3\cap p_2))=\frac{P(p_3\cap p_2\cap p_1)}{P(p_2\cap p_3)}$$

En appliquant les lois de l'algèbre des ensembles on peut effectuer la transformation suivante :

$$P(p_2\cap p_3)=P(p_2\cap p_3\cap p_1)+P(p_2\cap p_3\cap p_1^c)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}P(p_1|(p_3\cap p_2)) &= \frac{P(p_3\cap p_2\cap p_1)}{P(p_2\cap p_3)}\\ &= \frac{P(p_3\cap p_2\cap p_1)}{P(p_2\cap p_3\cap p_1)+P(p_2\cap p_3\cap p_1^c)}\\ &= \frac{\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}}{\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{11}{50}+\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}\times\frac{39}{50}}=\frac{11}{50}\end{aligned}$$

Corrigé exercice 2.2.42 On pose :

$P(r_1) = 0.9$ ~ "réussir le 1er examen"

$P(r_2|r_1) = 0.8$ ~ "réussir le 2ème examen sachant que le 1er est réussi"

$P(r_3|r_1 \cap r_2) = 0.7$ ~ "réussir le 3ème sachant que les deux premiers sont réussis".

a) On cherche $P(r_1 \cap r_2 \cap r_3)$. On applique la règle de multiplication :

$$P(r_1 \cap r_2 \cap r_3) = P(r_1) \times P(r_2|r_1) \times P(r_3|r_1 \cap r_2) = 0.9 \times 0.8 \times 0.7 = 0.5040$$

b) On veut connaître la probabilité de l'événement $P(r_2^c|r^c)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(r_2^c|r^c) = \frac{P(r_2^c \cap r^c)}{P(r^c)}$$

Comme les cas intermédiaires tels «réussir uniquement le premier et le troisième examen tout en ratant le deuxième» n'existe pas, la probabilité $P(r^c)$ c'est-à-dire, avoir raté la série d'examens est la probabilité complémentaire de celle trouvée en a) donc, $P(r^c) = 1 - P(r) = 0.496$.

La probabilité $P(r_2^c \cap r^c)$ qui signifie «avoir raté le deuxième examen et rater la série» est identique à «avoir rater le deuxième examen et réussi le premier» donc $P(r_2^c \cap r_1)$.

Finalement :

$$P(r_2^c|r^c) = \frac{P(r_2^c \cap r^c)}{P(r^c)} = \frac{P(r_2^c \cap r_1)}{1 - P(r)} = \frac{0.9 \times 0.2}{1 - 0.5040} = 0.3629$$

La solution est plus facile si on considère le diagramme de la figure 13.

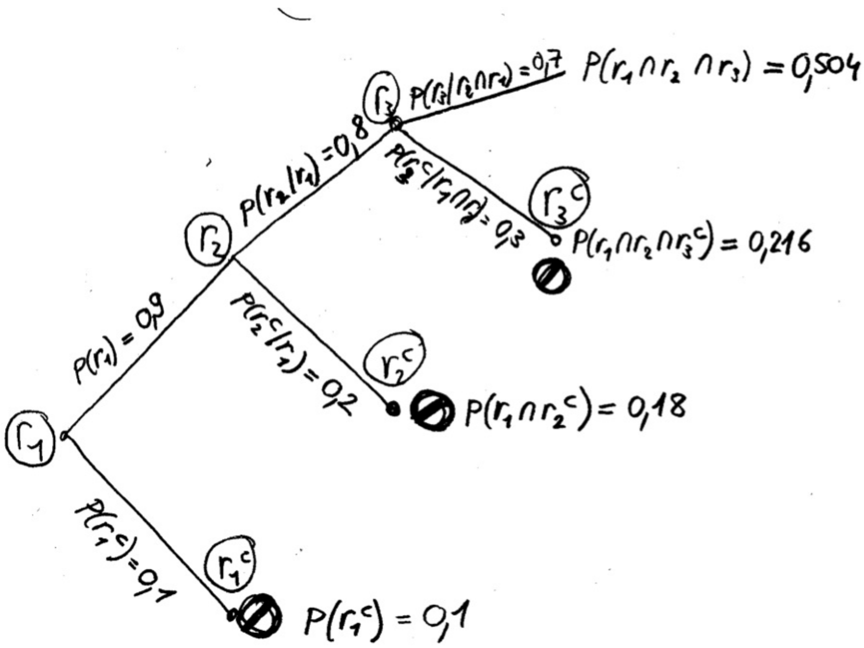

FIGURE 13 – Exercice 2.2.42

Corrigé exercice 2.2.43 Il y a deux manières de résoudre ce problème, par un diagramme (figure 14) et algébriquement :

On connait :

$P(F) = 0.32$ "la femme enceinte est une fumeuse"

$P(F^c) = 0.68$ "la femme enceinte est une non-fumeuse"

$P(E|F) = 2p$ "grossesse ectoplasmique sachant que le femme est une fumeuse"
$P(E|F^c) = p$ "grossesse ectoplasmique sachant que le femme est une non-fumeuse"

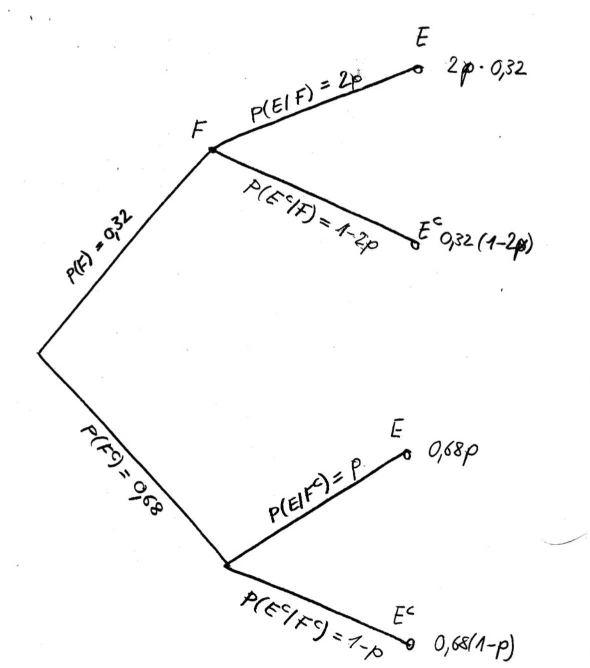

FIGURE 14 – Exercice 2.2.43

On peut tirer du diagramme que la probabilité d'être une fumeuse si la grossesse est ectoplasmique $P(F|E)$ est de $\frac{0.64p}{0.64p+0.68p} = 0.4848$.

Algébriquement, on commence par poser la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)}$$

On voit que la probabilité $P(E)$ nous est inconnue, il faut donc conditionner $P(E)$:

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$$

On obtient la formule de Bayes en substituant la dernière expression dans la précédente :

$$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)} = \frac{0.32 \times 2p}{0.32 \times 2p + 0.68 \times p} = 0.4848$$

Corrigé exercice 2.2.44

$P(\text{chien}) = 0.36$
$P(\text{chat}) = 0.30$
$P(\text{chat}|\text{chien}) = 0.22$

a) La probabilité d'avoir un chien et un chat ($P(\text{chien} \cap \text{chat})$) découle de la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(\text{chat}|\text{chien}) = \frac{P(\text{chat} \cap \text{chien})}{P(\text{chien})} \longrightarrow$$
$$P(\text{chat} \cap \text{chien}) = P(\text{chat}|\text{chien})P(\text{chien}) = 0.22 \times 0.36 = 0.0792$$

b)

$$P(\text{chien}|\text{chat}) = \frac{P(\text{chien}|\text{chat})}{P(\text{chat})} = \frac{0.0792}{0.30} = 0.2640 = 26.4\%$$

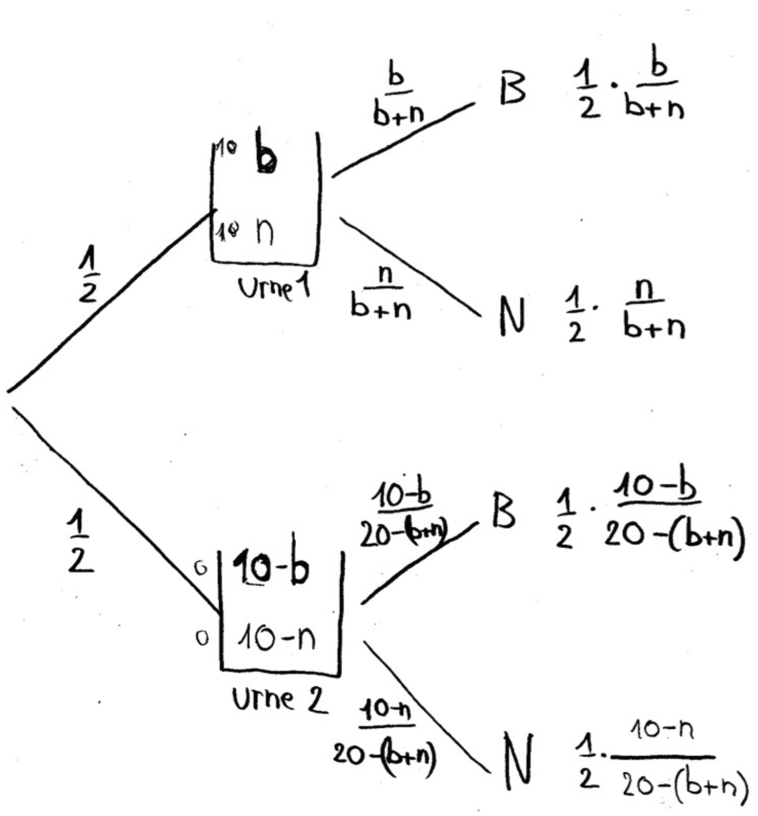

FIGURE 15 – Exercice 2.2.45.

Corrigé exercice 2.2.45 Du dessin on déduit que :

$P(B|U_1) = \frac{1}{2} \times \frac{b}{b+n}$

$P(B|U_2) = \frac{1}{2} \times \frac{10-b}{20-(b+n)}$

Il s'agit de maximiser $P(B) = P(B|U_1) \times P(B|U_2)$.

