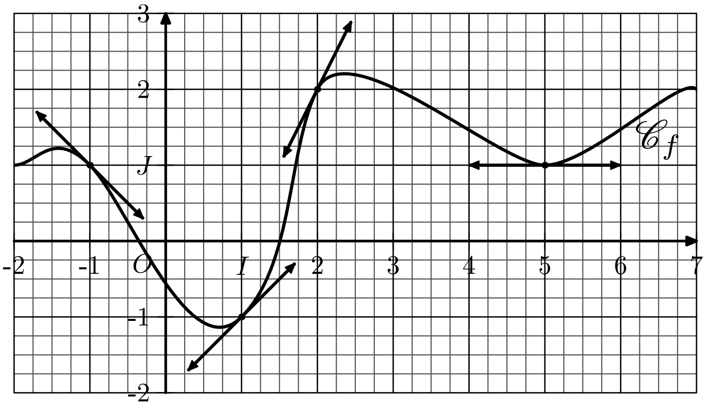
# Terminale S/Derivabilite et continuite

## 1. Révisions sur les dérivés :

### Exercice 3429

On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;7]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :




Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$, aux points d'abscisses $-1$, $1$, $2$, $5$ ont été tracées sur la représentation ci-dessus.

1. Déterminer le nombre dérivée de la fonction $f$ en $-1$ et en $1$.
2. Déterminer les équations des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses $2$ et $5$.

### Exercice 3314

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = -5x^3 + 2x - 2$ b. $g(x) = \sqrt{x}\cdot(5x+1)$

c. $h(x) = \dfrac{3x-1}{2-x}$ d. $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{5-2x}$

### Exercice réservé 3507

Déterminer l'expression de la fonction dérivée aà chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = (5{\cdot}x+2){\cdot}(3-x)$ b. $g(x) = \dfrac{3x+2}{2-x}$

c. $h(x) = (-2x^2+3x+2){\cdot}\sqrt{x}$ d. $j(x) = \dfrac{2{\cdot}x-2}{\sqrt{x}}$

### Exercice 3912

Il est possible que certains des résultats, à démontrer, ne soient pas lisibles sur l'écran de votre calculatrice graphique.

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{10{\cdot}(x-8)}{x{\cdot}(x-1)}$$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative relative à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. a. Déterminer les limites de $f$ en $0$ et en $+\infty$.

   b. Déterminer les limites de $f$ quand $x$ tend vers $1$ par valeurs inférieures et quand $x$ tend vers $1$ par valeurs supérieures.

   c. En déduire les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.

2. a. Déterminer la dérivée $f'$ de la fonction $f$.

   b. Montrer que $f'(x)$ s'annule pour $\alpha = 8+2\sqrt{14}$ et pour $\beta = 8-2\sqrt{14}$.

   c. Dresser le tableau de variations de $f$ *(on indiquera les valeurs approchées au dixième près des extrémums locaux à l'aide de la calculatrice).*

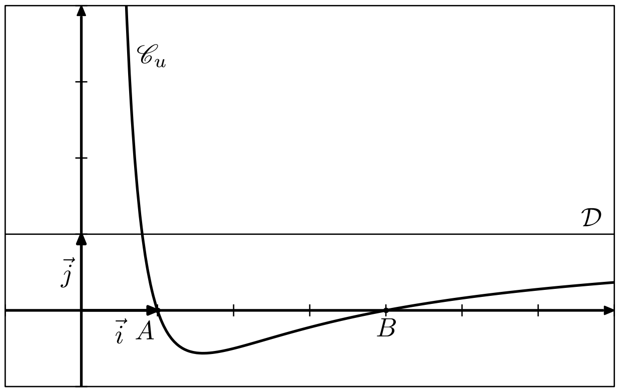
### Exercice 6803

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction $u$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où $a$, $b$ et $c$ sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=1$ :




On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points $A(1\,;0)$ et $B(4\,;0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathcal{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. a. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.

   b. Donner $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x)$. En déduire la valeur de $a$.

   c. En déduire que, pour tout réel $x$ strictement positif :
   $$u(x) = \frac{x^2-5{\cdot}x+4}{x^2}$$

2. On suppose l'existence d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant admettant pour dérivée la fonction $u$ :
   $$f' = u$$
   Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
   *(it aucune valeur ne sera indiquée dans le tableau)*

### Exercice 3312

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix.

**Barème :** A chaque question est attribué 1 point.
Une réponse inexacte enlève 0,5 point.
Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

Soit $f$ la fonction définie sur $]4\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4}$$
et $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Une autre expression de $f(x)$ est :
   - a. $f(x) = -2x + 1 - \dfrac{2}{x-1}$
   - b. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x + 12}{4 - x}$
   - c. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 9x - 2}{x-4}$
2. Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $]4\,;+\infty[$. Une expression de $f'(x)$ est :
   - a. $f'(x) = -2 - \dfrac{8}{(x-4)^2}$
   - b. $f'(x) = \dfrac{(2-x)(x-6)}{(x-4)^2}$
   - c. $f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 16x - 24}{(x-4)^2}$
3. La courbe $\Gamma$ admet pour asymptote :
   - a. la droite d'équation $y=4$
   - b. la droite d'équation $x=4$
   - c. la droite d'équation $y=4x$

### Exercice réservé 3313

Soit $f$ une fonction dont le tableau de variations, incomplet est le suivant ; on désigne par $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

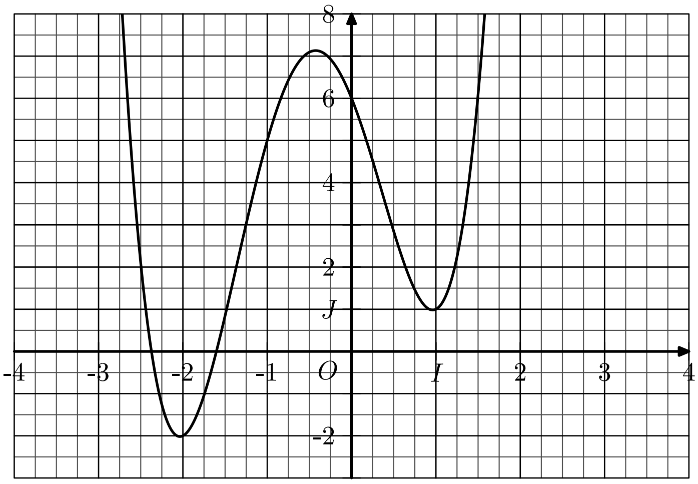
| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | -1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | | | -6 | | ‖ $+\infty$ | | | | ... |
| | $-\infty$ | ↗ | | ↘ | ... ‖ | ↘ | 2 | ↗ | |

On admet que $f$ est définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = a{\cdot}x + b + \frac{c}{x+1}$$
où $a$, $b$ et $c$ sont des réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.
2. En vous aidant des informations contenues dans le tableau de variations ci-dessus, montrer que l'on a :
   $a=1 \quad ; \quad b=-1 \quad ; \quad c=4$
3. Déterminer les limites manquantes dans le tableau de variations fourni.

