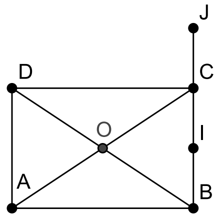
Produit scalaire dans l'espace – Exercices

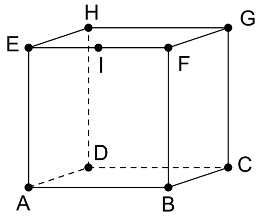
Produit scalaire

1 $ABCD$ est un rectangle de centre O avec $AB = 6$ et $AD = 4$. On appelle I le milieu du segment $[BC]$ et J le point défini par $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$. Calculer



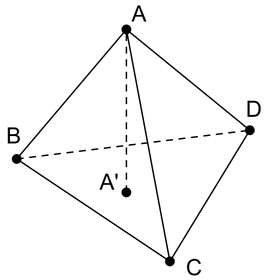
a. $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC}$ **b.** $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AD}$
c. $\overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{DI}$ **d.** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$
e. $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BO}$ **f.** $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD}$

2 Calculer les produits scalaires dans le cube de côté a ci-contre.



a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$
c. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD}$ **d.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HD}$
e. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BG}$ **f.** $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{FD}$

3 On considère un tétraèdre régulier $ABCD$, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.
A' est le centre de gravité du triangle BCD. Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment $[AA']$ est une médiane du tétraèdre $ABCD$.



1. Montrer que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. On pourra utiliser le point I milieu de $[BD]$.
2. En déduire que la médiane (AA') est orthogonale à la face BCD.

4 Soit $A(7;-5;6)$, $B(0;-4;-3)$ et $C(1;3;-3)$ et I le milieu de $[AC]$.
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.
2. Déterminer une valeur approchée de $\widehat{CBI}$.

Équation cartésienne d'un plan, position relative

5 Déterminer une équation du plan P passant par $A(1;-2;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2;1;1)$.

6 Soit P le plan d'équation $x + y + z + 3 = 0$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal de P.

7 Soit $A(-2;1;0)$, $B(1;3;1)$ et $C(3;0;3)$.
1. Justifier que A, B, C ne sont pas alignés.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(-7;4;13)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

8 Donner la position relative d'un plan P de vecteur normal $\vec{n}(-1;3;7)$ et d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}(4;2;-1)$.

9 Soit P le plan d'équation $7x + 2y - z + 4 = 0$.
Les droites (d_1) et (d_2) sont définies par une représentation paramétrique donnée ci-dessous :

$$(d_1) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } (d_2) : \begin{cases} x = 15 - 3t \\ y = -9 + t \\ z = 7 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Le plan P et la droite (d_1) sont-ils sécants ?
2. Déterminer l'intersection du plan P et de la droite (d_2).

10 Soit les points $A(2;4;7)$ et $B(1;1;1)$ et le plan P d'équation $5x + 3y - z + 1 = 0$.
1. Justifier que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
2. Déterminer leur intersection.

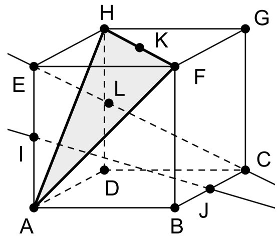
11 Justifier que les plans d'équation $2x + y - z + 7 = 0$ et $4x + 5y + 2z - 1 = 0$ sont sécants.

12 Dans un repère de l'espace on considère les trois plans suivants :
- P_1 d'équation $x + y - z = 0$;
- P_2 d'équation $2x + y + z - 3 = 0$;
- P_3 d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ.
2. En déduire la nature de l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Problèmes de baccalauréat

13 *(2013, Antilles-Guyane).* QCM sans justification où une seule réponse est exacte.
Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:



- $ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1 ;
- on appelle P le plan (AFH) ;
- le point I est le milieu du segment $[AE]$;
- le point J est le milieu du segment $[BC]$;
- le point K est le milieu du segment $[HF]$;
- le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan P.