Il faut remarquer avant tout que si $n = b$ c'est-à-dire que si chaque urne contient des boules blanches et des boules noires en quantité égales, alors toutes les probabilités possibles seront de $P(B) = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \times \frac{b}{b+n} + \frac{1}{2} \times \frac{10-b}{20-(b+n)} \xrightarrow{n=b} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

D'autre part si chaque urne contient exactement 10 boules, c'est-à-dire que $n + b = 10$ dans la première urne alors

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{b}{b+n} + \frac{1}{2} \times \frac{10-b}{20-(b+n)} \xrightarrow{n+b=10} \frac{1}{2} \times \frac{b}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{10-b}{10} = \frac{1}{2}$$

Pour obtenir un résultat plus favorable pour $P(B)$, on remarquera que chaque urne a la même probabilité d'être choisie. Admettons ensuite que l'une des deux urnes ne contienne qu'une boule blanche, si on choisit cette urne, la probabilité de choisir une boule blanche est de 1, donc P(B) aura déjà une valeur de $\frac{1}{2}$, si l'on met les 9 boules blanches restantes avec les 10 boules noires dans l'autre urne, la probabilité de tirer une boule blanche vaudra $\frac{1}{2} \times \frac{9}{19} = 0.2368$. Finalement la probabilité totale de tirer une première boule blanche après avoir choisi une urne sera de $0.5 + 0.2368 = 0.7368$

Corrigé exercice 2.2.46 On peut faire le diagramme suivant : (figure 16)

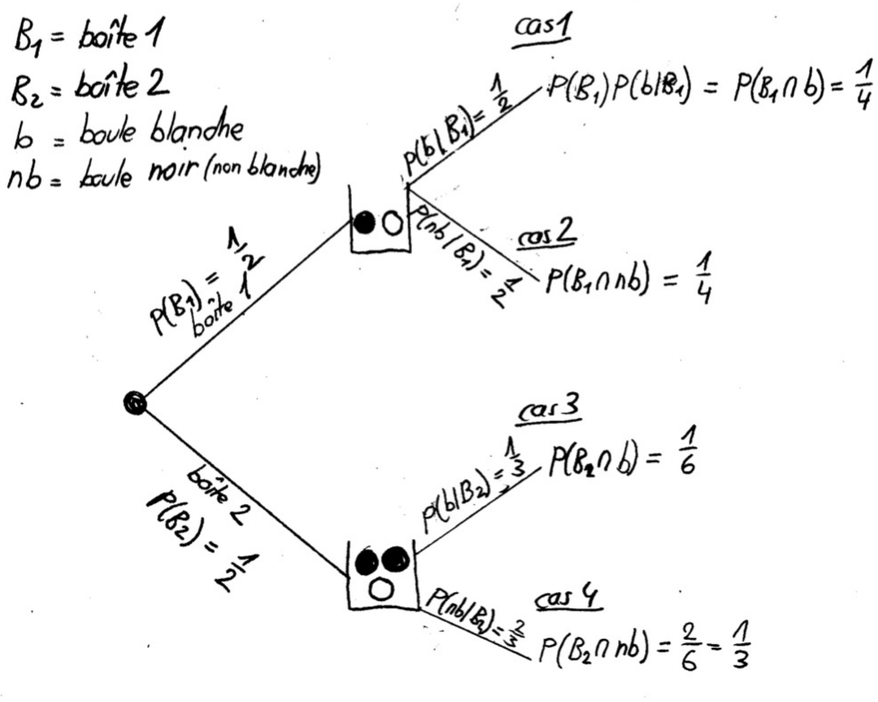

FIGURE 16 – Exercice 2.2.46

La probabilité que la boule tirée soit noire est la somme des probabilités du "cas 2" plus le "cas 4", c'est-à-dire $P(B_1 \cap \text{nb}) + P(B_2 \cap \text{nb}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} = 0.5833$.
Ensuite on s'intéresse à l'événement : "si la boule tirée est blanche, quelle est la probabilité qu'elle vienne de la première boîte" ? Intuitivement, il faut faire le rapport des probabilités, "la boule est blanche et vient de la première boîte" par, "la boule est blanche". La "boule est blanche" est la somme des probabilités $P(b) = P(b|B_1)P(B_1) + P(b|B_2)P(B_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$. Le rapport est donc : $\frac{P(B_1 \cap b)}{P(b)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5} = 0.60$.

En utilisant la formule des probabilités conditionnelles et la formule de Bayes, on a :

$$P(B_1|b) = \frac{P(B_1 \cap b)}{P(b)} = \frac{P(b|B_1)P(B_1)}{P(b|B_1)P(B_1) + P(b|B_2)P(B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{5}{12} = 0.60$$

Corrigé exercice 2.2.47

$P(A) = 0.50$; $P(B) = 0.30$; $P(C) = 0.20$;

En posant r="gâteau mal cuit" alors : $P(r|A) = 0.02$; $P(r|B) = 0.03$ et $P(r|C) = 0.05$.

On s'intéresse à $P(A|r)$ ou encore "si un gâteau est mal cuit, quelle est la probabilité que A soit le responsable". D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(A|r) = \frac{P(A \cap r)}{P(r)} = \frac{P(r|A)P(A)}{P(r)}$$

Comme on connaît $P(A), P(B)$ et $P(C)$, on peut conditionner $P(r)$ de la façon suivante :

$$P(r) = P(r|A)P(A) + P(r|B)P(B) + P(r|C)P(C) = 0.02 \times 0.5 + 0.03 \times 0.3 + 0.05 \times 0.2 = 0.029$$

En substituant dans l'équation plus haut on obtient :

$$P(A|r) = \frac{P(r|A)P(A)}{P(r)} = \frac{P(r|A)P(A)}{P(r|A)P(A) + P(r|B)P(B) + P(r|C)P(C)} = \frac{0.02 \times 0.5}{0.029} = 0.3448$$

34,48% des gâteaux mal cuits peuvent être attribués à A.

Corrigé exercice 2.2.48

$P(G)$ = "être un garçon" = $\frac{10}{16+x}$;
$P(F)$ = "être une fille" = $\frac{6+x}{16+x}$;
$P(1A)$ = "être en première année" = $\frac{10}{16+x}$;
$P(2A)$ = "être en deuxième année" = $\frac{6+x}{16+x}$;
$P(G|1A)$ = "être un garçon sachant que l'élève est en première année" = $\frac{4}{10}$;
$P(F|1A)$ = "être une fille sachant que l'élève est en première année" = $\frac{6}{10}$;

Il s'agit de trouver le nombre de filles (x) de deuxième année ($2A$), tel que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$P(G \cap 1A) = P(G) \times P(1A) \tag{1}$$

On commence par calculer $P(G \cap 1A)$,

$$P(G \cap 1A) = P(G|1A)P(1A) = \frac{4}{10} \times \frac{10}{16+x} = \frac{4}{16+x}$$

et on résout,

$$\frac{4}{16+x} = \frac{10}{16+x} \times \frac{10}{16+x} \quad \xrightarrow{\looparrowright} \quad x = 9$$

On peut vérifier ensuite l'indépendance des événements.

Corrigé exercice 2.2.49 On pose :

rH = "reine hémophile" ;
H = "fils hémophile" ;
nH = "fils non-hémophile".

On a les probabilités :

$P(rH) = \frac{1}{2}$;
$P(H) = \frac{1}{2}$;
$P(nH) = \frac{1}{2}$.

Soit la figure 17.

a) Par le diagramme : On peut tout de suite déduire de la figure 2.2.49 la probabilité qui nous intéresse qui est

$$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{9} = 0.1111$$

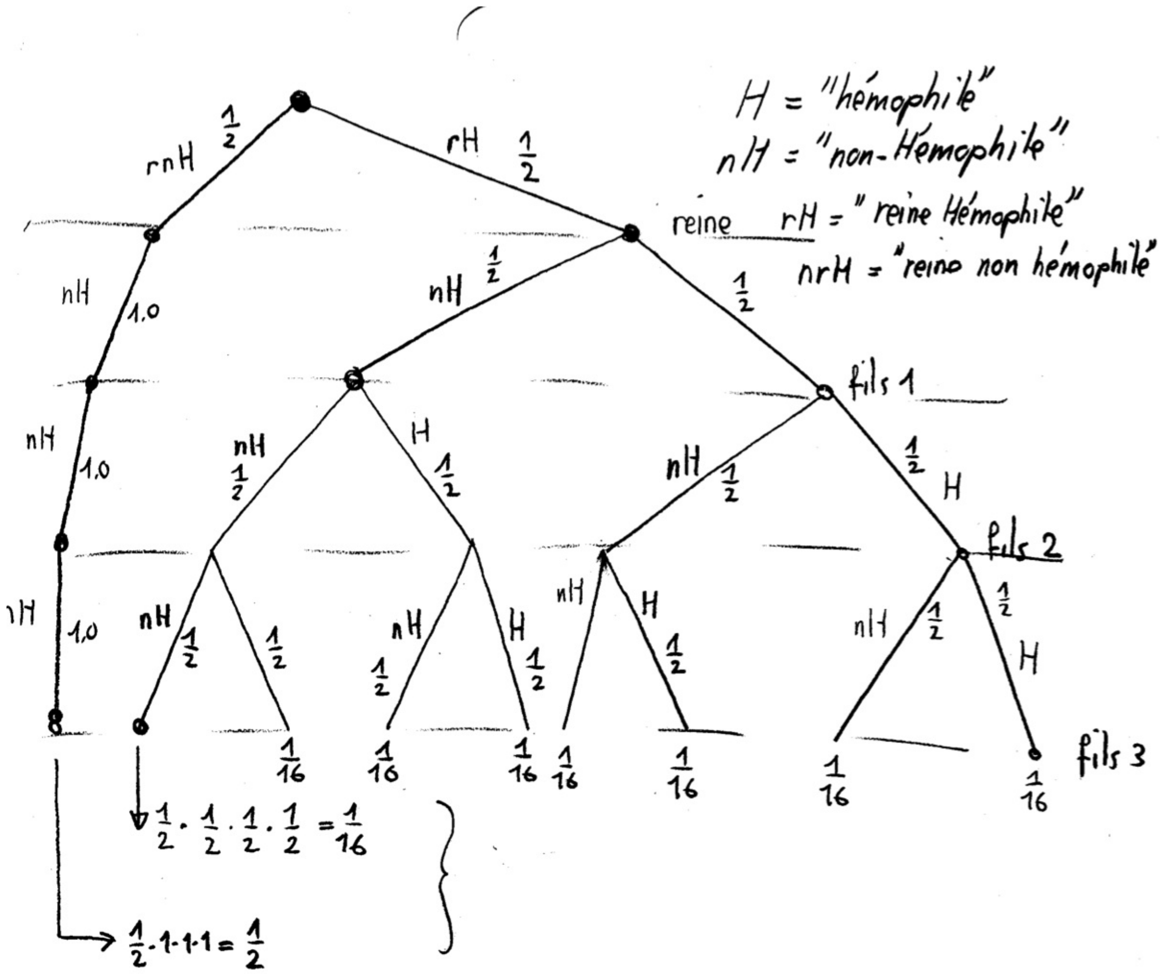

FIGURE 17 – Exercice 2.2.49

a) Algébiquement : On veut $P(rH|(nH\cap nH\cap nH)$, on applique les formules des probabilités conditionnelles et la formule de Bayes (pour le dénominateur) :

$$\begin{aligned}
P(rH|nH\cap nH\cap nH) &= \frac{P(rH\cap nH\cap nH\cap nH)}{P(nH\cap nH\cap nH)}\\
&= \frac{P(rH\cap nH\cap nH\cap nH)}{P(nH\cap nH\cap nH\cap rH)+P(nH\cap nH\cap nH\cap rH^c)}\\
&= \frac{P(rH\cap nH\cap nH\cap nH)}{P(nH\cap nH\cap nH|rH)P(rH)+P(nH\cap nH\cap nH|rH^c)P(rH^c)}\\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times1\times1\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Corrigé exercice 2.2.50 On a $P(G)=P(F)=\frac{1}{2}$.

a) Les événements "avoir un fils" et "avoir une fille " sont indépendants, donc

$$P(G\cap G\cap G\cap G\cap G\cap G)=P(G)\times P(G)\times P(G)\times P(G)\times P(G)\times P(G)=\frac{1}{32}$$

$$P(F \cap F \cap F \cap F \cap F \cap F) = P(F) \times P(F) \times P(F) \times P(F) \times P(F) \times P(F) = \frac{1}{32}$$

Comme les deux événements nous conviennent, la probabilité recherchée est $\frac{1}{16}$.

b) Il n'y a que $P(G \cap G \cap G \cap F \cap F) = \frac{1}{32}$ qui convienne.

c) Ici, les possibilités qui conviennent sont plus nombreuses car les 3 garçons peuvent naître de $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10$ manières différentes, par conséquent le résultat sera : $10 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$. On notera que le résultat est le même si on cherche la probabilité qu'il y ait exactement deux filles car $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) Ici, c'est plus simple de raisonner en termes de combinaisons, on a déjà "fixé" deux garçons comme étant les aînés. Il reste à pourvoir les trois dernières places. Il y a $2^3 = 8$ manières de considérer les 3 derniers enfants, donc la probabilité recherchée est $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

e) "Au moins une fille" est l'événement complémentaire de "pas de fille du tout" ou, autrement dit, "que des garçons", donc $1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$.

