Correction des exercices loi binomiale – Chap 8 | TES 2

FICHE 1
Exercice 7 : Bac (Nouvelle Calédonie – Nov 2006)

Un appareil de très haute technologie est installé dans un laboratoire d'analyse médicale.
L'installateur assure une maintenance à l'issue de chaque semaine d'utilisation.
Pour cette maintenance, soit il doit se déplacer (intervention directe sur l'appareil), soit une assistance téléphonique suffit.
A l'issue d'une semaine de fonctionnement, trois situations sont possibles :
- situation A: l'appareil a fonctionné normalement ;
- situation B: l'appareil a eu des arrêts épisodiques ;
- situation C: l'appareil a eu des arrêts très fréquents.

Dans la situation A, l'installateur doit se déplacer 1 fois sur 2.
Dans la situation B, l'installateur doit se déplacer 7 fois sur 10.
L'installateur sait par expérience que, à l'issue de chaque semaine de fonctionnement,
- la probabilité d'être dans la situation A est 0,6;
- la probabilité d'être dans la situation B est 0,3;
- la probabilité qu'il doive se déplacer est 0,6.

Partie A

L'appareil a été utilisé pendant une semaine. On considère les événements suivants :
A : « on se trouve dans la situation A » ;
B : « on se trouve dans la situation B » ;
C : « on se trouve dans la situation C » ;
S : « l'installateur se déplace » ;
T : « l'installateur effectue une assistance téléphonique ».

On pourra construire un arbre pondéré que l'on complétera au fur et à mesure.

1) Calculer la probabilité de l'événement T.
2) Démontrer que, lorsqu'on se trouve dans la situation C, la probabilité que l'installateur se déplace est 0,9.
3) On sait que l'installateur s'est déplacé. Déterminer la probabilité que l'on ait été dans la situation B.

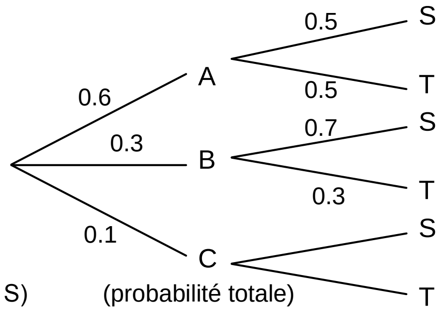
Partie B

L'installateur devra effectuer la maintenance trois semaines de suite. On admet que les événements qui surviendront au cours de chacune de ces trois semaines sont indépendants.

1) Quelle est la probabilité que l'installateur ait à effectuer exactement deux déplacements sur les trois semaines ?
2) a) Donner la loi de probabilité associée au nombre de déplacements à effectuer sur les trois semaines.
   b) Montrer que l'espérance mathématique de cette loi vaut 1,8.
   c) Pour l'installateur un déplacement revient à 300 € (l'assistance téléphonique ne lui coûte rien). L'installateur décide de proposer à son client un forfait pour trois semaines de maintenance. Déterminer le montant minimum de ce forfait afin que l'installateur puisse espérer rentrer dans ses frais.

REDACTION :

Partie A



1) $P(T) = 1 - p(S) = 1 - 0.6 = 0.4.$
2) On cherche $p_C(S) = \dfrac{p(C \cap S)}{p(C)}$

Or $p(C \cap S) = p(S) - p(A \cap S) - p(B \cap S)$ (probabilité totale)
$= 0.6 - 0.6 \times 0.5 - 0.3 \times 0.7$
$= 0.6 - 0.3 - 0.21 = 0.09$

Donc $p_C(S) = \dfrac{0.09}{0.1} = 0.9$

Lorsqu'on se trouve dans la situation C, la probabilité que l'installateur se déplace est 0,9.

3) On cherche $p_S(B) = \dfrac{p(S \cap B)}{p(S)} = \dfrac{0.3 \times 0.7}{0.6} = \dfrac{0.21}{0.6} = 0.35$

On sait que l'installateur s'est déplacé. La probabilité que l'on ait été dans la situation B est de 0.35.

Partie B

1) Effectuer la maintenance trois semaines de suite sachant que les évènements qui surviendront sont indépendants est une succession de trois épreuves de Bernoulli de paramètre 0.6 (probabilité du succès « se déplacer »).

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de déplacement, elle suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0.6.
On cherche donc $p(X = 2) = 0.432$
La probabilité que l'installateur ait à effectuer exactement deux déplacements sur les trois semaines est de 0.432.

