Exercices supplémentaires : Produit scalaire dans l'espace

Dans tous les exercices, sauf quand cela est précisé, on considère un repère orthonormal de l'espace $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

Partie A : Repère et vecteurs coplanaires

Exercice 1

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(2;1;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Pour chacun des points suivants, précisez s'ils appartiennent à $\mathcal{D}$: $B(3;0;0)$; $C(5;-2;1)$; $D\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$; $E\left(2+\sqrt{2};1-\sqrt{2};\sqrt{3}-1\right)$

Exercice 2

On considère les points $A(2;3;-2)$ et $B(5;-1;0)$.

1) Déterminer les coordonnées de C et D tels que $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$.
2) Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
3) Déterminer les coordonnées du point G barycentre de $(A;2)$ et $(B;-3)$.

Exercice 3

Les points $(1;-1;0)$, $B(1;-1;4)$ et $C(1;-1;-3)$ sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 4

Déterminer a et b pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\a\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\b\end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Exercice 5

On considère les points $A(3;1;0)$, $B(5;2;-1)$, $C(-2;3;-1)$ et $D(12;1;-1)$.

1) Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ? Justifier.
2) On considère $E(2;5;a)$. Déterminer a pour que A, B, C et E soient coplanaires.

Exercice 6

On considère $A\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ et $B\left(\sqrt{2};-\sqrt{2};0\right)$. C est le symétrique de A par rapport à O.

Déterminer les coordonnées de C puis démontrer que ABC est une triangle rectangle isocèle.

Exercice 7

On considère $A(1;0;1)$, $B(-2;2;-1)$, $C(-5;0;-1)$ et $D(-2;-2;1)$

Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme. Est-ce un losange, un rectangle, un carré ?

Exercice 8

$ABCDEFGH$ est un cube. Les points I et J sont les milieux respectifs de $[EF]$ et $[FG]$.

1) Montrer que les droites (AI) et (CJ) sont sécantes.
2) Les droites (BI) et (FG) sont-elles sécantes ? Justifier.

Exercice 9

On considère trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et un point A. $(A;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ est-il un repère de l'espace ?

Exercice 10

On considère les points $A(2;1;0)$, $B(0;1;1)$ et $C(0;3;2)$ ainsi que le vecteur $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que A, B et Cne sont pas alignés.
2) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{k}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.
3) La droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{k}$ coupe le plan (ABC) en un point I. Déterminer ses coordonnées.

Exercice 11

On considère les points $A(-1;5;-3)$, $B(2;5;-3)$, $C(2;8;-3)$ et $D\left(\frac{1}{2};\frac{13}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}-3\right)$.
Calculer AB, BC, CD et AD. Que peut-on dire de $ABCD$?

Partie B : Produit scalaire dans l'espace

Exercice 1
On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête a et de centre O. Calculer en fonction de a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$

Exercice 2
$ABCDS$ est une pyramide à base carré et à sommet S dont toutes les arêtes ont la même mesure a.
Calculer en fonction de a : $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$.

Exercice 3
On considère un triangle ABC rectangle en B avec $\widehat{BAC} = 30°$. Un point D se projette orthogonalement en A sur le plan (ABC) et on a $AD = AC = a$.
Calculer en fonction de a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$.

Exercice 4
On considère les points $A(-1;1;2)$, $B(0;1;0)$ et $C(2;0;3)$.
Déterminer une valeur approchée des angles du triangle à 0,1° près.

Exercice 5
On considère les points $A(1;2;-2)$, $B(2;3;-2)$, $D(0;3;-2)$ et $E(1;2;-2+\sqrt{2})$.
1) Démontrer que $AB = AD = AE$ et que (AB), (AD) et (AE) sont orthogonaux deux à deux.
2) Déterminer les coordonnées de C, F, G et H pour que $ABCDEFGH$ soit un cube.

Partie C : Orthogonalité

Exercice 1
On considère $A(2;3;-1)$, $B(8;-2;4)$ et $C(3;0;5)$.
Déterminer a pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC}$ soient orthogonaux.