On peut également résoudre ce problème en utilisant la *loi binomiale*.

Corrigé exercice 2.2.51 Soit la figure : (figure 18)

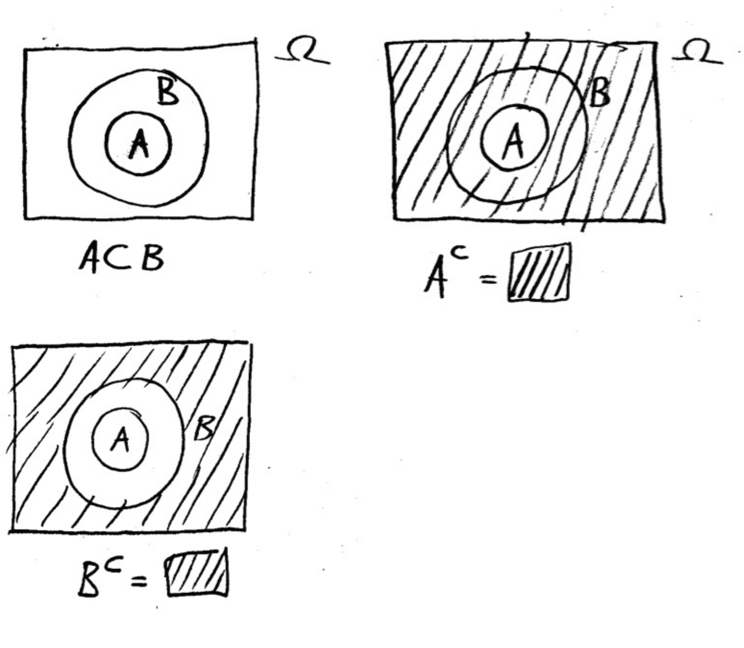

FIGURE 18 – Exercice 2.2.51

a) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$;

b) $P(A|B^c) = 0$;

c) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$;

Corrigé exercice 2.2.52 Il n'est pas toujours nécessaire de faire un diagramme, dans les cas simples il suffit de bien poser les données et la résolution se fait de manière très rapide, posons : A="le voisin arrose la plante" ; nA="le voisin oublie d'arroser la plante" ; †= "la plante meurt" ; v= "la plante survit".

$P(A) = 0.90$;

$P(\dagger|A) = 0.15$;
$P(\dagger|nA) = 0.80$;
$P(nA) = 0.10$;
$P(v|A) = 0.85$;
$P(v|nA) = 0.20$.

a) La probabilité que la plante soit vivante au retour est $P(v)$, que l'on trouve en conditionnant $P(v)$ à l'aide des événements complémentaires A et nA.

$$P(v) = P(v|A)P(A) + P(v|nA)P(nA) = 0.85 \times 0.90 + 0.20 \times 0.10 = 0.785$$

b) On cherche $P(nA|\dagger)$.

$$P(nA|\dagger) = \frac{P(\dagger \cap A)}{P(\dagger)} = \frac{P(\dagger|nA)P(nA)}{P(\dagger|A)P(A) + P(\dagger|nA)P(nA)} = \frac{0.8 \times 0.1}{0.15 \times 0.90 + 0.8 \times 0.1} = 0.372$$

Corrigé exercice 2.2.53 On sait que $P(A|B) = 1$, en réécrivant de manière différente on obtient que :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(B)$$

Ensuite, il faut prouver que dans ces conditions $P(B^c|A^c) = 1$. On réécrit en utilisant la loi de Morgan,

$$P(B^c|A^c) = \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P((B \cup A)^c)}{P(A^c)}$$

En appliquant alors la loi des probabilités complémentaires à l'expression $P((B \cup A)^c)$

$$P((B \cup A)^c) = 1 - P(B \cup A) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(B) = 1 - P(A) = P(A^c)$$

d'où l'on tire finalement, en substituant la dernière expression dans celle du dessus,

$$P(B^c|A^c) = \frac{P(A^c)}{P(A^c)} = 1$$

Corrigé exercice 2.2.54 On peut traduire le problème par l'équation

$$\frac{\binom{4}{2} + \binom{x}{2}}{\binom{4+x}{2}} = \frac{6 + \frac{x(x-1)}{2!}}{\frac{(4+x)(3+x)}{2!}} = \frac{7}{15} \quad \xrightarrow{\text{↬}} \quad x = 2 \text{ ou } x = 6$$

Pourquoi y a-t-il deux valeurs ? Essayez de comprendre le graphe ci-dessous. (figure 19)

Corrigé exercice 2.2.55 Soit : p="pile" ; f="face" ; n="pièce normale" et n^c=pièce truquée.
$P(p|n) = \frac{1}{2}$;
$P(p|n^c) = 1$;
$P(f|n) = \frac{1}{2}$;
$P(f|n^c) = 0$.

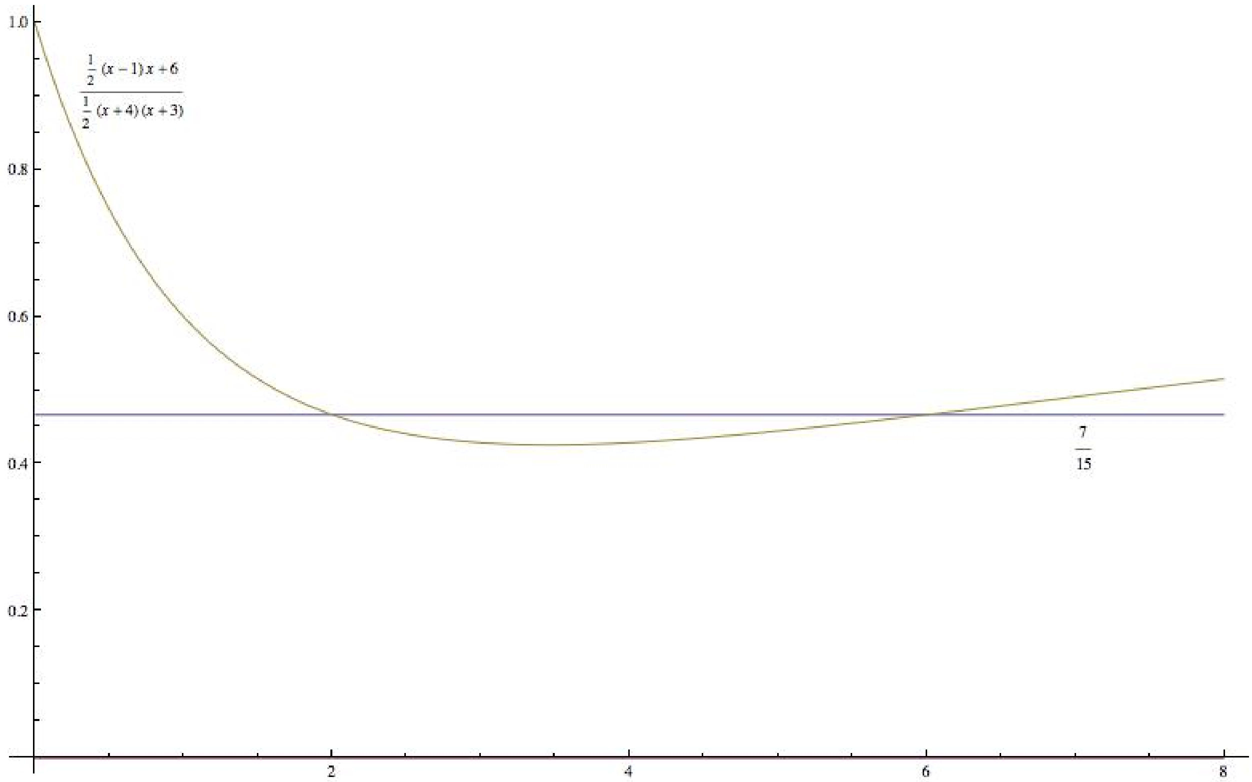

FIGURE 19 – Exercice 2.2.54

a) Intuitivement, il y a une chance sur trois que le "pile" obtenu vienne de la pièce normale. Ce que l'on peut prouver de la manière suivante :

On cherche la probabilité conditionnelle $P(n|p)$: ("pièce normale sachant que pile est sorti").

$$P(n|p) = \frac{P(n\cap p)}{P(p)} = \frac{P(p|n)P(n)}{P(p)} = \frac{P(p|n)P(n)}{P(p|n)P(n)+P(p|n^c)P(n^c)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

b) Le fait de répéter l'expérience une nouvelle fois ne change en rien la probabilité de l'événement $P(n|p)$, on peut donc sans autre calculer la probabilité qui nous intéresse en posant $P(n|2p) = P(n|p)\times P(n|p) = \frac{1}{9}$.