### Exercice 3509

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$f : x \longmapsto \frac{3}{2}{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^3 - \frac{9}{2}{\cdot}x^2 - 5{\cdot}x + 6$$
On donne, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère $(O\,;I\,;J)$ :




La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de cette fonction admet une droite $(d)$ de coefficient directeur 1 comme tangente en deux points.

Déterminer l'equation de cette droite et les coordonnées de ces deux points.

### Exercice réservé 6136

On considère l'ensemble $F$ des couples $(x\,;y)$ de réels tels que $x$ et $y$ sont les mesures des longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est égal à 1.

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ par :
$$f(x) = \frac{1-2x}{2{\cdot}(1-x)}$$
Vérifier que pour tout réel $x$ de l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, les couples $(x\,;f(x))$ appartiennent à $F$.

## 2. Dérivées de fonctions composées :

### Exercice 2337

Le tableau présente pour chaque ligne une fonction et l'expression de la dérivée. Etablir l'exactitude de chaque ligne.

| Fonction | Image de $x$ | Nombre dérivé en $x$ |
|---|---|---|
| $f$ | $(3x+2)^6$ | $18{\cdot}(3x+2)^5$ |
| $g$ | $4{\cdot}(3-2x)^4$ | $-32{\cdot}(3-2x)^3$ |
| $h$ | $\dfrac{1}{-2x^2+3x+1}$ | $\dfrac{4x-3}{\left(2x^2-3x-1\right)^2}$ |
| $j$ | $\sqrt{5x^2+6x-2}$ | $\dfrac{5x+3}{\sqrt{5x^2+6x-2}}$ |
| $k$ | $\dfrac{2x-1}{\sqrt{3-x}}$ | $\dfrac{2x-11}{2{\cdot}(x-3){\cdot}\sqrt{3-x}}$ |

**Exercice 3506**

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonction suivantes :

a. $f(x)=\left(3{\cdot}x+5\right)^5$ b. $g(x)=\dfrac{1}{3{\cdot}x^4+11}$

c. $h(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ d. $j(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

**Exercice réservé 5103**

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x)=\sqrt{6x^2-3x+1}$ b. $g(x)=\left(4{\cdot}x-1\right)^4$

**Exercice 95**

On considère la fonction $f$ définie par :

$f\colon x\longmapsto\sqrt{-2x^2-x+6}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
2. Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction $f$.

**Exercice 5217**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ par la relation par la relation suivante :

$f(x)=\sqrt{2x^2-3x-2}$

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-1$

**Exercice 5065**

On considère la fonction $f$ définie par la relation :

$f(x)=\dfrac{-x^2+4x-3}{x^2-4x+4}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
2. Montrer que la fonction $f$ admet pour dérivée la fonction $f'$ dont l'expression est :
   $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-2)^3}$
3. On considère la fonction $g$ définie par la relation : $g(x)=f\left(2x{-}1\right)$
   a. Déterminer l'expression simplifiée du nombre $g(x)$ en fonction de $x$.
   b. Déterminer, par la méthode de votre choix, l'expression de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$.

# 3. Dérivées de fonctions :

**Exercice 2841**

Déterminer l'expression, sous une forme simplifiée, des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{3}x-2}$ b. $g(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^3$

c. $h(x)=\left(3x^2-2x+1\right)\sqrt{x}$ d. $j(x)=(2x+1){\cdot}\sqrt{3-x}$

**Exercice réservé 5751**

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x)=\left(3x+2\right)^5$ b. $g(x)=\sqrt{1-2x}$

c. $h(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ d. $j(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

**Exercice 2826**

Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de la fonction dérivée :

a. $f:x\longmapsto\left(4x-2\right)^7$ b. $g:x\longmapsto\dfrac{1}{5-3x}$

c. $h:x\longmapsto\sqrt{3x-1}$ d. $j:x\longmapsto\left(3-2x\right)^3{\cdot}\sqrt{4x+1}$

*Donner l'expression de la fonction $j$ sous la forme d'un quotient où :*

- *Le dénominateur est $\sqrt{4x{+}1}$*
- *$\left(3{-}2x\right)^2$ est en facteur au numérateur.*

**Exercice 119**

Déterminer l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f\colon x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$ b. $g\colon x\longmapsto(2x+1){\cdot}\sqrt{3x-1}$

**Exercice réservé 2394**

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f$ définie par : $f\colon x\longmapsto 5{\cdot}\left(x^2+x+1\right)^4$
2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $g$ définie par : $g\colon x\longmapsto\dfrac{2}{5}x^2{\cdot}\sqrt{3-2x}$

   Ecrire cette fonction dérivée de la fonction $g$ sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est $\sqrt{3{-}2x}$.

**Exercice réservé 2667**

On considère la fonction $f$ définie sur $\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ par la relation : $f(x)=x{\cdot}\sqrt{3x-1}$

Déterminer l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ *(On donnera l'expression de $f'$ sous la forme d'un* *quotient simplifié).*

**Exercice réservé 6137**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \left(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x\right)^4{\cdot}\left(c{\cdot}x + 1\right)$$

où $a$, $b$ et $c$ sont trois entiers relatifs.

On sait que la fonction $f$ admet pour dérivée la fonction $f'$ dont l'expression est :

$$f'(x) = \left(-18x^2 + 21x - 4\right){\cdot}\left(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x\right)^3$$

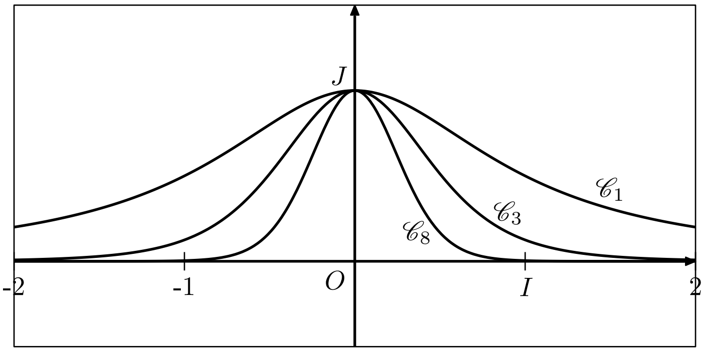
## 4. Dérivées de familles de fonctions :

**Exercice réservé 6134**

On considère, pour tout entier naturel $n$ non-nul, la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

Dans un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$.