Exercice 2
On considère les points $A(-2;3;5)$ et $B(4;-1;-3)$.
Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$.

Exercice 3
On considère les points $A(1;0;1)$, $B(2;-1;1)$ et $C(0;-2;3)$.
Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ contenant C et perpendiculaire à (AB).

Partie D : Equations de plan et exercices bilan

Exercice 1

On considère $A(1;-1;0)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;0;1)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\15\\17\end{pmatrix}$.

1) Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés.
2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n}$.
3) En déduire une équation du plan (ABC).

Exercice 2

On considère les points $A(1;2;3)$, $B(0;1;5)$, $C(3;0;4)$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2) Démontrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si $\begin{cases}-a-b+2c=0\\2a-2b+c=0\end{cases}$
3) En déduire un vecteur normal à (ABC) puis une équation de (ABC).

Exercice 3

On considère $A(1;1;5)$ et $B(-1;-3;4)$ ainsi que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x-2y+z-2=0$.

1) Démontrer que (AB) et $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles.
2) Déterminer les coordonnées de C, intersection de (AB) et $\mathcal{P}$.

Exercice 4

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y-z+1=0$ et un point $M(0;1;1)$.

1) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}'$ passant par $A(1;0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
2) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
3) Calculer la distance de M à $\mathcal{P}$ puis à $\mathcal{P}'$.
4) En déduire la distance de M à la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Correction exercices supplémentaires : Espace

Partie A : Repère et vecteurs coplanaires

Exercice 1

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\boxed{B\in\mathcal{D}}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ ne sont clairement pas colinéaires donc $\boxed{C\notin\mathcal{D}}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ donc on a $\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{2}\vec{u}$ et donc $\boxed{D\in\mathcal{D}}$

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires et $\boxed{E\notin\mathcal{D}}$

Exercice 2

1) $\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2-x_C\\3-y_C\\-2-z_C\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x_C=6\\3-y_C=-8\\-2-z_C=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=-4\\y_C=11\\z_C=-6\end{cases}$ donc $\boxed{C(-4;11;-6)}$

2) $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{7}{2}$; $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=1$; $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=-1$ donc $\boxed{I\left(\frac{7}{2};1;-1\right)}$

3) $x_G=\frac{2x_A-3x_B}{2-3}=\frac{2\times2-3\times5}{-1}=11$; $y_G=\frac{2\times3-3\times(-1)}{-1}=-9$; $z_G=\frac{2\times(-2)-3\times0}{-1}=4$ donc $\boxed{G(11;-9;4)}$

Exercice 3

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et A,B et C sont alignés.

Exercice 4

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc leurs coordonnées sont proportionnelles.

Avec les abscisses et ordonnées : $2\times(-2)-a=0$ d'où $\boxed{a=-4}$

Avec les abscisses et côtés : $2b-5=0$ d'où $\boxed{b=\frac{5}{2}}$

Exercice 5

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}9\\0\\-1\end{pmatrix}$. On cherche s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$:

$\begin{cases}2a-5b=9\\a+2b=0\\-a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-9b=9\\a=-2b\\b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\a=2\\b=-1\end{cases}$ donc $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ donc A,B,C et D sont coplanaires.

2) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\4\\a\end{pmatrix}$ A,B,C et E sont coplanaires donc il existe deux réels c et d tels que $\overrightarrow{AE}=c\overrightarrow{AB}+d\overrightarrow{AC}$.

$\begin{cases}2c-5d=-1\\c+2d=4\\-c-d=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2c-5d=-1 & (L_1)\\2c+4d=8 & (L_2)\\a=-c-d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9d=9 & (L_2-L_1)\\2c+4d=8\\a=-c-d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=1\\c=2\\a=-3\end{cases}$ donc on doit choisir $\boxed{a=-3}$

Exercice 6

C est le symétrique de A par rapport à O donc O est le milieu de $[AC]$ et $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ donc $\boxed{C\left(-1;-1;-\sqrt{2}\right)}$

$AB = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(-\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + \left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+4+8} = \sqrt{16} = 4$

$BC = \sqrt{\left(-1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

On voit que $AB = BC$ donc ABC est isocèle en B.
De plus $AC^2 = 16$ et $AB^2 + BC^2 = 8 + 8 = 16$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.