Corrigé exercice 2.2.56 On définit, v="voyelle",A="anglais", US="américain". La probabilité d'apparition d'une voyelle dans le mot "rigour" écrit par un anglais est $P(v|A) = \frac{1}{2}$ et la probabilité d'apparition d'une voyelle dans le mot "rigor" écrit par un américain est $P(v|US) = \frac{2}{5}$. On sait que la probabilité d'être anglais est 0.4 et celle d'être américain 0.6. On utilise les probabilités conditionnelles et la formule de Bayes pour calculer la probabilité cherchée $P(A|v)$, soit

$$P(A|v) = \frac{P(A\cap v)}{P(v)} = \frac{P(v|A)(P(A)}{P(v|A)P(A)+P(v|US)P(US)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}}{\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{6}{10}} = \frac{5}{11}$$

Corrigé exercice 2.2.57

a) Le nombre de possibilités de tirer deux boules rouges est $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = 45$ et le nombre total de possibilités de tirer 2 boules parmi les 14 que contient la boîte est $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = 91$. La probabilité recherchée vaut

$$P(2r) = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{45}{91} = 0.4945$$

b) Ici l'ordre importe. Il y a une probabilité de $\frac{10}{14}$ de tirer une rouge puis une probabilité de $\frac{4}{13}$ de tirer une bleue. En appliquant le principe fondamental de dénombrement on a $\frac{10}{14} \times \frac{4}{13} = \frac{20}{91} = 0.2197$.

c)

$$\frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{40}{91} = 0.4395$$

La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes parmi 10 boules rouges et (4+x) boules bleues est donnée par

$$\frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4+x \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 14+x \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{10(4+x)}{\frac{(14+x)(13+x)}{2!}} = \frac{20(x+4)}{x^2+27x+182}$$

Nous obtenons la fonction

$$f : x \mapsto \frac{20(x+4)}{x^2+27x+182}$$

dont le graphe se trouve à la figure 20.

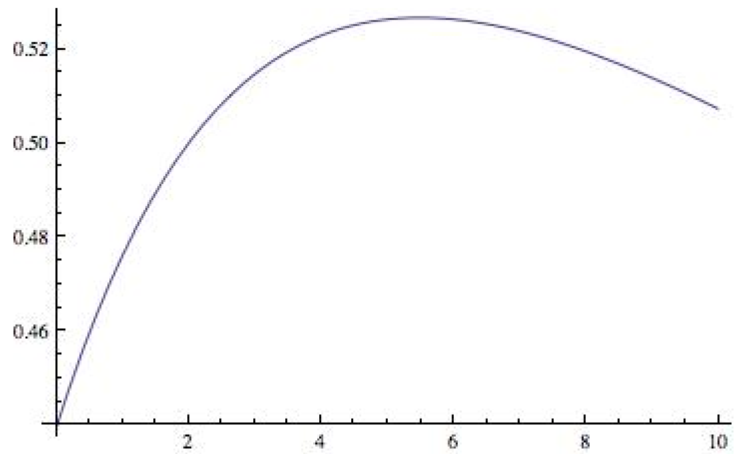

FIGURE 20 – Exercice 2.2.57

On voit que le maximum est entre cinq et six. Pourquoi n'est-ce pas un résultat entier ?
(On pourrait également chercher $f'(x)$ et égaler à zéro, on obtiendrait la valeur exacte qui est $x = 5.48$).

Corrigé exercice 2.2.58

a) C'est la somme des possibilités de tirer 2 blanches et 2 noires divisée par le nombre total de possibilités de tirer 2 boules de la boîte.

$$P = \frac{\binom{7}{2}+\binom{9}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{19}{40} = 0.475$$

b) Le nombre total de possibilités de tirer des boules de même couleur est $\binom{7}{2}+\binom{9}{2} = 57$. Le nombre de possibilités de tirer deux blanches est $\binom{7}{2} = 21$ donc, le nombre de cas favorables est 21 et le nombre de cas possibles est 57, d'où le résultat $\frac{21}{57} = 0.3684$.

c) "Avoir déjà tiré deux boules blanches" est un fait acquis, après ça il reste 5 boules blanches sur 14 au total dans la boîte, donc la probabilité cherchée est $\frac{5}{14}$.

d) "Avoir au moins une boule noire" (donc, en avoir une, deux ou trois) est l'événement complémentaire de n' "avoir que des boules blanches", dont la probabilité vaut :

$$\frac{\binom{7}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{35}{364} = 0.0962$$

en calculant le complément à 1 de cette valeur on obtient $(1-0.0962) = 0.9038$.

i) Il y a à présent x boules blanches et $x+2$ boules noires dans la boîte. La probabilité de tirer deux boules de la même couleur, de cette boîte, est donnée par :

$$p(x) = \frac{\binom{x}{2}+\binom{x+2}{2}}{\binom{2x+2}{2}} = \frac{x(x-1)+(x+2)(x+1)}{(2x+2)(2x+1)} = \frac{x^2+x+1}{2x^2+3x+1}$$

ii) En dérivant $p(x)$ et en résolvant $p'(x) = 0$ on obtiendra la valeur souhaitée.

$$p'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x+1)^2(2x+1)^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 2.73205$$

Ce qui donne $2(2.73)+2 = 7.46$ boules . On mettra donc 3 boules blanches et 5 boules noires dans la boîte.

Corrigé exercice 2.2.59 On pose les événements, lC="lune est croissante", lD="lune est décroissante", p="le pêcheur attrape du poisson" et pp="le pêcheur n'attrape pas de poisson".
Les probabilités associées à ces événements sont $P(lC) = \frac{1}{2}$, $P(lD) = \frac{1}{2}$, $P(p|lC) = \frac{3}{5}$ et $P(pp|lD) = \frac{1}{3}$.

a) On cherche P(p), que l'on conditionne avec les événements complémentaires lC et lD :

$$P(p) = P(p|lC)P(lC) + P(p|lD)P(lD) = P(p|lC)P(lC) + (1-P(pp|lD)P(lD) =$$

$$= \frac{3}{5}\times\frac{1}{2} + (1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{2} = \frac{19}{30} = 0.6363$$

b) On cherche $P(lC|pp)$:

$$P(lC|pp) = \frac{P(pp|lC)P(lC)}{P(pp)} = \frac{P(pp|lC)P(lC)}{1-P(p)} = \frac{\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}}{1-0.6333} = \frac{6}{11} = 0.545454$$

c) La probabilité de rentrer bredouille en période de lune croissante est $P(pp|lC)$,

$$P(pp|lC) = \frac{P(pp \cap lC)}{P(lC)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} = 0.40$$

donc pour une durée de trois heures $P = 0.40^3 = 0.064$.

d) Ici, on ne peut pas simplement poser $P(p|lD)^3$, car ce serait la probabilité d'attraper du poisson la première heure, la deuxième heure et la troisième heure. Le calcul direct serait très long, car il faudrait tenir compte de toutes les possibilités combinées d'attraper du poisson durant ces trois heures. Il est beaucoup plus simple de passer par la probabilité complémentaire qui est "ne pas attraper de poisson durant trois heures" et qui vaut $P(pp|lD)^3 = \frac{1}{27}$. La probabilité qui nous intéresse est la probabilité complémentaire donc $(1 - \frac{1}{27}) = \frac{26}{27} = 0.9629$

e) En période de lune décroissante, la probabilité d'attraper du poisson est $P(p|lD) = (1 - P(pp|lD)) = \frac{2}{3}$. Il est à nouveau beaucoup plus simple de passer par la probabilité complémentaire de ne pas attraper de poisson durant n heures. Il s'agit de chercher la valeur de n dans les expressions,

$$P(pp|lD)^n = 0.001 \text{ ou plus simplement } P = 1 - P(pp|lD)^n = 0.999$$

en passant par les logarithmes on obtient $n = 6,2877$ donc environ 6h20.

Corrigé exercice 2.2.60

a) Dans ce cas il sort soit, 3 hamster et 0 souris grise, 2 hamster et 1 souris grise, 1 hamster et 2 souris grises ou finalement 3 souris grises. L'ordre d'apparition ne compte pas on utilise donc les combinaisons. Premièrement on calcule le nombre de possibilités totales de sorties qui est $\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix} = 455$.

$$P = \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{24}{91} = 0.2637.$$

a) Autre méthode plus simple : Il s'agit de choisir 3 animaux parmi 10 (15-5 souris blanches) donc $P(A) = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{120}{455} = 0.2637.$

b) C'est la somme des événements "un hamster et deux autres rongeurs" plus "deux hamsters et un autre rongeur" plus "trois hamsters". Les "autres" sont choisis parmi 5 souris blanches + 7 souris grises (12 "autres").

$$P(B) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{47}{91} = 0.5164$$

c)

$$P(C) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{3}{13} = 0.2307$$

d) Le diagramme de la figure 21 est la partie centrale du diagramme de toute l'expérience. C'est la partie qui nous intéresse, c'est-à-dire celle qui commence par la sortie d'un hamster. Le calcul de la probabilité $P(C)$ est très facile sur un tel diagramme

$$P(C) = \frac{P(h \cap sb \cap sb)}{P(h)} = \frac{\frac{3}{15} \times \frac{5}{14} \times \frac{4}{13}}{\frac{3}{15}} = \frac{10}{91} = 0.1099$$

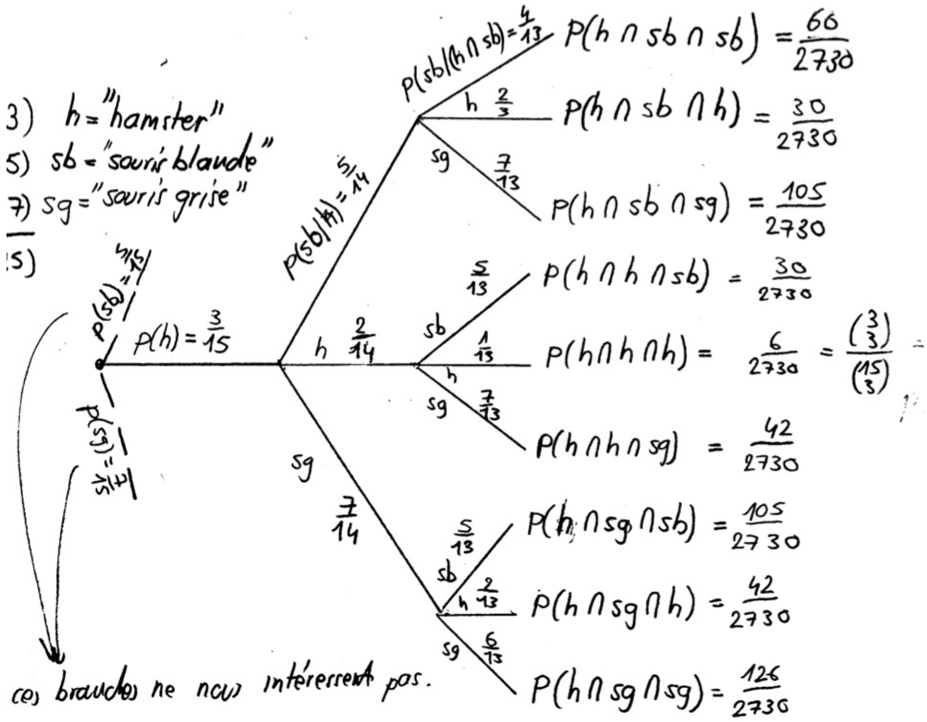

FIGURE 21 – Exercice 2.2.60

Corrigé exercice 2.2.61 Les indices $_1$ et $_2$, précisent l'origine du tirage, c'est-à-dire de l'urne $u1$ ou $u2$.

a) On cherche la somme des probabilités suivantes $P(r_1 \cap j_2) + P(v_1 \cap j_2) + P(j_1 \cap j_2)$.
En appliquant la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(j_2|r_1)P(r_1) + P(j_2|v_1)P(v_1) + P(j_2|j_1)P(j_1) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{19}{60} = 0.3167$$

b) On cherche la sommes des probabilités $P(r_1 \cap r_2) + P(v_1 \cap v_2) + P(j_1 \cap j_2)$.
De même :

$$P(r_2|r_1)P(r_1) + P(v_2|v_1)P(v_1) + P(j_2|j_1)P(j_1) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{23}{60} = 0.3833$$

c) On cherche la probabilité $P(r_1|v_2)$.
On a :

$$P(r_1|v_2) = \frac{P(v_2 \cap r_1)P(r_1)}{P(v_2)} = \frac{P(v_2|r_1)P(r_1)}{P(v_2|r_1)P(r_1) + P(v_2|v_1)P(v_1) + P(v_2|j_1)P(j_1)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{13}{30}} = \frac{6}{13} = 0.4615$$

On peut également résoudre l'exercice facilement en se référent au schéma simplifié de la figure 22.