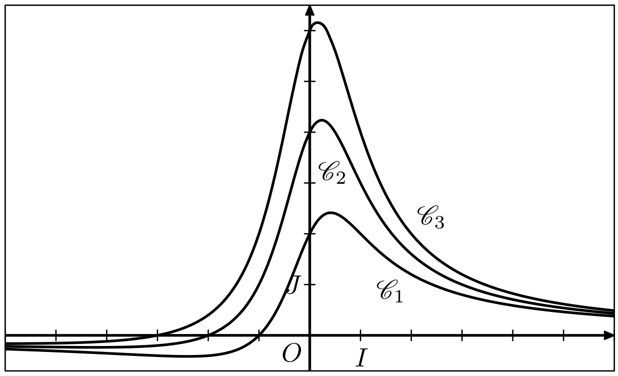

1. Déterminer l'expression de la dérivée $f'_n$ de la fonction $f_n$.
2. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(d)$ à la courbe $\mathscr{C}_3$ au point d'abscisse 1.
   b. On considère la droite $(\Delta)$ d'équation réduite :
   $$y = \frac{5}{32}{\cdot}x + \frac{3}{16}$$
   Parmi la famille de courbe $(\mathscr{C}_n)$, quelle est celle qui admet la droite $(\Delta)$ comme tangente au point d'abscisse $-1$? Justifier votre réponse.

**Exercice 6810**

On considère pour tout entier naturel $n$ non-nul, la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{2{\cdot}\left(x+n\right)}{1+x^2}$$

Dans un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$.




1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée $f'_n$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(d_n)$ à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 1.
3. a. Etablir l'égalité suivante :
   $$n{\cdot}x^3-\left(2{\cdot}n+1\right){\cdot}x^2+\left(n+2\right){\cdot}x-1 = \left(x-1\right)^2{\cdot}\left(n{\cdot}x-1\right)$$
   b. Etudier la position relative de la droite $(d_n)$ et de la courbe $\mathscr{C}_n$ pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2.

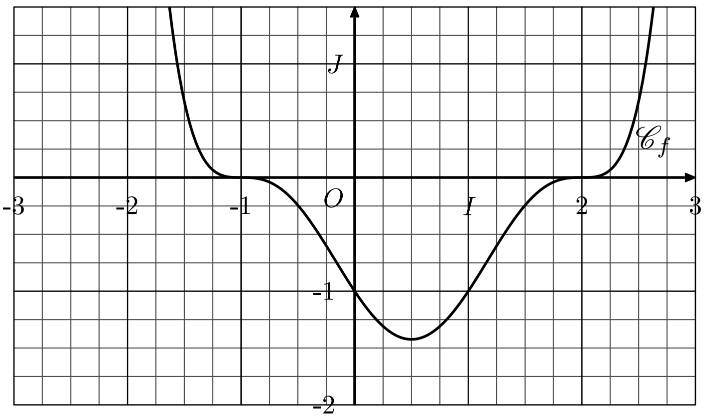
## 5. Etude de la fonction dérivée de fonctions composées :

**Exercice réservé 5753**

On considère la fonction $f$ dont l'image d'un nombre $x\in\mathbb{R}$ est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{8}{\cdot}\left(x^2-x-2\right)^3$$

Ci-dessous, est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ dans un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé.




1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au

point d'abscisse 1.
*(on utilisera la valeur approchée $f(\frac{1}{2})\approx-1{,}4$)*

## Exercice 5062

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre $x$ est donnée par la relation :
$f(x)=(5x^2+3x+2)^5$

1. Déterminer l'expression de la dérivée $f'$ de la fonction $f$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$

## Exercice 5752

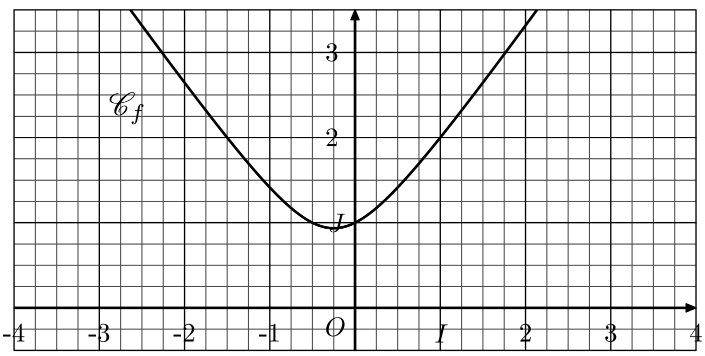
On considère la fonction $f$ définie par la relation :
$f(x)=\sqrt{6x^2+13x-5}$

1. Justifier que la fonction $f$ admet pour ensemble de définition la partie $I$ de $\mathbb{R}$ définie par :
$I=\left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur son ensemble de définition $I$.

## Exercice 5063

On considère la fonction $f$ dont l'image d'un nombre $x$ est donnée par la relation :
$f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
2. Déterminer le tableau de variations de la fonction $f$.
3. Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ :




   a. Déterminer l'équation de la tangente $(d)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   b. Tracer la droite $(d)$ dans le repère ci-dessus.

## Exercice 2325

On considere deux fonctions $f$ et $g$ définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\left[\frac{5}{3}\,;+\infty\right[$ par :

$f(x)=2(3-2x)^5 \quad ; \quad g(x)=\sqrt{3x-5}$

1. Déterminer l'expression des fonctions dérivées $f'$ et $g'$ associées aux fonctions $f$ et $g$.
2. a. Déterminer le signe des fonctions $f'$ et $g'$ sur leur ensemble de dérivation.
   b. Dresser le tableau de variations de ces deux fonctions.

## Exercice 3510

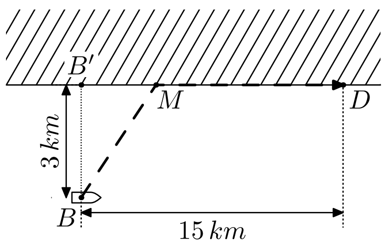
1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x)=\left(\frac{1}{2}\cdot x+1\right)^4$
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 2.
2. On considère la fonction $g$ définie par la relation :
$g(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g$.
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g$.
   b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

## Exercice réservé 3305

1. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x)=x^3-2x^2+2x+1$
On note $(T)$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   a. Déterminer l'équation réduite de la droite $(T)$.
   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la droite $(T)$.
2. Soit $g$ la fonction dont l'image d'un nombre $x$ est définie par :
$g(x)=\sqrt{2-3\cdot x}$
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g$.
   a. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f$.
   b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $-2$.

## Exercice réservé 2962

Un bateau, représenté par le point $B$, se trouve à trois kilomètres du rivage ; le point $B'$ représente le point du rivage le plus proche du bateau *(son projeté orthogonal)* ; le point $D$ représente la destination à atteindre par le marin. Pour se faire, le marin décide d'atteindre un point $M$ de la berge, puis de rejoindre le point $D$ en voiture.




Le bateau navigue à une vitesse de $15\,^{km}/_{h}$ et la voiture se déplacer à unevitesse de $40\,^{km}/_{h}$.