Exercice 7

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $ABCD$ est bien un parallélogramme.

$AB = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

$BC = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$

$ABCD$ n'a pas deux côtés consécutifs de même longueur donc ce n'est ni un losange, ni un carré.

$AC = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$ donc $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ donc le triangle ABC n'est pas rectangle en B et $ABCD$ n'est pas un rectangle.

Exercice 8

1) On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$. $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ et $J\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ ne sont pas colinéaires donc (AI) et (CJ) ne sont pas parallèles.

De plus, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Cherchons s'il existe a et b tels que $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AI} + b\overrightarrow{CJ}$:

$\begin{cases} \frac{1}{2}a = 1 \\ -\frac{1}{2}b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ a + b = 0 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{CJ}$ donc A, C, I et J sont bien coplanaires et donc (AI) et (CJ) sont sécantes.

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ On cherche s'il existe a et b tels que $\overrightarrow{FG} = a\overrightarrow{BI} + b\overrightarrow{BF}$:

$\begin{cases} -\frac{1}{2}a = 0 \\ b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ a + b = 1 \neq 0 \end{cases}$ donc a et b n'existe pas. Les points B, F, G et I ne sont pas coplanaires donc les droites (BI) et (FG) ne sont pas sécantes.

Exercice 9

On doit démontrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. Pour cela, on cherche a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$:

$\begin{cases} -2b = -1 \\ -a - b = -1 \\ a + 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{5}{2} \end{cases}$ donc a et b n'existe pas et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires et on a bien un repère de l'espace.

Exercice 10

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ Ces vecteurs ne sont clairement pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés.

2) On cherche a et b tels que $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB} + b\vec{k}$:

$\begin{cases}-2a = -2\\ 0 = 2\\ a + b = 2\end{cases}$ ce qui est clairement impossible donc $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

3) I est un point de la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{k}$ donc $\overrightarrow{OI}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires et il existe un réel c tel que $\overrightarrow{OI} = c\vec{k}$ donc $\begin{cases}x_I = 0\\ y_I = 0\\ z_I = c\end{cases}$ d'où $I(0; 0; c)$.

De plus $I \in (ABC)$ donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont coplanaires et il existe a et b tels que $\overrightarrow{AI} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ avec $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-2\\-1\\c\end{pmatrix}$

$\begin{cases}-2a - 2b = -2\\ 2b = -1\\ a + 2b = c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 1 - b\\ b = -\frac{1}{2}\\ c = a + 2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = \frac{3}{2}\\ b = -\frac{1}{2}\\ c = \frac{1}{2}\end{cases}$ donc $\boxed{I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)}$

Exercice 11

$AB = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

$BC = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

$CD = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$AD = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{2}} = \sqrt{9} = 3$

On peut donc dire que $ABCD$ est un tétraèdre régulier…

<u>Partie B : Produit scalaire dans l'espace</u>

Exercice 1

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ car $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{a^2}$ car le triangle ABC est rectangle isocèle en B avec $AB = BC = a$ donc $AC = a\sqrt{2}$ et $\widehat{BAC} = 45°$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) = AB^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG} = a^2 + 0 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = a^2 + 0 = \boxed{a^2}$

Car (AB) est perpendiculaire à (BC) mais aussi à (AE)..

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CF} = -CB \times CF \times \cos(\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CF}) = -a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-a^2}$

Car BCF est un triangle rectangle isocèle en B.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}.\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG} = \boxed{\frac{1}{2}a^2}$

Exercice 2

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SB}) = a \times a \times \cos(60°) = a^2 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}a^2}$ car ABS est équilatéral.