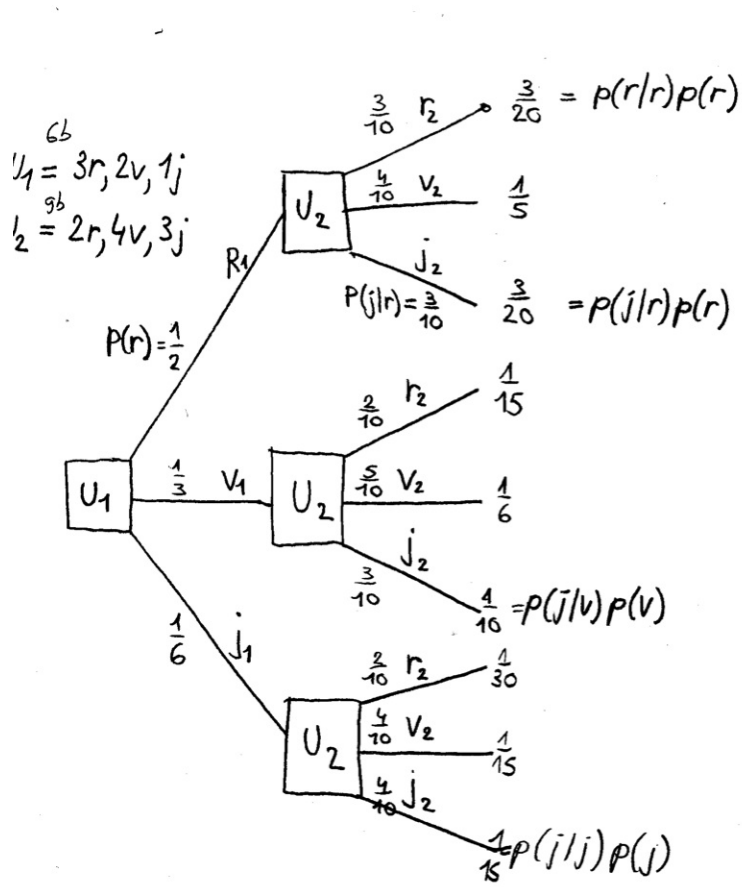

FIGURE 22 – Exercice 2.2.61

Corrigé exercice 2.2.62 Soit les événements :

X = "porteur du bacille" ;

nX = "non-porteur du bacille" ;

$+$ = "test positif".

On connait les probabilités suivantes :

$P(X) = 0.10$;

$P(nX) = 0.90$;

$P(+|X) = 0.90$;

$P(+|nX) = 0.05$;

a) "Obtenir, au moins 1 porteur de bacilles à 90-95% " est l'événement complémentaire de "n'obtenir aucun porteur de bacilles dans une proportion de 5-10% ".

$$0.1 < P(nX)^p \leqslant 0.05 \quad \xrightarrow{\Leftrightarrow} \quad 0.1 < P(nX)^p \text{ et } P(nX)^p \leqslant 0.05$$

$$0.1 < P(nX)^p \xrightarrow{\Leftrightarrow} 0.1 < 0.90^p \xrightarrow{\Leftrightarrow} p > 21.85$$

$$P(nX)^p \leqslant 0.05 \xrightarrow{\Leftrightarrow} 0.90^p \leqslant 0.05 \xrightarrow{\Leftrightarrow} p \leqslant 28.43$$

Donc il faut prendre entre 22 et 28 personnes.

b) On cherche la probabilité de l'événement " être porteur de bacilles si le test est positif " autrement dit $P(X|+)$.

$$P(X|+) = \frac{P(X \cap +)}{P(+)} = \frac{P(X \cap +)}{P(+ \cap X) + P(+ \cap nX)} = \frac{P(+|X)P(X)}{P(+|X)P(X) + (+|nX)P(nX)} =$$

$$= \frac{\frac{9}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{9}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \times \frac{9}{10}} = \frac{2}{3} = 0.6667$$

Le test n'est donc pas concluant du tout. Cela vient du fait que l'apparente «petite erreur» de 5% du test, se répercute sur 90% des gens sains.

Corrigé exercice 2.2.63

S = "connaître la réponse" ;

nS = "ne pas connaître la réponse" ;

J = "donner la réponse juste".

On connait les probabilités suivantes :

$P(S) = \frac{1}{3}$;

$P(nS) = \frac{2}{3}$;

$P(J|nS) = \frac{1}{5}$;

$P(J|S) = 1$;

On nous demande de trouver la probabilité de l'événement : «le candidat ne connaissait pas la réponse, bien qu'il ait répondu de manière correcte», probabilité qui se traduit par $P(nS|J)$.

$$P(nS|J) = \frac{P(nS \cap J)}{P(J)} = \frac{P(J|nS)P(nS)}{P(J|S)P(S) + P(J|nS)P(nS)}$$

ce qui donne

$$P(nS|J) = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{3}} = \frac{2}{7} = 0.2857$$

Corrigé exercice 2.2.64 Il existe les possibilités suivantes :
(G = "garçon" ; F = "fille")

(G,G)

(G,F)

(F,G)

(F,F)

"Un des enfants est un garçon" signifie que l'ensemble fondamental est : {(G,G)(G,F)(F,G)}

a) L'autre enfant étant plus jeune, le garçon dont on nous parle dans l'énoncé est l'aîné et l'ensemble fondamental se réduit à {(G,G),(G,F)}. Il y a donc une chance sur deux pour que l'autre enfant soit également un garçon.

b) Si l'on ne sait rien, les chances que l'autre enfant soit également un garçon sont de une sur trois.

Corrigé exercice 2.2.65 Il y a 8 verres en bon état donc il faut choisir 3 verres parmi ces huit, ce qui donne le rapport :

$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{14}{55} = 0.2545$$

On peut également résoudre ce problème de la manière suivante : définissons les événements a_1, a_2 et a_3 de la manière suivante :

a_1 = "le premier verre est en bon état" ;

a_2 = "le deuxième verre est en bon état" ;
a_3 = "le troisième verre est en bon état".
On cherche alors la probabilité de l'événement $P(a_1 \cap a_2 \cap a_3)$, qui vaut :

$$P(a_1 \cap a_2 \cap a_3) = P(a_1) \times P(a_2|a_1) \times P(a_3|(a_1 \cap a_2) =$$
$$= \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55} = 0.2545$$

Corrigé exercice 2.2.66 L'ensemble fondamental est :

$$\Omega = \{(PPP),(PPF),(PFP),(FPP),(FPF),(PFF),(FFP),(FFF)\}$$

Les ensembles A, B,C et les intersections $(A \cap B)$, $(A \cap C)$, $(B \cap C)$ valent :

$$A = \{(FPP),(FPF),(FFP),(FFF)\}; \qquad B = \{(PFP),(PFF),(FFP),(FFF)\};$$
$$C = \{(PFF),(FFP)\}; \qquad (A \cap B) = \{(FFP),(FFF)\};$$
$$(A \cap C) = \{(FFP)\} \qquad (B \cap C) = \{(FFP),(PFF)\}$$

Il faut étudier les assertions,
i) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \xrightarrow{\looparrowright} \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, l'assertion est juste, les événements A et B sont indépendants.
ii) $P(A \cap C) = P(A) \times P(C) \xrightarrow{\looparrowright} \frac{1}{8} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ l'assertion est juste, A et C sont indépendants.
iii) $P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \xrightarrow{\looparrowright} \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$, l'assertion est fausse, les événements A et B sont indépendants.

Corrigé exercice 2.2.67 Il faut tester l'assertion $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

a) La famille à deux enfants :
Dans ce cas l'ensemble fondamental est {(GG),(GF),(FG),(FF)} avec A={(GF),(FG)}, B={(GF),(FG),(FF)} et $A \cap B$={(GF),(FG)}.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$$

L'assertion est fausse.

b) La famille à trois enfants :
L'ensemble fondamental est {(GGG),(GGF),(GFG),(FGG),(FFG),(FGF)(GFF)(FFF)} avec A={(GGF),(GFG),(FGG),(FFG),(FGF)(GFF)}, B={(FFG),(FGF),(GFF),(FFF)} et $A \cap B$={(FFG),(FGF),(GFF)}.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$$

L'assertion est juste.

Corrigé exercice 2.2.68

a) Le nombre de parties est égal au nombre de paires différentes que l'on peut former avec 14 éléments, c'est-à-dire :

$$\binom{14}{2} = 91$$

Le nombre de parties mixtes peut être trouvé en retirant du nombre total de parties, le nombre de parties entre personnes du même sexe :

$$\binom{14}{2} - \left(\binom{8}{2} + \binom{6}{2}\right) = 91 - (28 + 15) = 48$$

On peut également se dire que chacun des 8 hommes peut jouer avec chacune des 6 femmes donc $8 \times 6 = 48$.

b) Le nombre total de manières de tirer 4 personnes d'un groupe de 14 est $\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix} = 1001$. Le nombre de possibilités d'obtenir deux hommes parmi 8 est $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 28$ et pour les femmes le même raisonnement nous donne $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 15$ possibilités. La probabilité recherchée sera donc :

$$\frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{60}{143} = 0.4195$$

De manière plus intuitive on peut tirer deux hommes puis deux femmes, mais ce faisant on crée un ordre, deux hommes puis deux femmes. Pour corriger cette erreur, il suffit de multiplier le résultat par $\frac{4!}{2!\times 2!} = 6$, qui est le nombre de configurations possibles que l'on obtient avec deux hommes et deux femmes.

$$\frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} \times \frac{5}{11} \times 6 = \frac{60}{143} = 0.4195$$

c) On applique la formule des probabilités conditionnelles après avoir défini les événements suivants :

H = "Michel arrive à l'heure" ;

T = "Michel doit prendre le train" ;

Avec les probabilités suivantes : (Voir également figure 23)

$P(T) = \frac{4}{5}$ "Michel attrape le train" ;

$P(T^c) = \frac{1}{5}$ "Michel rate le train" ;

$P(H|T) = 1$ "Michel arrive à l'heure sachant qu'il prend le train" ;

$P(H|T^c) = \frac{3}{5}$ "Michel est à l'heure sachant qu'il a raté le train" ;

$P(H^c|T^c) = \frac{2}{5}$ "Michel arrive en retard sachant qu'il a raté son train".