On note $x$ la distance $B'M$ :

1. Exprimer la distance $BM$ et $MD$ en fonction de $x$.
2. On note $h(x)$ le temps de parcours effectué lorsque $B'M=x$.
   a. Justifier que : $h(x)=\frac{1}{120}\cdot\left(8\sqrt{x^2+9}+45-3x\right)$
   b. Déterminer l'expression de la fonction dérivée $h'$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction $h$.
3. En déduire la valeur de $x$ pour laquelle le temps de trajet du marin est minimale.

## 6. Etude de la fonction dérivée :

**Exercice réservé 2521**

On considère la fonction $f$ dont l'image de $x$, pour $x\in[1\,;+\infty[$, est définie par la relation :

$$f(x)=(x^2-4x+3)\sqrt{2x-2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la valeur du nombre dérivée de la fonction $f$ en 3.
2. Déterminer l'expression de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

**Exercice 2348**

Soit $f$ la fonction définie par la relation :

$$f: x\longmapsto(x+5)\sqrt{1-2x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f$.
2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de $f$.
3. Dresser le tableau de signe de $f'$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction $f$
5. Justifier que $f$ admet un extrémum global en $-\dfrac{4}{3}$

**Exercice réservé 2338**

On considère la fonction $f$ définie par la relation :

$$f: x\longmapsto\frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+3}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Montrer que le nombre dérivée de $f$ en $x$ s'écrit :
$$f'(x)=\frac{3{\cdot}x^2+14{\cdot}x+11}{2(x+3)\sqrt{x+3}}$$
3. Dresser le tableau de signe de la fonction $f'$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction $f$.
5. Donner le minimum de la fonction $f$ sur son ensemble de définition.

**Exercice réservé 6135**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=\frac{x^2+2x+5}{\sqrt{x^2+1}}$$

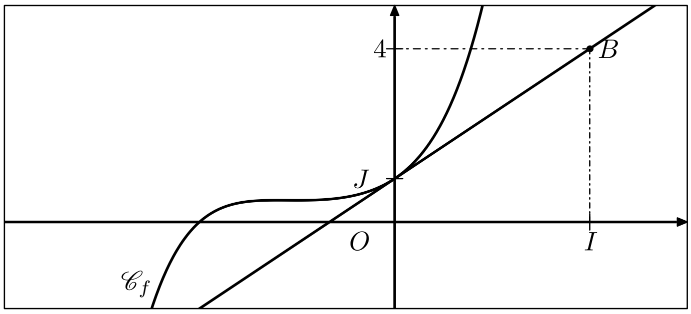
1. Etablir que la dérivée $f'$ de la fonction $f$ admet pour expression :
$$f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x^2+1){\cdot}\sqrt{x^2+1}}$$
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
On admettra les deux limites :
$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=+\infty$$

**Exercice 6163**

On considère la fonction $f$ définie par la relation :

$$f(x)=(a{\cdot}x+1){\cdot}\big(2x^2+x+1\big)^2$$

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthogonal donné ci-dessous, on représente la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ :




La droite $(d)$ passe par les points $J$ et $B(1\,;4)$.

1. a. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $J$.
   b. Déterminer le coefficient de la droite $(JB)$.
   c. Démontrer que tout réel $x$, on a :
   $$f'(x)=\big[10ax^2+(3a+8){\cdot}x+(a+2)\big]{\cdot}\big(2x^2+x+1\big)$$
   d. On suppose que la droite $(JB)$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $J$. Déterminer la valeur de $a$. Justifier votre réponse.
2. On admet que $f'$ a pour expressions :
$$f'(x)=\big(10x^2+11x+3\big)\big(2x^2+x+1\big)$$
Déterminer les sens de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

## 7. Lien entre dérivée et nombre derivée :

**Exercice 5064**

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{h\mapsto0}\frac{(3+h)^4-81}{h}$ b. $\displaystyle\lim_{h\mapsto0}\frac{\sqrt{6{\cdot}h+1}-1}{h}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0}\frac{(x^2+1)^8-1}{x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0}\frac{\sqrt{x^2+x+4}-2}{x}$

**Exercice réservé 5101**

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{h\mapsto0}\frac{\sqrt{2h+5}-\sqrt{5}}{h}$ b. $\displaystyle\lim_{h\mapsto0}\frac{(2-2h)^4-16}{h}$

**Exercice 5829**

Soit $f$ une fonction numérique dérivable.

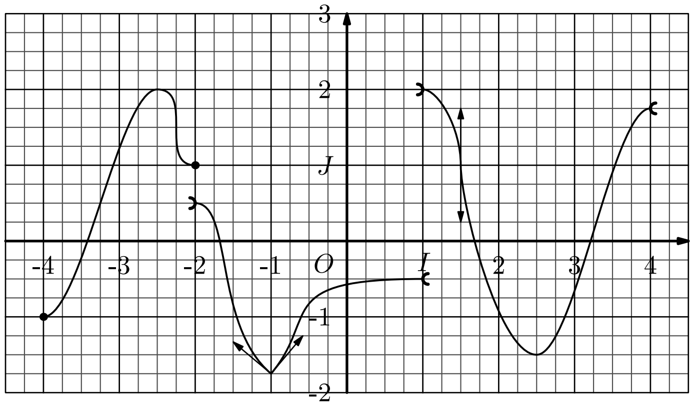
1. Soit $a\in\mathcal{D}_f$. Etablir la limite suivante :
$$\lim_{\substack{x\mapsto a\\x\neq a}}\frac{x\cdot f(a)-a\cdot f(x)}{x-a}=f(a)-a\cdot f'(a)$$
On posera : $x=a+h$.

2. En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto a\\x\neq a}}\frac{x^3\cdot a-a^3\cdot x}{x-a}$

## 8. Continuité en un point :

### Exercice 3537

Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ ; cette courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 1,5 :




1. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de la fonction $f$.

2. Déterminer graphiquement l'ensemble de dérivabilité de la fonction $f$.

3. Déterminer les limites suivantes :

   a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-}f(x)$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^+}f(x)$

   c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-}f(x)$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^+}f(x)$

4. a. Combien existe-t-il de nombres $a$ tels que :
$\displaystyle\lim_{x\mapsto a^-}f(x)\neq\lim_{x\mapsto a^+}f(x)$

   b. Quelle particularité graphique ont les points d'abscisse $a$ vérifiant une telle condition?