2) a) Loi de probabilité associée au nombre de déplacements à effectuer sur les trois semaines.

Valeurs prises par k	0	1	2	3
P (X = k)	0.064	0.288	0.432	0.216

b) $E(X) = 3 \times 0.6 = 1.8$
L'espérance mathématique de cette loi vaut 1.8.

c) Pour un grand nombre de maintenance de trois semaines, la moyenne des déplacements se rapproche de 1.8.
$1.8 \times 300 = 540.$
Le montant minimum du forfait à proposer par l'installateur afin d'espérer rentrer dans ses frais est de 540 €.

FICHE 2

Dans le service informatique d'une société, chaque informaticien a le choix entre deux logiciels de gestion : d'une part le logiciel Bestmath, leader du marché, et d'autre part le logiciel Aurora, son concurrent. Le chef de réseau informatique enregistre chaque année, en janvier, le nombre d'utilisateurs des deux logiciels et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs. Lors de l'enquête de janvier 2009, la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora est 0,32.
Lors de l'enquête suivante en janvier 2010, il a été constaté que 20 % des utilisateurs d'Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Bestmath, tandis que 25 % des utilisateurs de Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.
On interroge un informaticien au hasard et on définit les événements suivants :
– $A1$: « la personne interrogée a choisi le logiciel Aurora la première année » ;
– $B1$: « la personne interrogée a choisi le logiciel Bestmath la première année » ;
– $A2$: « la personne interrogée a choisi le logiciel Aurora la deuxième année » ;
– $B2$: « la personne interrogée a choisi le logiciel Bestmath la deuxième année » ;

1) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré illustrant la situation.

2) Calculer la probabilité qu'un informaticien utilise le logiciel Bestmath la première et la deuxième année.

3) Vérifier que la probabilité de l'événement $B2$ est $p(B2)$: 0,574.

4) Calculer la probabilité qu'un informaticien ait utilisé le logiciel Bestmath la première année, sachant qu'il l'utilise la deuxième année (on donnera le résultat arrondi au millième).

5) *Une attention particulière sera apportée à la qualité de la rédaction dans cette question.*

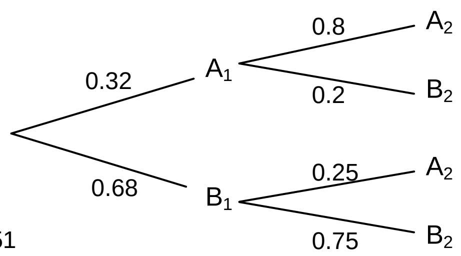
On interroge au hasard et de façon indépendante trois informaticiens du service.

a) Calculer la probabilité qu'au moins un des trois informaticiens ait utilisé le logiciel Aurora la deuxième année (Donner une valeur approchée du résultat à 0.001 près).

b) Calculer la probabilité qu'exactement deux des trois informaticiens aient utilisé le logiciel Aurora la deuxième année (on donnera une valeur approchée à 0.001 près)

REDACTION :

1)



2) $P(B_1 \cap B_2) = 0.68 \times 0.75 = 0.51$

La probabilité qu'un informaticien utilise le logiciel Bestmath la première et la deuxième année est de 0.256.

3) A_1 et B_1 forment une partition de l'univers. D'après la formule de probabilité totale, on a :

$$\begin{aligned} p(B_2) &= p(A_1 \cap B_2) + p(A_2 \cap B_2) \\ &= 0.32 \times 0.2 + 0.51 \\ &= 0.064 + 0.51 \\ &= 0.574 \end{aligned}$$

4) On cherche $p_{B_2}(B_1)$.

$$p_{B_2}(B_1) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{0.51}{0.574} \approx 0.889$$

5) a) $p(A_2) = 1 - p(B_2) = 1 - 0.574 = 0.426$

Choisir un informaticien qui utilise le logiciel Aurora la $2^{ème}$ année est une épreuve de Bernoulli de succès de probabilité $p = 0.426$.
On répète cette épreuve 3 fois de manière indépendante.
X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $B(3\ ;\ 0.426)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - p(X = 0) \\ &\approx 0.811 \end{aligned}$$

La probabilité qu'au moins un des trois informaticiens ait utilisé le logiciel Aurora la deuxième année est de 0.811.

b) $p(X = 2) \approx 0.313$

La probabilité qu'exactement deux des trois informaticiens aient utilisé le logiciel Aurora la deuxième année est de 0.313.