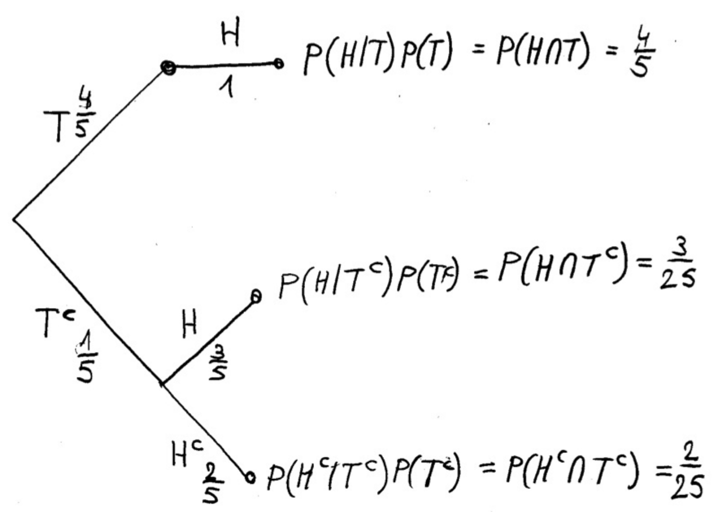

FIGURE 23 – Exercice 2.2.68

On nous demande la probabilité de l'événement $P(T^c|H)$, on applique la formule de Bayes :

$$P(T^c|H) = \frac{P(T^c \cap H)}{P(H)} = \frac{P(H|T^c)P(T^c)}{P(H|T)P(T) + P(H|T^c)P(T^c)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{5}}{\frac{1}{1} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5}} = \frac{3}{23} = 0.1304$$

Corrigé exercice 2.2.69 On pose Ee = "éléphant endormi" et on travail en décamètres pour simplifier.

a) On sait que :

$P(<1) = \frac{1}{5}$ "probabilité que l'éléphant approche à moins de 1dm"

$P(<2) = \frac{3}{5}$ "probabilité que l'éléphant approche à moins de 2dm"

$P(<3) = \frac{9}{10}$ "probabilité que l'éléphant approche à moins de 3dm"

$P(Ee|d<1) = \frac{7}{10}$ "probabilité d'endormir la bête sachant que d<1dm"

$P(Ee|1<d<2) = \frac{1}{2}$ "probabilité d'endormir la bête sachant que 1<d<2dm"

$P(Ee|2<d<3) = \frac{3}{10}$ "probabilité d'endormir la bête sachant que 2<d<3dm"

$P(Ee|d<3) = 0$ "probabilité d'endormir la bête sachant que d>3dm"

On cherche $P(Ee)$. On va conditionner cette événement par rapport aux probabilités d'approche. Il faut cependant déterminer avant tout quels sont les probabilités d'approche $P(d<1)$, $P(1<d<2)$ et $P(2<d<3)$.

On a le système :

$$\left[\begin{array}{llll} P(<1)+ & P(1<d<2)+ & P(2<d<3) & = P(<3) = \frac{9}{10} \\ P(<1)+ & P(1<d<2)+ & 0 & = P(<2) = \frac{3}{5} \\ P(<1)+ & 0+ & 0 & = P(<1) = \frac{1}{5} \end{array}\right.$$

d'où :

$P(<1) = \frac{1}{5}$

$P(1<d<2) = \frac{2}{5}$

$P(2<d<3) = \frac{3}{10}$

Finalement :

$$P(Ee) = P(Ee|d<1)P(<1) + P(Ee|1<d<2)P(1<d<2) + P(Ee|2<d<3)P(2<d<3)$$

$$P(Ee) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{43}{100} = 0.43$$

La probabilité d'endormir un éléphant qu'il rencontre est $P(Ee) = 0.43$.

b)i) La probabilité d'endormir deux éléphants sur les quatre qu'il rencontre peut être calculée de plusieurs façons. Choisissons la méthode de la variable binomiale $P(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ avec $n=4$, $i=2$ et $p=0.43$.

$$P(Ee=2) = \binom{4}{2} (0.43)^2 (1-0.43)^{(4-2)} = 0.3604$$

b)ii) "Endormir au moins un éléphant est l'événement complémentaire de "n'endormir aucun éléphant". On peut l'écrire :

$$P(Ee = 1) = 1 - (P(Ee = 0))^4$$

ce qui donne $P(Ee = 1) = 1 - (1 - 0.43)^4 = 0.8944$.

b)iii) $(1 - 0.43)(1 - 0.43)(1 - 0.43)0.43 = 0.0796$

Corrigé exercice 2.2.70

a) La probabilité de tirer une boule blanche de l'urne A est $P(b) = \frac{3}{8}$.

b) La probabilité d'avoir deux boules blanches est $P(b_A \cap b_B) = P(b_B|b_A)P(b_A)$. Le résultat du tirage effectué dans la première urne n'influence en rien le tirage dans la seconde, les événements sont indépendants donc $P(b_A \cap b_B) = P(b_B)P(b_A)$. En faisant le même raisonnement pour le cas des deux boules noires on a $P(n_A \cap n_B) = P(n_B)P(n_A)$. La probabilité qui nous intéresse est la somme des deux :

$$P(b_A \cap b_B) + P(n_A \cap n_B) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Le prisonnier a intérêt à choisir la première solution.

Corrigé exercice 2.2.71

a) "Obtenir au moins une fois un six" est l'événement complémentaire de "n'avoir pas de six du tout" dont la probabilité est $\frac{5}{6}$. La probabilité recherchée est :

$$P(\text{au moins une fois six}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} = 0.5177$$

b) Le nombre d'événements possibles en lançant deux dés est de 36 dont 35 cas défavorables qui nous intéressent. Si on lance 24 fois le dé, 4 fois plus qu'avant puisqu'il y a 4 fois plus de réalisations possibles, on aura :

$$P(\text{au moins une fois un double six}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914$$

Si on s'intéresse à la probabilité d'avoir "au moins une fois une tierce de six" en lançant 144 fois trois dés on aura :

$$P(\text{avoir au moins une fois un triple six}) = 1 - \left(\frac{215}{216}\right)^{144} = \frac{671}{1296} = 0.4873$$

Si on calcule pour n dés et que l'on veut connaître la probabilité d'avoir "au moins une fois que des six en lançant $\frac{2}{3} \times 6^n$ fois n dés", on obtient :

$$P(n) = 1 - \left(\frac{6^n - 1}{6^n}\right)^{\frac{2}{3} \times 6^n}$$

En calculant la limite pour n tendant vers l'infini on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 - \left(\frac{6^n - 1}{6^n}\right)^{\frac{2}{3}\times 6^n}\right] \overset{\looparrowright}{=} 1 - \left(\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{2}{3}} \overset{\looparrowright}{=} 1 - e^{-\frac{2}{3}} = 0.486583$$

c) La probabilité d'obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé unique est de $\frac{671}{1296} = 0.5177$. Afin d'obtenir la même probabilité avec l'événement "lancer x fois deux dés et obtenir au moins un double six", il faut résoudre l'équation suivante pour x (nombre de lancers nécessaires) :

$$1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^x = \frac{671}{1296}$$

Résolution :

$$\begin{aligned}1-\left(1-\frac{1}{36}\right)^x &= \frac{671}{1296}\\ \left(1-\frac{1}{36}\right)^x &= \frac{625}{1296}\\ \left(\frac{35}{36}\right)^x &= \frac{625}{1296}\\ x &= \log_{\frac{35}{36}}\left(\frac{625}{1296}\right)=25.8\approx 26\end{aligned}$$

On voit que pour avoir une probabilité égale il faut exécuter presque 2 lancers de plus avec deux dés (26), que le nombre de lancers "supposé" (24).
Que se passe-t-il ? La situation semble pourtant homothétique à première vue. Avec un seul dé, l'ensemble fondamental $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$ a un cardinal de six, on lance le dé 4 fois donc le rapport entre le nombre de tirage et Ω_1 vaut $\frac{2}{3}$. Dans le deuxième cas, l'ensemble fondamental $\Omega_2=\{(1,1),(1,2),(2,2)..(5,6),(6,6)\}$ est de cardinal 36 et le nombre de tirages de 24, donc à nouveau un rapport de $\frac{2}{3}$. La probabilité de succès dans le premier cas est de $p(6)=\frac{1}{6}$ et dans le deuxième cas de $p((6,6))=\frac{1}{36}$? Oui, mais j'effectue 6 fois plus de tirages donc ça devrait compenser !
Eh bien non ! Nous n'avons pas à faire à des fonctions linéaires, mais à des fonctions exponentielles et logarithmiques comme on peut le voir ci-dessus. Donc l'apparent paradoxe peut-être levé.

Si par exemple on fait le calcul de lancers supplémentaires nécessaires pour $n=10$, c'est-à-dire pour un ensemble fondamental de cardinal $6^{10}=60,466,176$, il faudra effectuer $3,781,216$ tirages supplémentaires que les $6^{10}\cdot\frac{2}{3}=40,310,784$ prévus pour arriver à la probabilité $\frac{671}{1296}=0.5177$.

Corrigé exercice 2.2.72 Posons f = "fille" et n = "nombre d'élèves".
La probabilité $P(f)=\frac{f}{n}=\frac{2}{5}$, on sait également que $P(f\cap f)=\frac{5}{32}$.

$$P(f\cap f)=P(f|f)P(f)=\frac{f-1}{n-1}\times\frac{f}{n}=\frac{5}{32}$$

En substituant $f=\frac{2\times n}{5}$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient que $f=26$ et $n=65$.