### Exercice 3538

La partie entière de 5,5 est 5 ; pour étendre, cette notion à l'ensemble des nombres réels *(et particulièrement aux nombres négatifs)*, on définit la partie entière d'un nombre $x$, qu'on note $E(x)$, de la manière suivante :

> *"$E(x)$ est le plus grand entier de l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à $x$"*

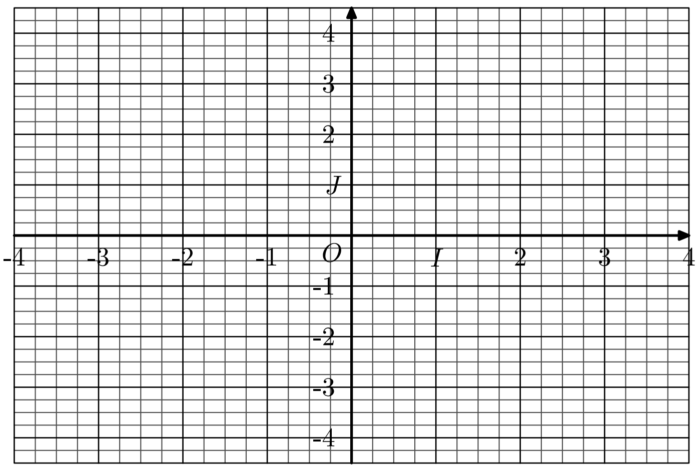
1. a. Supposons que $x=-2{,}5$, justifier que $E(x)=-3$.

   b. Compléter le tableau suivant :

| $x$ | $-4{,}5$ | $-4$ | $-3{,}9$ | $-3{,}2$ | $-3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E(x)$ | | | | | |

   c. Justifier l'encadrement suivant pour tout nombre réel $x$ :
$E(x)\leqslant x<E(x)+1$

2. a. On considère le repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous ; effectuer la représentation graphique de la fonction $E$ sur $[-4\,;4]$




   b. Quelles particularités possède cette courbe?

### Exercice 5825

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation :
$$f(x)=\frac{|x|}{x}$$

1. Justifier que la fonction $h$ n'est pas continue en 0.

2. Déterminer les deux limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto0^-\\x\neq0}}f(x)$ ; $\displaystyle\lim_{\substack{x\mapsto0^+\\x\neq0}}f(x)$

### Exercice réservé 3542

On considère la fonction $f$ définie par :
$$f(x)=\frac{3x-1}{6x^2-11x+3}$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_f$ de définition de la fonction $f$.

2. Est-il possible de **prolonger par continuité** la fonction $f$ en $\frac{1}{3}$ afin qu'elle soit continue en cette valeur? C'est à dire existe-t-il un nombre $a$ telle que la fonction $g$ suivante soit continue en $\frac{1}{3}$ :
$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{3x-1}{6x^2-11x+3} & \text{pour } x\in\mathcal{D}_f\\[2mm] g\Big(\dfrac{1}{3}\Big)=a & \text{pour } x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

### Exercice 3539

1. On considère la fonction $f$ dont l'image d'un nombre $x$ est définie par la relation :
$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.

   b. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto 0^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} f(x)$$

c. Peut-on dire que la fonction $f$ est continue en $0$?

2. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Justifier que la fonction $g$ est continue en $0$.

## 9. Dérivabilité en un point :

### Exercice 3541

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x + 3 & \text{pour tout } x \in \left]-\infty\,;-1\right] \\ f(x) = \dfrac{2}{x^2+1} & \text{pour tout } x \in \left]-1\,;+\infty\right[ \end{cases}$$

1. a. Effectuer le tracé de la fonction $f$ à l'aide de votre calculatrice.
   b. Faire une conjecture sur la continuité et sur la dérivabilité de la fonction $f$.
2. Justifier que la fonction $f$ est continue en $-1$.
3. Justifier que la fonction $f$ est dérivable en $-1$.

### Exercice réservé 5081

Les parties **A** et **B** sont indépendantes entre elles. La partie **C** fait intervenir les parties précédentes.

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;I\,;J\right)$.

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4{\cdot}x+4}{3-x}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
2. Montrer que la tangente $(d)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $1$ admet pour équation réduite :
   $(d)\ :\ y = x+1$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur son ensemble de définition.
4. Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la droite $(d)$.
   *On utilisera la factorisation :*
   $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$

**Partie B**

On considère la fonction $g$ définie par la relation :

$$g(x) = \frac{\left(3{\cdot}x - x^2\right)^3}{4{\cdot}x}$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g$.

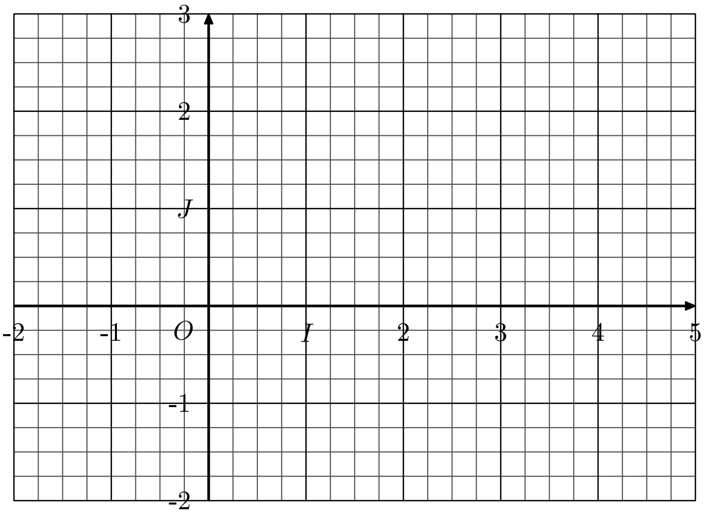
1. La fonction $g$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la fonction $g$ admet pour dérivée la fonction $g'$ définie par l'expression :
   $$g'(x) = \frac{x{\cdot}(6-5x){\cdot}(3-x)^2}{4}$$
3. Combien de tangentes horizontales admet la courbe $\mathscr{C}_g$?
4. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$. *(on n'indiquera pas les valeurs dans le tableau de variation)*

**Partie C**

On considère la fonction $h$ définie par la relation :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{pour } x \in \left[-1\,;1\right[ \\ h(x) = g(x) & \text{pour } x \in \left[1\,;+\infty\right[ \end{cases}$$

1. Répondre aux questions suivantes en justifiant votre réponse :
   a. La fonction $h$ est-elle continue en $1$?
   b. La fonction $h$ est-elle dérivable en $1$?
2. Dans le repère ci-dessous :




On souhaite tracer à main levée la courbe $\mathscr{C}_h$ représentative de la fonction $h$ observée à l'aide de la calculatrice. Pour cela, on commence par :
- tracer la tangente $(d)$ ;
- placer les tangentes horizontales de la courbe $\mathscr{C}_h$.

### Exercice 3600

**A - Etude d'une fonction :**

On considère la fonction $f$ définie par la relation :

$$f(x) = (x-1){\cdot}\sqrt{x^2-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f$.
2. a. Etudier les deux limites suivantes :
   $$\lim_{h\mapsto 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad ; \quad \lim_{h\mapsto 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
   b. Etudier la dérivabilité de la fonction $f$ en $-1$ et en $1$.
3. a. Déterminer l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**B - Prolongement par continuité :**

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x\in\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[ \\ g(x) = -x^3+x^2+x-1 & \text{pour } x\in\left[-1\,;1\right] \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction $g$. Justifier vos affirmations.