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{SA}\|^2 + \|\overrightarrow{SC}\|^2 - \|\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[SA^2 + SC^2 - \|\overrightarrow{CA}\|^2\right] = \frac{1}{2}\left(a^2 + a^2 - (a\sqrt{2})^2\right) = \boxed{0}$

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC} = -AS \times AC \times \cos(\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}) = -a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-a^2}$ car ASC est isocèle rectangle en S d'après le produit scalaire précédent.

Exercice 3

Commençons par calculer les côtés du triangle ABC en fonction de a : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$ donc $AB = AC \times \cos(\widehat{BAC}) = a \times \cos(30°) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. De la même manière, $BC = AC \times \sin(\widehat{BAC}) = \frac{a}{2}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \times a \times \cos(30°) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\dfrac{3a^2}{4}}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \boxed{0}$ car (AD) est perpendiculaire à (ABC) donc est orthogonale à toute droite du plan (ABC).

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{CA} = CA^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA} = a^2 + 0 = \boxed{a^2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0 = \boxed{-\dfrac{3a^2}{4}}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + 0 = -CB \times CA \times \cos(\widehat{BCA}) = -\dfrac{a}{2} \times a \times \cos(60°)$

$= -\dfrac{a^2}{2} \times \dfrac{1}{2} = \boxed{-\dfrac{a^2}{4}}$

Exercice 4

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 - 0 - 2 = 1$ mais aussi

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = \sqrt{5} \times \sqrt{11} \times \cos(\widehat{BAC})$ d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{\sqrt{55}}$ et donc $\widehat{BAC} \approx \boxed{82{,}3°}$.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -2 + 0 + 6 = 4$ mais aussi $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \sqrt{5} \times \sqrt{14} \times \cos(\widehat{ABC})$ d'où $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{4}{\sqrt{70}}$ et donc $\widehat{ABC} \approx \boxed{61{,}4°}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 6 + 1 + 3 = 10$ mais aussi $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \sqrt{11} \times \sqrt{14} \times \cos(\widehat{ACB})$ d'où $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{10}{\sqrt{154}}$ et donc $\widehat{ACB} \approx \boxed{36{,}3°}$

Exercice 5

1) $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{1+1+0} = \boxed{\sqrt{2}}$

$AD = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \boxed{\sqrt{2}}$ $\quad AE = \sqrt{0^2 + 0^2 + (\sqrt{2})^2} = \boxed{\sqrt{2}}$ donc on a bien $AB = AD = AE$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0$ donc (AB) et (AD) sont orthogonales.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$ donc (AB) et (AE) sont orthogonales.

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = 0 + 0 + 0 = 0$ donc (AD) et (AE) sont orthogonales.

2) $ABCDEFGH$ est un cube donc $ABCD$ est une face donc un carré et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d'où $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_C - 0\\y_C - 3\\z_C + 2\end{pmatrix}$ et donc

$\begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 4 \\ z_C = -2 \end{cases}$ et donc $\boxed{C(1; 4; -2)}$

De même $ABFE$ est un carré et donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ d'où $\begin{cases} x_F - 1 = 1 \\ y_F - 2 = 1 \\ z_F + 2 - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 2 \\ y_F = 3 \\ z_F = -2 + \sqrt{2} \end{cases}$ et $\boxed{F(2; 3; -2 + \sqrt{2})}$

$ADHE$ est aussi un carré avec $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$ et donc $\begin{cases} x_H - 1 = -1 \\ y_H - 2 = 1 \\ z_H + 2 - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 3 \\ z_H = -2 + \sqrt{2} \end{cases}$ et $\boxed{H(0; 3; -2 + \sqrt{2})}$

$EFGH$ est aussi un carré avec $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ donc $\begin{cases} x_G - 0 = 1 \\ y_G - 3 = 0 \\ z_G + 2 - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = 3 \\ z_G = -2 + \sqrt{2} \end{cases}$ et $\boxed{G(1; 3; -2 + \sqrt{2})}$