Autre méthode La probabilité de tirer deux filles est également donnée par

$$\frac{\begin{pmatrix}f\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}n\\2\end{pmatrix}}=\frac{5}{32}$$

En développant, on arrive exactement à la même expression que ci-dessus :

$$\frac{\begin{pmatrix}f\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}n\\2\end{pmatrix}}=\frac{\frac{f!}{(f-2)!2!}}{\frac{n!}{(n-2)!2!}}=\frac{f(f-1)}{n(n-1)}=\frac{f-1}{n-1}\times\frac{f}{n}=\frac{5}{32}$$

Corrigé exercice 2.2.73

a) 2 caméras sur 50 sont défectueuses donc la probabilité $P(r1)$ (renvoyé au premier contrôle) est de $\frac{2}{50}=0.04$. Notons en passant que la probabilité de passer le premier contrôle est $P(p1)=1-P(r1)=1-\frac{2}{50}=\frac{48}{50}=0.96$.

b) Le lot doit passer le premier contrôle et rater le deuxième, donc $P(p1 \cap r2)$. La probabilité de rater le 2e test si le premier est réussi, qui se traduit par $P(r2|p1)$, est de $\frac{2}{49} = 0.04081$. On applique la formule des probabilités conditionnelles et on trouve

$$P(p1 \cap r2) = P(r2|p1) \cdot P(p1) = \frac{2}{49} \cdot 0.96 = 0.03918$$

c) On nous demande $P(r1) + P(p1 \cap r2) + P(p1 \cap p2 \cap r3)$. On connaît déjà les deux premiers termes, le troisième, qui signifie : passer les deux premiers tests et rater le troisième, se traduit par

$$P(p1 \cap p2 \cap r3) = P(r3|p1 \cap p2) \cdot P(p1 \cap p2)$$

$P(r3|p1 \cap p2)$ (raté le troisième test si le lot a passé les deux premiers) vaut $\frac{2}{48} = 0.04166$. $P(p1 \cap p2)$ qui est la probabilité de réussir les deux premiers tests est $\frac{48}{50} \cdot \frac{47}{49} = 0.9208$. Donc

$$P(p1 \cap p2 \cap r3) = P(r3|p1 \cap p2) \cdot P(p1 \cap p2) = 0.04166 \cdot 0.9208 = 0.03836$$

Finalement, $P(r1) + P(p1 \cap r2) + P(p1 \cap p2 \cap r3)$ qui est la probabilité pour que le lot soit renvoyé vaut $0.04 + 0.03918 + 0.03836 = 0.1175$.
On peut résoudre ce problème beaucoup plus facilement en s'inspirant de l'arbre de la figure **??**.

FIGURE 24 – Exercice **??**

d) On voit assez clairement en regardant la figure **??** que la solution est :

$$\frac{2}{50} + \frac{48}{50} \cdot \frac{2}{50} + \frac{48}{50}^2 \cdot \frac{2}{50} = 0.1152.$$

Ce qui est très proche du résultat obtenu sous c).

Corrigé exercice 2.2.74

a) Les possibilités de choisir 3 vaccins parmi $5+8+15 = 28$ est de $\binom{28}{3} = 3276$. Les possibilités de choisir 3 vaccins contre la maladie X sont de $\binom{5}{3} = 10$. Le quotient entre les cas favorables et les cas possibles est de

$$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{28}{3}} = \frac{10}{3276} = 0.0031.$$

b) On fait le même raisonnement avec les vaccins contre les maladies Y et Z puis on additionne les 3 valeurs (ou=+) et on divise par 3276,

$$\frac{\binom{5}{3} + \binom{8}{3} + \binom{15}{3}}{\binom{28}{3}} = \frac{10 + 56 + 455}{3276} = 0.1590.$$

c) Si l'on désirait en premier le vaccin contre la maladie Y puis ensuite celui contre la maladie Z et finalement le vaccin contre la maladie X, on aurait :

$$\frac{8}{28} \cdot \frac{15}{27} \cdot \frac{5}{26} = \frac{25}{810}$$

mais en agissant de cette manière on introduit un ordre (Y, Z puis pour finir X). Comme l'ordre des vaccins est indifférent dans notre problème on peut rectifier l'erreur en multipliant par 3! = 6, qui est le nombre de permutations des 3 lettres X,Y et Z, ce qui donne

$$\frac{25}{819} \cdot 3! = 0.1832.$$

On peut également utiliser directement les combinaisons et écrire

$$\frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 28 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{600}{3276} = 0.1832.$$

Corrigé exercice 2.2.75 On peut s'inspirer de l'arbre de la figure **??**. La probabilité qu'il touche (T) la cible au k-ème tir est $P(Tk) = \frac{0.8}{2^{k-1}}$. La probabilité qu'il rate (R) la cible au k-ème tir est $P(Rk) = 1 - P(Tk) = 1 - \frac{0.8}{2^{k-1}}$.

a) Toucher la cible trois fois de suite en trois tirs équivaut à l'expression

$$P(T1) \cdot P(T2) \cdot P(T3) = \frac{0.8}{2^0} \cdot \frac{0.8}{2^1} \cdot \frac{0.8}{2^2} = 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.064.$$

b) <Au moins une fois en trois tir> est la probabilité complémentaire de <aucune fois en trois tirs> c'est-à-dire

$$1 - P(R1 \cap R2 \cap R3) = 1 - \left[\left(1 - \frac{0.8}{2^0}\right)\left(1 - \frac{0.8}{2^1}\right)\left(1 - \frac{0.8}{2^2}\right)\right] = 0.904$$

c) En appliquant la formule des probabilités conditionnelles ou tout simplement en observant l'arbre, on trouve

$$P(R1|R3) = \frac{P(R1 \cap R3)}{P(R3)} =$$

$$= \frac{P(R1 \cap R2 \cap R3) + P(R1 \cap T2 \cap R3)}{P(R1 \cap T2 \cap R3) + P(R1 \cap R2 \cap R3) + P(T1 \cap T2 \cap R3) + P(T1 \cap R2 \cap R3)} =$$

$$= \frac{0.064 + 0.096}{0.064 + 0.096 + 0.256 + 0.384} = \frac{5}{25} = 0.2$$

d)

Corrigé exercice 2.2.76 M=médecins, AT=administratif ou technique, S=soignants, H=homme, F=femme. De l'énoncé, on nous donne ou on peut déduire facilement, les indications suivantes :

$P(M) = 0.12$

$P(S) = 0.71$

$P(AT) = 1 - 0.12 - 0.71 = 0.17$

$P(H|M) = 0.67$

$P(F|M) = 1 - 0.67 = 0.33$

$P(F|S) = 0.92$

$P(H|S) = 0.08$

$P(F) = 0.80$

$P(H) = 1 - 0.80 = 0.20$

a) Une femme soignante se traduit par $P(F \cap S)$. En utilisant la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(F \cap S) = P(F|S) \cdot P(S) = 0.92 \cdot 0.71 = 0.6532$$

b) $P(M|H) = \frac{P(M\cap H)}{P(H)} = \frac{P(H|M)P(M)}{P(H)} = \frac{0.67\cdot 0.12}{0.2} = 0.402$

c) On commence par rechercher la valeur de $P(H|AT)$ que l'on obtient en utilisant le théorème de probabilités totales :

$$P(H) = P(H|M)P(M) + P(H|S)P(S) + P(H|AT)P(AT) = 0.2 \Leftrightarrow P(H|AT) = 0.3694$$

La valeur recherchée est $P(F|AT) = 1 - P(H|AT) = 0.6305$

Comme toujours dans ces cas on peut également utiliser un arbre pour s'aider (voir figure 25)

FIGURE 25 – Exercice 2.2.76

d) Occupons-nous uniquement des 18 personnes hospitalisées (30% de 60). Désignons par R l'ensemble des personnes radiographiées et par P l'ensemble des personnes perfusées. On nous dit que 5 personnes rentrent chez elle sans subir de traitement, donc $\#(R^c \cup P^c) = 5$. En utilisant le principe d'inclusion-exclusion on peut écrire,

$$\#P + \#R - \#(P \cup R) = \#(P \cap R)$$

mais

$$\#(P \cup R) = 18 - \#(R^c \cup P^c) = 13$$

donc

$$\#P + \#R - \#(P \cup R) = 12 + 8 - 13 = \#(P \cap R) = 7$$

La probabilité demandée est de $\frac{7}{18} = 0.3889$ (voir aussi figure 26)

FIGURE 26 – Exercice 2.2.76

Corrigé exercice 2.2.77 Ag="pièce en argent", Or="pièce en or", P="pile", F="face". De l'énoncé, on tire :

$P(Ag) = 0.7$ et $P(Or) = 0.3$.
$P(P|Ag) = 0.5$, $P(P|Or) = \frac{1}{3}$, $P(F|Ag) = 0.5$ et $P(F|Or) = \frac{2}{3}$.

a) En appliquant la formule des probabilités totales on obtient,

$$P(P) = P(P|Ag)P(Ag) + P(P|Or)P(Or) = 0.5\cdot 0.7 + \frac{1}{3}\cdot 0.3 = 0.45.$$

b) On demande $P(Or|F)$, en appliquant la formule des probabilités conditionnelles et les axiomes fondamentaux des probabilités on a,

$$P(Or|F) = \frac{P(Or\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|Or)P(Or)}{1-P(P)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0.3}{0.55} = 0.3637.$$

c) On passe à présent à une épreuve de Bernouilli. La suite d'événements auxquels on s'intéresse a 2 issues possibles (pile ou face) et est formée de tirages indépendants (le fait de tirer une pièce et de la remettre n'influence pas le tirage suivant). On a déjà calculé ci-dessus la probabilité $P(P) = 0.45$ donc $P(F) = 1 - P(P) = 0.55$. Posons $p = P(P) = 0.45$ (la probabilité de l'un des deux événements) et $q = P(F) = 0.55$ (la probabilité de l'autre).
On a bien $p + q = 1$ donc on peut utiliser la distribution binomiale :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

où $P(X=k)$ donne la probabilité que l'événement X (variable aléatoire) se produise k-fois lors de n expériences. Dans notre cas $X=$"obtenir pile" et $P(X=5)=$"obtenir pile exactement 5 fois" lors de $n=5$ tirages.

$$P(X=5)=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}p^5\cdot q^{5-5}=1\cdot 0.45^5\cdot 1=0.0185$$

d) On désire connaître la probabilité d'obtenir exactement 2 fois pile en 5 tirages.

$$P(X=2)=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\cdot p^2\cdot q^{5-2}=10\cdot 0.45^2\cdot 0.55^3=0.3369$$

e) La probabilité de tirer deux pièces en argent parmi 7 dans un sac de 10 pièces est donné par

$$\frac{\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}}=\frac{21}{45}.$$

A présent que l'on a nos deux pièces en argent encore faut-il qu'elles retombent les deux sur pile, donc la probabilité recherchée est obtenue en appliquant le théorème fondamental du dénombrement,

$$\frac{21}{45}\cdot 0.5\cdot 0.5=0.1167.$$

f) En suivant le même raisonnement,

$$\frac{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=0.1516.$$

Corrigé exercice 2.2.78 On sait qu'il y a 3 filles et 3 garçons. Supposons que les garçons portent les dossards $1,2,3$ et les filles les dossards $4,5,6$. On a la série $1,2,3,4,5,6$ que l'on peut permuter de $6!=720$ manières différentes. Le groupe de filles doit se trouver les 3 après les garçons et il y a $3!\cdot 3!$ façons de permuter les filles et les garçons entre eux. Donc la probabilité recherchée est

$$\frac{3!\cdot 3!}{6!}=0.05.$$

On peut également se dire que parmi 6 enfants on peut choisir $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=20$ groupes de 3 enfants et qu'un seul de ces groupes contiendra 3 filles, ce faisant on a introduit un ordre sur les groupes, mais dans cet exercice c'est ce que l'on désire, car on veut les filles après les garçons, le résultat est,

$$\frac{1}{\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}}=0.05.$$

Corrigé exercice 2.2.79

a) Chaque vol peut avoir lieu dans un des six quartiers, donc il y a 6^6 possibilités différentes. Plus d'un vol dans chaque quartier est l'événement complémentaire d' exactement un vol par quartier qui peut apparaître de 6! manières différentes (permutations des 6 vols). Le résultat est

$$1-\frac{6!}{6^6}=1-\frac{720}{46'656}=0.9845$$

On remarquera que c'est exactement la probabilité d'obtenir au moins une répétition de chiffres lors de six lancés consécutifs d'un dé "honnête".

b) Il n'y a qu'une seule manière d'avoir un vol dans chaque quartier. Le nombre de cas possibles se calcule de la manière suivante (il faut bien comprendre que si les voleurs ne sont pas discernables un vol commis dans un quartier spécifique par n'importe lequel d'entre eux ne sera comptabilisé qu'une fois). Considérons les districts comme étant six récipients avec 5 séparations que l'on désignera par le symbole "|", chacun des six vols est représenté par la lettre "v".
Voilà deux événements possibles avec leurs significations.