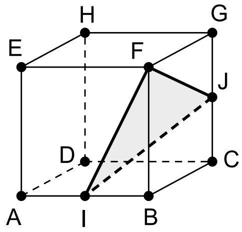
1. Les droites (IJ) et (EC) sont…
   a. strictement parallèles **b.** non coplanaires
   c. sécantes **d.** confondues
2. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG}$ est égal à…
   a. 0 **b.** -1 **c.** 1 **d.** 2
3. Le plan P a pour équation cartésienne…
   a. $x + y + z - 1 = 0$ **b.** $x - y + z = 0$
   c. $-x + y + z = 0$ **d.** $x + y - z = 0$
4. Un vecteur normal au plan P est…
   a. $\overrightarrow{EG}$ **b.** $\overrightarrow{EL}$ **c.** $\overrightarrow{IJ}$ **d.** $\overrightarrow{DI}$
5. Laquelle de ces égalités est vraie ?
   a. $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ **b.** $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$
   c. $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ **d.** $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$

14 *(2011, Amérique du Sud).* Vrai ou faux à justifier.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(-1;-1;1)$ et les droites D et D' de représentations paramétriques :

$$D : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \text{ et } D' : \begin{cases} x = 3t' \\ y = t' + 2 \\ z = 3t' - 2 \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite D ».
Proposition 2 : « Le plan perpendiculaire à la droite D passant par le point O a pour équation : $2x - 3y + z = 0$ ».
Proposition 3 : « Les droites D et D' sont orthogonales ».
Proposition 4 : « Les droites D et D' sont coplanaires ».

15 *(2005, Amérique du Sud)*. Vrai ou faux ? Ne pas justifier. On donne le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.



1. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$
2. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times IC \times \cos\frac{\pi}{3}$

On utilise dans les questions suivantes le repère orthonormé $\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

5. Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \text{ le paramètre } t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$
6. Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ le paramètre } t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$
7. $6x - 7y + 8z - 3 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (IF).
8. L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par I et par le milieu de l'arête $[DC]$.
9. Le vecteur de coordonnées $(-4; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (FIJ).
10. Le volume du tétraèdre $EFIJ$ est égal à $\frac{1}{6}$.

16 *(2014, centres étrangers)*. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1; 2; 7)$, $B(2; 0; 2)$, $C(3; 1; 3)$, $D(3; -6; 1)$ et $E(4; -8; -4)$.

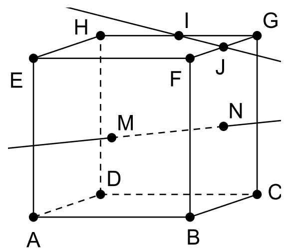
1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit $\vec{u}(1; b; c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.
   - **a.** Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).
   - **b.** En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - 2y + z - 4 = 0$.
   - **c.** Le point D appartient-il au plan (ABC) ?
3. On considère la droite Δ de l'espace dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   - **a.** La droite Δ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?
   - **b.** Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

17 *(2014, métropole)*. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre $ABCD$ dont les sommets ont pour coordonnées :
$A\left(1; -\sqrt{3}\,; 0\right)$, $B\left(1; \sqrt{3}\,; 0\right)$, $C(-2; 0; 0)$ et $D\left(0; 0; 2\sqrt{2}\right)$.

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.
2. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   - **a.** Démontrer que Δ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.
   - **b.** Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite Δ et du plan (ABD).
3. **a.** On note L le milieu du segment $[AC]$.
   Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).
   - **b.** Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.
4. Démontrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

18 *(2014, Amérique du Sud)*. QCM sans justification.

1. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(2; 5 - 1)$, $B(3; 2; 1)$ et $C(1; 3; -2)$. Le triangle ABC est :
   - **a.** rectangle et non isocèle
   - **b.** isocèle et non rectangle
   - **c.** rectangle et isocèle
   - **d.** équilatéral
2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point $A(2; 5; -1)$. Une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan P et passant par A est :
   - **a.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 - t \end{cases}$
   - **c.** $\begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$
3. Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est :
   - **a.** l'ensemble vide
   - **b.** la médiatrice du segment $[AB]$
   - **c.** le cercle de diamètre $[AB]$
   - **d.** la droite (AB)
4. La figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[GH]$ et $[FG]$. Les points M et N sont les centres respectifs des faces $ABFE$ et $BCGF$.



   Les droites (IJ) et (MN) sont :
   - **a.** perpendiculaires
   - **b.** sécantes, non perpendiculaires
   - **c.** orthogonales
   - **d.** parallèles

19 *(2014, Polynésie)*. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points
$A(5; -5; 2)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(0; 1; 2)$ et $D(6; 6; -1)$.

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2; 3; 1)$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   - **b.** Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite D et du plan (BCD).
5. Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.
6. On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

20 *(2013, centres étrangers).* On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. On considère les points $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L(a; 1; 0)$ avec $a \in [0; 1]$.

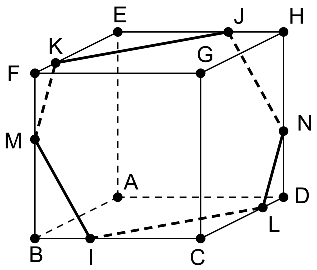
Partie A –

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases},\ t' \in \mathbb{R}.$$
3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si $a = \frac{1}{4}$.