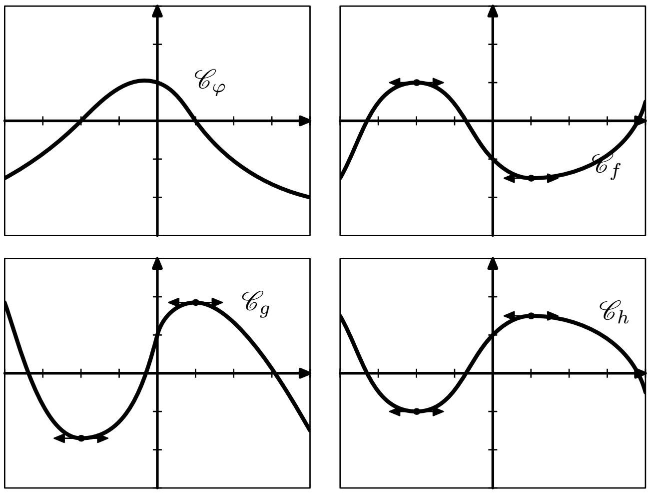
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.

4. Justifier l'existence d'un unique nombre $\alpha$ appartenant à $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
$g(\alpha)=2 \quad ; \quad 2<\alpha<2{,}1$

## *10. Introduction aux primitives :*

### Exercice 3575

On considère quatre fonctions $\varphi$, $f$, $g$, $h$ définies sur l'intervalle $\left[-4\,;4\right]$. Leurs courbes représentatives sont données, ci-dessous, dans un même repère orthonormé :

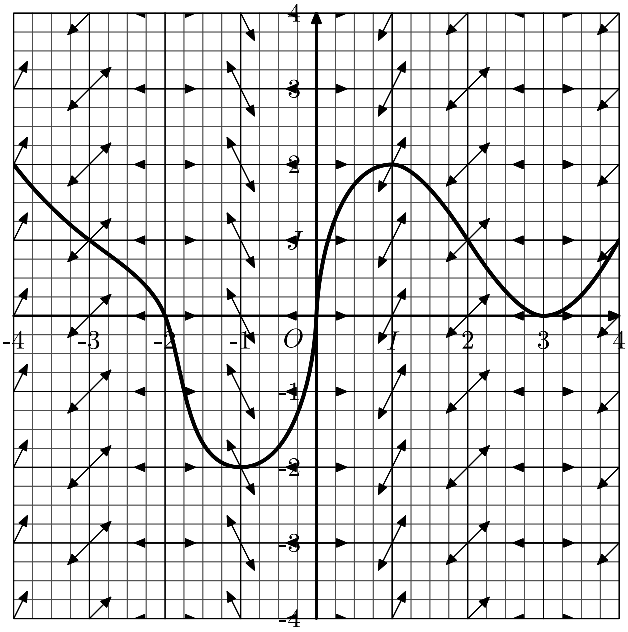



Quelle fonction, parmi $f$, $g$ et $h$, peut admetttre la fonction $\varphi$ comme fonction dérivée?

### Exercice 3560

Soit $f$ une fonction dérivable sur l'intervalle $\left[-4\,;4\right]$ et admettant la fonction $f'$ comme dérivée.

Dans le repère ci-dessous, est tracée la courbe représentative de la fonction $f'$.

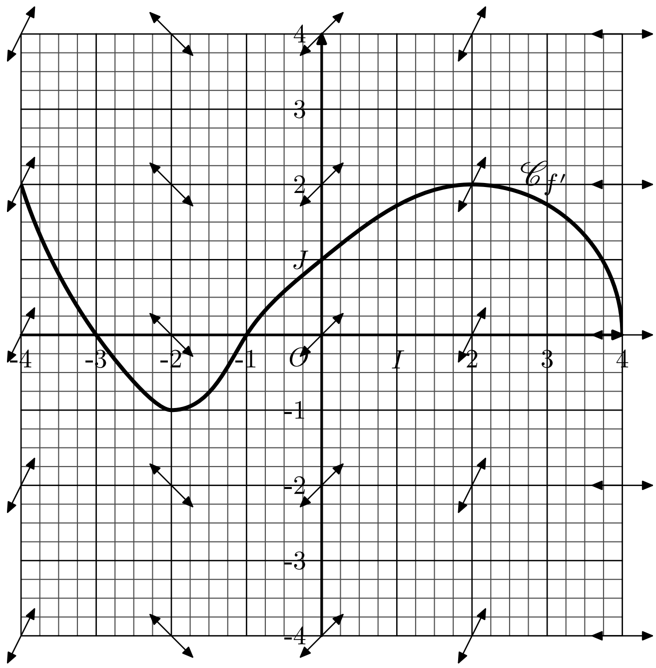



1. a. Quelle est la valeur du nombre dérivée de la fonction $f$ en 1?
   b. Donner le coefficient directeur de toutes les tangentes représentées sur la droite d'équation $x$=1.

2. Tracé une représentation "*possible*" de la fonction $f$ dans ce repère.

### Exercice 3561

On considère une fonction $f$ dérivable sur $\left[-4\,;4\right]$. Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,I\,;\,J\right)$ ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_{f'}$ de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$.




1. a. Quelle est le nombre dérivée de la fonction $f$ en $-2$.
   b. Tout au long de la droite d'équation $x$=$-2$ sont représentés des tangentes ; quel est le coefficient de ces tangentes.

2. Tracer une courbe représentative $\mathscr{C}_f$ acceptable de la fonction $f$ dont les tangentes aux points d'abscisses $-4$, $-2$, $0$, $2$, $4$ sont, dans chaque cas, une des tangentes proposées sur le graphique.

## 11. Tableau de signes sans le théorème des valeurs intermédiaires :

### Exercice 5102

1. Considérons la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $g(x) = -8x^3 + 4x - 4$
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.
   *(on utilisera des valeurs approchées pour compléter le tableau)*
   b. En observant que $g(-1)=0$, dresser le tableau de signe de la fonction $g$.
2. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \frac{2x^2+1}{\left(2x^2+2x+3\right)^2}$$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
   b. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
   c. Etablir que la fonction $f$ admet pour dérivée la fonction $f'$ dont l'expression est donnée par la relation :
   $$f'(x) = \frac{-8x^3+4x-4}{(2x^2+2x+3)^3}$$
   d. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
   *(on utilisera des valeurs approchées pour compléter le tableau)*
   e. En déduire le tableau de signe de la fonction $f$.