$|||vvv|vvv|$ = { 0 vol dans les quartiers 1, 2, 3 et 6, 3 vols dans le quartier 4 et 3 vols dans 5}

$vv|v|||vv|v$ = { 0 vol dans les quartiers 3 et 4, un vol dans les quartiers 2 et 6, 2 vols dans 1 et 5}.

Le nombre d'événements différents se calcule en estimant le nombre de combinaisons possibles de 5 éléments (les séparations "|") parmi 11 (les séparations "|" et les vols "v"). Ce qui donne

$$\binom{11}{5} = 462$$

et la probabilité recherchée est $1 - \frac{1}{462} = 0.9978$.

Si l'on pose $n = 6$ pour le nombre de vols et $r = 6$ pour le nombre de quartiers, on obtient la formule $\binom{n+r-1}{r-1}$ pour le nombre d'événements possibles (combinaisons avec répétitions).

c) Lorsque ni les quartiers ni les vols ne sont discernables, le cardinal de l'ensemble des événements possibles est simplement le nombre de possibilités qui existent de partager le chiffre 6, c'est-à-dire 12.

$$\{6\},\{5,1\},\{4,2\},\{4,1,1\},\{3,3\},\{3,2,1\},\{3,1,1,1\},\{2,4\},\{2,2,2\},\{2,2,1,1\},$$
$$\{2,1,1,1,1\},\{1,1,1,1,1,1\}.$$

La probabilité est donc $1 - \frac{1}{12} = 0.9167$.

Corrigé exercice 2.2.80 On pose
$P(nS_i)$ = "pas d'anniversaire à la saison i" (avec $i = 1..4$).
Avec sept personnes et quatre saisons ($i = 1..4$), la probabilité de n'avoir aucun anniversaire durant les saisons i vaut $\binom{4}{1} P(nS_i) = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$. La probabilité de n'avoir aucun anniversaire pour chacune des 6 combinaisons de deux saisons i,j est $\binom{4}{2} P(nS_i \cap nS_j)_{(j>i)} = 6 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^7$. La probabilité de n'avoir aucun anniversaire pour chacune des 4 combinaisons de trois saisons (i,j,k) est $\binom{4}{3} P(nS_i \cap nS_j \cap nS_k)_{(k>j>i)} = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7$. La probabilité de ne pas avoir d'anniversaire à aucune des 4 saisons $P(nS_i \cap nS_j \cap nS_k \cap nS_l)$ est bien sûr nulle.

Commençons par calculer $P(nS_1 \cup nS_2 \cup nS_3 \cup nS_4)$ qui signifie qu'au moins une saison se retrouve sans anniversaire. Pour ce faire, on utilise la formule d'inclusion-exclusion (voir **??**).

$$\begin{aligned} P(nS_1 \cup nS_2 \cup nS_3 \cup nS_4) &= \sum_{i=1}^{4} P(nS_i) \\ &- \sum_{i=1}^{4} \sum_{j>i} P(nS_i \cap nS_j) \\ &+ \sum_{i}^{4} \sum_{j>i} \sum_{k>j>i} P(nS_i \cap nS_j \cap nS_k) \end{aligned}$$

Comme on s'intéresse à la probabilité que chaque saison ait au moins un anniversaire on calcule la probabilité complémentaire qui est

$$1 - P(nS_1 \cup nS_2 \cup nS_3 \cup nS_4)$$

et qui vaut

$$1-\left(4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7-6\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^7+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^7\right)=0.5126$$

Corrigé exercice 2.2.81 Juliette peut être occupée chaque jour de deux manières différentes :

i) Trois jours à un cours et deux jours à deux cours

ii) ou un jour avec trois cours et quatre jours à un cours.

Pour i) cela donne

$$\binom{5}{3}\binom{6}{1}^3\cdot\binom{2}{2}\binom{6}{2}^2=486'000$$

possibilités.

Pour le cas ii) on a

$$\binom{5}{1}\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{4}\binom{6}{1}^4=129'600.$$

Le nombre total de combinaisons de sept cours parmi trente est $\binom{30}{7}=2'035'800$.

La probabilité cherchée est la somme de i) et ii) divisée par le nombre de cas total, c'est-à-dire

$$\frac{486'000+129'600}{2'035'800}=0.3029$$

On peut également utiliser la formule d'inclusion-exclusion en remarquant que "se rendre à l'école chaque jour" est l'événement complémentaire de "avoir au moins un jour de la semaine sans cours". Notons pC_i l'événement "ne pas avoir de cours le i-ème jour". On cherche donc

$$1-P(\bigcup_i pC_i) \text{ avec } i=1..5.$$

On notera que Juliette doit se rendre à l'école au moins deux jours par semaine et que de ce fait les termes avec plus de quatre intersections peuvent être omis (elle ne peut pas ne pas se rendre à l'école plus de 3 jours étant donné qu'elle doit prendre sept cours et que chaque jour n'en compte que six).

$$P(\bigcup_i pC_i)=\sum_i P(pC_i)-\sum_{i<j}P(nC_i\cap nC_j)+\sum_{i<j<k}P(nC_i\cap nC_j\cap nC_k)$$

$$\sum_i P(pC_i)=5\cdot\frac{\binom{24}{7}}{\binom{30}{7}}$$

(explication : on enlève les 6 cours de n'importe lequel des 5 jours de la semaine et on en choisit 7 parmi les $30-6=24$ cours qui restent)

$$\sum_{i<j}P(nC_i\cap nC_j)=\binom{5}{2}\cdot\frac{\binom{18}{7}}{\binom{30}{7}}$$

$$\sum_{i<j<k}P(nC_i\cap nC_j\cap nC_k)=\binom{5}{3}\cdot\frac{\binom{12}{7}}{\binom{30}{7}}$$

(un raisonnement analogue s'applique aux deux dernières expressions).

Il ne reste plus qu'à remplacer par les valeurs numériques pour obtenir finalement :

$$1-P(\bigcup_i pC_i)=1-\frac{263}{377}=0.3024.$$

Corrigé exercice 2.2.82 Intuitivement, le problème est facile et en s'aidant d'un petit graphe on arrive rapidement au résultat qui est $\frac{2}{3}$.

Voici une autre manière plus difficile, mais pédagogiquement plus intéressante. Posons :

$P(pV)$, la probabilité que la première boule soit verte,

$P(tV)$, la probabilité que la boule tirée soit verte et

$P(rV)$ la probabilité que la boule restante soit verte.

On cherche la probabilité que la boule restante soit verte sachant que la boule tirée l'est également c'est-à-dire $P(rV|tV)$. On conditionne par rapport à l'événement $P(pV|tV)$ ("la première boule est verte sachant que la boule tirée est verte").

$$P(rV|tV)=\underbrace{P(rV|tV\cap pV)}_{1}\cdot P(pV|tV)+\underbrace{P(rV|tV\cap(1-pV))}_{0}\cdot P((1-pV)|tV)=P(pV|tV)$$

On voit que les probabilités des événements $P(rV|tV)$ et $P(pV|tV)$ sont les mêmes, ce qui n'est pas forcément évident. On utilise la formule des probabilités conditionnelles sur l'événement $P(pV|tV)$,

$$P(pV|tV)=\frac{P(pV\cap tV)}{P(tV)}=\frac{P(tV|pV)\cdot P(pV)}{P(tV)}=\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{P(tV)}.$$

Il reste à conditionner $P(tV)$ par rapport à l'événement "la première boule est verte" :

$$P(tV)=P(tV|pV)\cdot P(pV)+P(tV|(1-pV))\cdot P(1-pV)=1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Donc le résultat final est

$$P(rV|tV)=P(pV|tV)=\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{P(tV)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

comme trouvé précédemment.

Corrigé exercice 2.2.83 On connaît :

$P(S)=0.8$, $P(+|S)=0.1$ et $P(+|S^c)=0.01$.

On désire connaître la probabilité conditionnelle $P(S|+)$, c'est-à-dire la probabilité qu'un courriel soit un spam (S) si il contient le mot "gratuit" (+). On applique la formule de Bayes :

$$P(S|+)=\frac{P(S\cap +)}{P(+)}=\frac{P(+|S)\cdot P(S)}{P(+|S)\cdot P(S)+P(+|S^c)\cdot P(S^c)}=\frac{0.1\cdot 0.8}{0.1\cdot 0.8+0.01\cdot 0.2}=0.9756.$$

Corrigé exercice 2.3.1 On tire deux boules parmi 14, (n=noir, b=blanc, o=orange). Commençons par décrire l'ensemble des résultats possibles $E\in\mathscr{P}(\Omega)$.

$$E=\{(n,n),(b,b),(o,o),(b,n),(b,o),(n,o)\}$$

A chaque élément de E on attribue une valeur de la variable aléatoire X en tenant compte des gains et des pertes. (n,n)=4, (b,b)=-2, (o,o)=0, (b,n)=1, (b,o)=-1, (n,o)=2. Puis, on calcul la probabilité de chacune des valeurs de la variable aléatoire X :

$$P(X=4)=P(\{(n,n)\})=\frac{C_2^4}{C_2^{14}}=\frac{6}{91}$$
$$P(X=-2)=P(\{(b,b)\})=\frac{C_2^8}{C_2^{14}}=\frac{28}{91}$$
$$P(X=0)=P(\{(o,o)\})=\frac{C_2^2}{C_2^{14}}=\frac{1}{91}$$
$$P(X=1)=P(\{(b,n)\})=\frac{C_1^8 \cdot C_1^4}{C_2^{14}}=\frac{32}{91}$$
$$P(X=-1)=P(\{(b,o)\})=\frac{C_1^8 \cdot C_1^2}{C_2^{14}}=\frac{16}{91}$$
$$P(X=2)=P(\{(n,o)\})=\frac{C_1^4 \cdot C_1^2}{C_2^{14}}=\frac{8}{91}$$

On vérifie que la somme des probabilités est de 1.

$$z=0$$
$$z=999999$$

$$z=0$$
$$z=9$$