<u>Partie C : Orthogonalité</u>

Exercice 1

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 + a \\ -5 - 3a \\ 5 + 6a \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 6(6 + a) - 5(-5 - 3a) + 5(5 + 6a) = 0 \Leftrightarrow 36 + 6a + 25 + 15a + 25 + 30a = 0 \Leftrightarrow 51a = -86$

$\Leftrightarrow \boxed{a = -\frac{86}{51}}$

Exercice 2

On note $\mathcal{P}$ le plan médiateur de $[AB]$: il passe par le milieu I de $[AB]$ avec $I(2; 1; 1)$ et est orthogonal à (AB).

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6(x - 2) - 4(y - 1) - 8(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{6x - 4y - 8z = 0}$

Exercice 3

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y + 2 \\ z - 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - (y + 2) + 0(z - 3) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x - y - 2 = 0}$

<u>Partie D : Equations de plan et exercices bilan</u>

Exercice 1

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont clairement pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés.
2) $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} = 8 + 60 - 68 = \boxed{0}$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix} = -32 + 15 + 17 = \boxed{0}$
3) On déduit de la question précédente que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) donc est un vecteur normal à (ABC). Une équation de (ABC) est donc $8x + 15y + 17z + d = 0$. Pour déterminer d, on peut utiliser les coordonnées de A : $8 - 15 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 7$ d'où $\boxed{8x + 15y + 17z + 7 = 0}$ est une équation de (ABC).

Exercice 2

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ On cherche s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ autrement dit $\begin{cases} -1 = 2k \\ -1 = -2k \\ 2 = k \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ k = 2 \end{cases}$ C'est clairement impossible donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2) $\vec{n}$ normal à $(ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b + 2c = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases}$
3) $\begin{cases} -a - b + 2c = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b + 2c \\ -2b + 4c - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 2 \times \frac{4}{5}b \\ c = \frac{4}{5}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{5}b \\ c = \frac{4}{5}b \end{cases}$

On peut donc choisir $b = 5$; $a = -3$ et $c = 4$. Une équation de (ABC) est donc $-3x + 5y + 4z + d = 0$.

$A \in (ABC)$ donc $-3 + 10 + 12 + d = 0$ donc $d = -9$. Une équation de (ABC) est $\boxed{-3x + 5y + 4z - 9 = 0}$

Exercice 3

1) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = -4+8-1 = 3 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ ne sont par orthogonaux et (AB) n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$.

2) On considère $C(x;y;z)$ intersection de (AB) et $\mathcal{P}$. Comme $C \in (AB)$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ou encore $\begin{cases}x_C - 1 = -2k\\ y_C - 1 = -4k\\ z_C - 5 = -k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_C = 1-2k\\ y_C = 1-4k.\\ z_C = 5-k\end{cases}$

$C \in \mathcal{P}$ donc

$2(1-2k)-2(1-4k)+(5-k)-2 = 0 \Leftrightarrow 2-4k-2+8k+5-k-2 = 0 \Leftrightarrow 3k = -3 \Leftrightarrow k = -1$

On a donc $\boxed{C(3;5;6)}$

Exercice 4

1) $M \in \mathcal{P}' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y\\z-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(x-1)+y+(z-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{-x+y+z=0}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$. $\vec{u}.\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = -1+2-1 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux également.

3) $d(M;\mathcal{P}) = \frac{|0+2-1+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$ $\quad d(M;\mathcal{P}') = \frac{|-0+1+1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

4) En notant A le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, B le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}'$ et C le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}'$ alors $MACB$ est un rectangle et dans le triangle AMC rectangle en A :

$MC^2 = MA^2 + AC^2$ avec MC la distance de M à la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, $MA = d(M;\mathcal{P})$ et $AC = MB = d(M;\mathcal{P}')$ d'où $MC^2 = \frac{6}{9} + 4 \times \frac{3}{9} = \frac{18}{9} = 2$ et donc $\boxed{MC = \sqrt{2}}$