### Exercice 2927

1. Soit $n$ un entier naturel non-nul quelconque. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
   $$f(x) = \left(1+x\right)^n - 1 - n{\cdot}x$$
   Etablir le sens de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etablir l'inégalité ci-dessous pour tout nombre $x$ positif et tout entier naturel $n$ strictement positif :
   $$\left(1+x\right)^n \geqslant 1 + n\cdot x$$

L'inégalité établie à la dernière question s'appelle : ***Inégalité de Bernoulli***

## 12. Théorème des valeurs intermediaires :

### Exercice 3543

On considère une fonction $f$ qui admet le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-5$ | | $1$ | | $5$ | | $10^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | 4 | ↘ | -6 | ↗ | -1 ‖ 5 | ↘ | -13 |

1. Justifier que la fonction $f$ s'annule deux fois sur son ensemble de définition.
2. Soit $m$ un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de $m$ du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

### Exercice réservé 3569

On considère une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ admettant le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-4$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f$ | 3 | ↘ | $-\frac{9}{2}$ | ↗ | -1 |

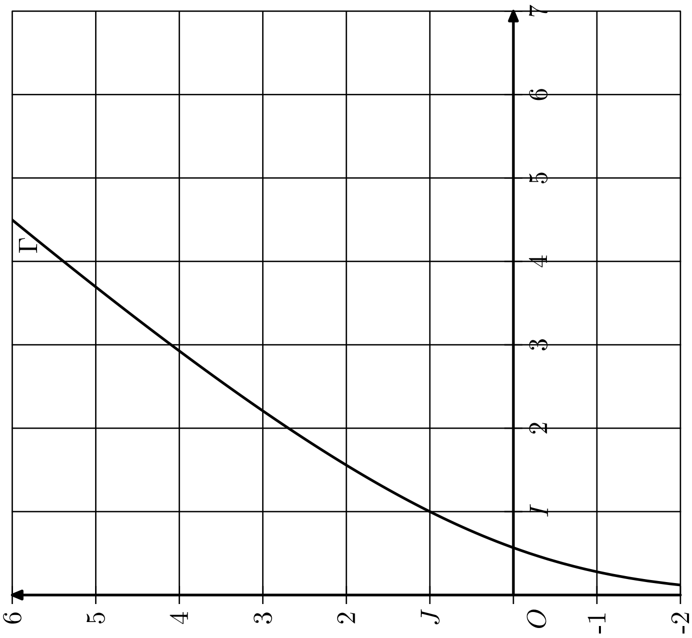
1. Justifier que la fonction $f$ s'annule une unique fois sur son ensemble de définition.
2. Soit $m$ un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de $m$ du nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

### Exercice 6239

On considère la fonction $f$ définie, continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ telle que :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty$$

On nomme $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ du plan.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.
   On note $\alpha_n$ cette solution.
2. Sur la page annexe, on a tracé $\Gamma$ dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Placer les nombres $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ et $\alpha_5$ sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.



**Exercice 3544**

On considère la fonction $f$ dont l'image d'un nombre $x$ est définie par la relation :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}$$

Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
   b. Déterminer les limites de la fonction $f$ en ses bornes.
   c. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes? Si oui, préciser lesquelles.
2. a. Déterminer l'expression de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$.
3. a. Justifier que la fonction $f$ ne s'annule qu'une fois sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$.
   b. Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ à l'aide de votre calculatrice ; utiliser les fonctions de votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée de ce zéro de la fonction $f$.

# 13. Etudes de sous-fonctions :

**Exercice 3557**

1. On considère la fonction polynôme $P$ définie pour tout réel $x$ par :
   $P(x)=2x^3-3x^2-1$
   a. Etudier les variations de $P$.
   b. Montrer que l'équation $P(x)=0$ admet une racine réelle et une seule, $\alpha$, et que $\alpha$ appartient à l'intervalle $\big]1{,}6\,;1{,}7\big[$
2. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des réels strictement supérieurs à $-1$. On considère la fonction numérique $f$ définie sur $\mathcal{D}$ par :

   $$f(x)=\frac{1-x}{1+x^3}$$

   On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à une repère orthonormé *(on prendra comme unité 4 cm)*.
   a. Etudier les variations de $f$ *(on utilisera pour cela les résultats du 1. )*.
   b. Ecrire une équation de la droite $(\Delta)$ tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\Delta)$ dans l'intervalle $\big]-1\,;1\big[$.
   c. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.
   Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $(\Delta)$ et la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

**Exercice réservé 6246**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :

$$f(x)=\frac{x^3+5{\cdot}x^2+2}{x^2+2}$$

**Partie A : étude d'une fonction annexe**

Soit $g$ la fonction polynômiale de degré 3 définie par :
$g(x)=x^3+6x+16$

1. Déterminer les limites de la fonction $g$ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que la fonction $g$ s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$. On notera $\alpha$ l'unique solution de l'équation :
   $g(x)=0$.
   On donnera une valeur approchée de $\alpha$ au centième près.
4. En déduire le signe de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$.

**Partie B : étude de la fonction $f$**

5. Déterminer les limites de la fonction $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
6. a. Déterminer l'expression de la dérivée $f'$ de la fonction $f$ et montrer qu'elle admet l'expression :

   $$f'(x)=\frac{x{\cdot}g(x)}{\big(x^2+2\big)^2}$$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
   On utilisera la valeur approchée : $f(\alpha)\approx 2{,}36$
7. Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$.
   a. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\Delta)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1$.
   b. Etudier le signe de la différence $f(x)-\big(-x+1\big)$ sur $\mathbb{R}$.
   En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ relativement à la tangente $(\Delta)$.

**Exercice réservé 3556**

On considère les fonctions numériques d'une variable réelle définies par :

$$f : x\longmapsto \frac{1}{3}{\cdot}\Big(x^2+x+\frac{1}{x}\Big)\quad ;\quad g : x\longmapsto 2x^3+x^2-1$$

1. Montrer que pour tout $x\neq 0$ les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
2. Etudier les variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$ avec $0<\alpha<1$. *(On ne cherchera pas à calculer $\alpha$)*
3. Dresser le tableau des variations de la fonction $f$.
   *(on admet que $f(\alpha)\approx 0{,}87$)*

On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de la fonction $f$ dans une repère orthonormé *(unité 3 cm)*, par $I$ le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $-1$ et par $J$ le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $+1$.

4. a. Vérifier que la droite $(IJ)$ est la tangente en $J$ à $(\mathscr{C})$.
   b. Déterminer une équation de la tangente $(T)$ en $I$ à $(\mathscr{C})$.

5. Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(T)$.

6. Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe $(\mathscr{C})$. *(On prendra $^2/_3$ comme valeur de $\alpha$)*

**Exercice réservé 3563**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=x^3-\sqrt{1+2\cdot x^2}$

1. Etudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$

2. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=3\cdot x\cdot\sqrt{2x^2+1}-2$

   a. Justifier que la fonction $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha$ tel que $g(\alpha)=0$. De plus, justifier que : $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

   c. Dresser le tableau de signe de la fonction $g$.

3. a. Déterminer l'expression de la dérivée $f'$ de la fonction $f$.

   b. Dresser le tableau de signe de $f'$.

   c. En déduire le tableau de variations de la fonction $f$. *(on utilisera des valeurs approchées obtenues à l'aide de la calculatrice).*

## *14. Etudes de dérivées et dérivées seconde :*

**Exercice 3562**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre $x$ est définie par la relation :
$f(x)=x-1+\dfrac{2}{x^2+1}$

1. Déterminer l'expression de la dérivée $f'$ de la fonction $f$, ainsi que celle de la dérivée seconde $f''$.

2. a. Etudier le signe de la fonction $f''$.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction $f'$. *(Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)*

3. a. Montrer que la fonction $f'$ s'annule pour $x=1$ et aussi en un nombre $\alpha$ vérifiant l'encadrement :
$0{,}2<\alpha<0{,}3$

   b. En déduire le tableau de signe de la fonction $f'$.

4. a. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$. *(Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)*

**Exercice réservé 5813**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre $x$ est donnée par la relation :
$f(x)=5x-\dfrac{1}{x^2+x+1}$

1. a. Montrer que la fonction $f$ admet pour dérivée seconde, la fonction $f''$ définie par :
$f''(x)=\dfrac{-6x\cdot(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^3}$

   b. Dresser le tableau de signe de la fonction $f''$.

2. a. Déduire de la question 1., le tableau de variations de la fonction $f'$.

   b. Justifier que la fonction $f'$ est positive sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que la fonction $f$ admet un unique zéro sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 5812**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre réel $x$ est définie par l'expression :
$f(x)=3\cdot\sqrt{x^2+1}-2\cdot x$

Le but de l'exercice est de montrer que la fonction $f$ admet un maximum global et d'obtenir une valeur approchée.

1. a. Montrer que la dérivée seconde de la fonction $f$ admet pour expression :
$f''(x)=\dfrac{3}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$

   b. Etablir les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f'(x)=-5$ ; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f'(x)=1$

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction $f'$.

2. a. Justifier que la fonction $f'$ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$.

   b. On note $\alpha$ l'unique solution de l'équation : $f'(x)=0$. Justifier brièvement que le nombre $\alpha$ appartient à l'intervalle $\big[0{,}8\,;0{,}9\big]$.

3. a. Dresser le tableau de signe de la fonction $f'$.

   b. Justifier que la fonction $f$ admet un minimum global qui est atteint pour $x=\alpha$.

## *15. Dichotomie :*

**Exercice 3534**

On considère la fonction $f$ définie par :
$f(x)=x^3+3\cdot x$

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

   b. Justifier que le nombre 5 admet un unique antécédent par la fonction $f$ ; on notera $\alpha$ ce nombre.

2. On pose pour valeur $a_0=0$ et $b_0=2$. On souhaite construire par la méthode de dichotomie les deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ adjacentes et convergentes vers $\alpha$.

a. Compléter le tableau ci-dessous :

| | $a_n$ | $c_n$ | $b_n$ | $f(a_n)$ | $f(c_n)$ | $f(b_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | | | | | | |
| $n=1$ | | | | | | |
| $n=2$ | | | | | | |
| $n=3$ | | | | | | |
| $n=4$ | | | | | | |
| $n=5$ | | | | | | |

b. Avec quelle précision obtient-on la valeur de $\alpha$ à l'aide du tableau.

## 255. Exercices non-classés :

### Exercice réservé 2290

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation :

$$f(x)=\frac{3{\cdot}x^3+2{\cdot}x}{2{\cdot}x^3-2{\cdot}x^2+x}$$

1. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=\frac{3{\cdot}x^2+2}{2{\cdot}x^2-2{\cdot}x+1}$$
Montrer que $f$ est la restriction sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $g$.

2. En déduire la limite de la fonction $f$ en 0. C'est à dire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x\neq 0}} f(x)$

### Exercice réservé 3558

Etude de la cissöde de Dioclès.

**Partie A**

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$

1. Dresser le tableau de variations de $f$.

2. Soit $\Gamma_1$, la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente $T$ à la courbe $\Gamma_1$, au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. Tracer la courbe $\Gamma_1$ et la droite $T$.

3. Sur le même graphique, tracer $\Gamma_2$ courbe symétrique de $\Gamma_1$ dans la symétrie orthogonale d'axe $Ox$.

4. Soit $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Montrer que $\Gamma$ a pour équation cartésienne :
$$x{\cdot}\left(x^2+y^2\right)-y^2=0$$

$\Gamma$ est appelé cissoïde de Dioclès.

**Partie B - Interprétation géométrique de $(E)$**

$I$ est le point de coordonnées $(1\,;0)$ dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.
$\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre $[OI]$ et $\Delta$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point $I$.
Soit $D$ la droite passant par $O$ de coefficient directeur $t$, $t\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer les coordonnées de $M$ tel que : $\mathscr{C}\cap D=\{O\,;M\}$.
Déterminer les coordonnées de $M'$ tel que : $\Gamma\cap D=\{O\,;M'\}$.
Déterminer les coordonnées de $N$ tel que : $\Delta\cap D=\{N\}$

2. Montrer que : $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{MN}$.

3. Déterminer l'intersection de $\Gamma$ et de $\mathscr{C}$.

### Exercice réservé 3576

Etudier la fonction $f$ définie par :
$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}-x+\frac{4}{x^2+1}$$

Elle a une asymptote oblique, une asymptote horizontale et une tangente horizontale super pour la trace

### Exercice réservé 3577

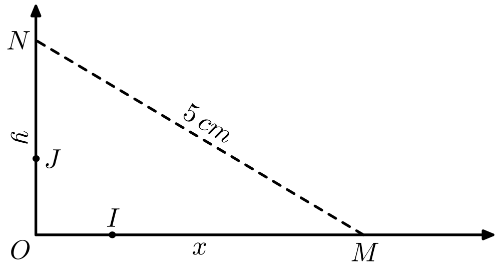
etude de $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x+1}$??

### Exercice réservé 4880

On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dont l'unité graphique est le centimètre.

On considère un segment $[MN]$ dont les extrémités $M$ et $N$ reposent sur les parties positives respectivement de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.




On considère les deux distances suivantes :
$a = OM \quad ; \quad b = ON$

1. Déterminer l'expression de $b$ en fonction de la valeur de $a$.

On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle $OMN$.

2. Démontrer que l'aire de $OMN$ s'exprime en fonction de $x$ par :
$$\mathcal{A}(x) = \frac{x \cdot \sqrt{25 - x^2}}{2}$$

3. Montrer que la fonction $\mathcal{A}'$ dérivée de la fonction $\mathcal{A}$ admet pour expression :
$$\mathcal{A}'(x) = \frac{25 - 2 \cdot x^2}{2 \cdot \sqrt{25 - x^2}}$$

4. a. Etablir le tableau de signe de la fonction $\mathcal{A}'$.
   b. Etablir le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.

5. En déduire la position du segment $[MN]$ pour laquelle le triangle $OMN$ possède une aire maximale.