Partie B – Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.
2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube $ABCDEFGH$ telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



   On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).
   Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.
   a. Prouver que le vecteur $\vec{n}(8; 9; 5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
   c. En déduire les coordonnées des points M et N.

21 *(2013, Pondichéry).* QCM sans justification où une seule réponse est exacte.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal, t et t' désignent des paramètres réels.
Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.
Le plan (S) a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$$
La droite (D) a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$$
On donne les points de l'espace $M(-1; 2; 3)$ et $N(1; -2; 9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :
   a. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases}$
   c. $\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 - t - 2t' \\ z = 1 - t - 3t' \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 - 2t + 2t' \\ z = -t - t' \end{cases}$
2. **a.** La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point $A(-8; 3; 2)$.
   b. La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
   c. La droite (D) est une droite du plan (P).
   d. La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
3. **a.** La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
   b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
   c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
   d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.
4. **a.** Les plans (P) et (S) sont parallèles.
   b. La droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
   c. Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
   d. Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

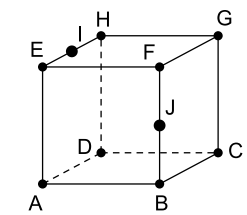
22 *(2014, métropole).* Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$

1. On désigne par P le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan P et de la droite (DF).
   a. Donner les coordonnées des points D et F.
   b. Donner une représentation paramétrique de (DF).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan P.
   d. Calculer les coordonnées du point H.
   e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   a. Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.
   b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que $ME \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
   c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\frac{\alpha}{2}$ est maximal. En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
   d. Conclure.
   e. *(question non présente dans le sujet initial).* Montrer que α est maximale si et seulement si $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$.

23 *(2015, Nouvelle-Calédonie).* L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.
Soient le point A_1 de coordonnées $(0; 2; -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $(1; 2; 3)$.
On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$.
On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2k \\ z = 2 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à la fois à D_1 et D_2.

1. **a.** Donner une représentation paramétrique de D_1.
   b. Donner un vecteur directeur de D_2 (on le notera $\overrightarrow{u_2}$).
   c. Le point $A_2(-1; 4; 2)$ appartient-il à D_2 ?
2. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.
3. Soit le vecteur $\vec{v}(-6; -3; 4)$. On définit la droite Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{v}$ et la droite Δ_2 passant par A_2 et parallèle à Δ_1.
   Justifier que les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.
   Dans la suite, on admettra que les droites D_2 et Δ_2 sont perpendiculaires.
4. Soit P_1 le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 et P_2 le plan défini par les droites D_2 et Δ_2.
   a. Soit le vecteur $\vec{n}(17; -22; 9)$. Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P_1.
   b. Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.
5. Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2 . On admettra que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ.
   Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2.

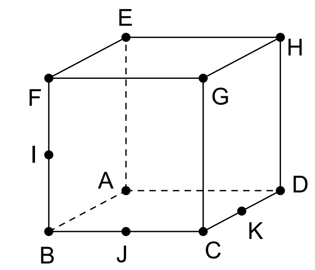
24 *(2017, métropole).* Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.



On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.
On munit l'espace du repère orthonormé $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; -2; 2)$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   c. On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?
3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   a. En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre $FBIG$ est égal à $\frac{1}{6}$.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3}B \times h$ où désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; \frac{5}{9}\right)$.
   d. Calculer la longueur FF'. En déduire l'aire du triangle BGI.

25 *(2016, Pondichéry).* $ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.



Le point I est le milieu du segment $[BF]$, J celui de $[BC]$ et K celui de $[CD]$.

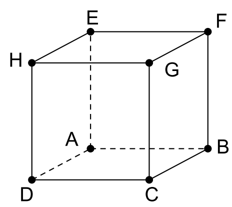
Partie A – Dans cette partie, on ne demande aucune justification.
On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure ci-contre et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B – L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J, K dans ce repère.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
3. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.
   a. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.
   b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
4. Démontrer que pour ce point $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$:
   a. N appartient au plan (IJK).
   b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

26 *(2015, Antilles-Guyane).* Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-contre.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. **a.** Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique
   $$\begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 0 \end{cases}, \text{ où } s \in \mathbb{R}$$
   b. Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t; t; t)$ où t est un réel.
2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).
   Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
3. Soit s et t deux réels quelconques.
   On note $M(s; 1 - s; 0)$ un point de la droite (DB) et $N(t; t; t)$ un point de la droite (AG).
   a. Montrer que $MN^2 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.
   b. En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.
   Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas ?