LYCEE DE LOUGA — ANNEE SCOLAIRE : 2012 – 2013

CLASSE DE 1re S1 — DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n$\in IN$ $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in IN}$ est minorée par 0 et majorée par 4.
3. Montrer que $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$; $\forall$ n$\in IN$.
4. En déduire par récurrence que pour tout n$\in IN$: $4 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

Exercice 2

On définit deux suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$, et pour tout $n \geq 1$: $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$.

1. Soit $(w_n)_{n\in N}$ la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que $(w_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique. Calculer w_n en fonction de *n*, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in N}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in N}$ est décroissante.
3. Montrer que ces deux suites sont convergentes.
4. Soit $(x_n)_{n\in N}$ la suite de terme général $x_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que cette suite est constante.
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 3

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies, pour tout entier naturel *n*, par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{4} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - n - \frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{4}$$

1. Calculer v_0, v_1, v_2.

2. a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Calculer en fonction de *n*, la somme : $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

3. Soit la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par : $t_n = -\frac{3}{2}n + \frac{1}{4}$.

a) Montrer que (t_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Calculer en fonction de *n* la somme : $T = t_0 + t_1 + t_2 + ... + t_n$.

4. a) Montrer que, pour tout entier *n*, $u_n = v_n + t_n$.

b) Soit la somme : $\Sigma = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $\Sigma = S + T$. En déduire l'expression de Σ en fonction de *n*.

Exercice 4

1. Une suite géométrique réelle (u_n) admet pour raison un réel strictement positif q.

a. Préciser q sachant que $625\,u_{12} = 16u_8$.

b. On note S_n la somme $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Exprimer S_n en fonction de u_1, q et n.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 5u_n - 3$. Exprimer $\sum_{k=1}^{n} v_k$ en fonction de n.

Exercice 5

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{4}V_n$ et $V_{n+1} = \frac{3}{4}V_n + \frac{1}{4}U_n$; avec $U_0 = 1$ et $V_0 = 3$.

1. On pose $W_n = U_n - V_n$ pour tout entier naturel n. Montrer que (W_n) est une suite géométrique convergente. Comparer U_n et V_n.
2. Etudier les sens de variation de (U_n) et (V_n).
3. Montrer que (U_n) est majorée et que (V_n) est minorée.
4. En déduire que (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite l.
5. On pose $D_n = U_n + V_n$ pour tout n. Montrer que (D_n) est constante puis en déduire l.

Exercice 6

Deux entreprises A et B proposent des contrats différents à un ouvrier à la recherche du travail.

Entreprise A : propose un salaire de $u_1 = 100000^F$ pour le premier mois mais ce salaire augmente régulièrement de 2000^F par rapport au mois précédent à partir du $2^{éme}$ mois.

Soit u_n le salaire au $n^{iéme}$ mois

a) Calculer u_2

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.

c) Calculer le salaire perçu par cet ouvrier durant un an de contrat ?

Entreprise B : propose un salaire de $v_1 = 70\,000^F$ pour le premier mois mais ce salaire augmente régulièrement de $10\,\%$ par rapport au mois précédent à partir du $2^{éme}$ mois.

Soit v_n le salaire au $n^{iéme}$ mois.

a) Calculer v_2

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de la suite (v_n), puis exprimer v_n en fonction de n.

c) Calculer le salaire perçu par cet ouvrier avec l'entreprise B durant un an de contrat ?

Conclusion : Si l'ouvrier s'intéresse à l'entreprise qui propose le meilleur salaire annuel, quelle entreprise choisira-t-il ?

Exercice 7

Une municipalité envisage l'aménagement d'un lac artificiel. Dans le projet, le lac devra contenir 30 000 m^3 d'eau le matin de la date de livraison à l'autorité municipale.

On estime qu'en période de saison sèche, les pertes d'eau dues à l'évaporation sont de 2% par jour.

Cependant, on prévoit un apport d'eau de 500 m^3 chaque nuit durant la saison sèche.

L'ouvrage a été livré aux autorités municipales lors d'une saison sèche qui aura duré 61 jours.

1. On note v_n le volume d'eau, en m^3, contenu dans le lac, au matin du $n^{ième}$ jour après la date de livraison.

a) Calculer v_1, v_2, v_3.

b) Justifier l'égalité $v_{n+1} = v_n \times 0{,}98 + 500$

2. On pose : $u_n = v_n - 25\,000$.

a) Monter que (u_n) est une suite géométrique

b) Exprimer u_n, puis v_n en fonction de n.

c) Après combien de jours le volume d'eau dans le lac sera-t-il inférieur à 27 000 m^3.

d) Déterminer le volume d'eau restant dans le lac le matin du dernier jour de la saison sèche.

Exercice

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n{}^2 \end{cases}$.

1. Conjecturer une formule explicite de u_n.
2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer cette conjecture.
3. Etudier le sens de variation de la suite (u_n)
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice

I- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.

2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{u_n}{n}$ est une suite géométrique.

3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

II-On considère la suite définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence (R) $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n^2 + n$

1. Déterminer un polynôme du second degré de façon que la suite de terme général $\alpha_n = P(n)$ vérifie la relation (R).

2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3. Donner l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n et de a.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = -4$ et $u_n = \frac{2}{5} u_{n-1} - 3$.

a. Déterminer le réel α tel que (v_n) définie sur IN par $v_n = u_n + \alpha$ soit géométrique.

b. Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

c. On pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i$ et $S'_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ .Calculer S_n et S'_n en fonction de n.

Exercice

La suite de terme général u_n est définie par $u_1 = 2$; u_2=1 et $\forall n \in IN \quad u_{n+2} = \frac{2u_{n+1} + u_n}{3}$

1. Calculer u_3, u_4, u_5.

2. Soit la suite (w_n) définie par : $w_n = u_{n+1} - u_n$; $\forall n \in IN^*$. Calculer w_n en fonction de w_{n-1} et montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on calculera le premier terme. Exprimer w_n en fonction de n.

3. Calculer $S_n = w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_{n-1} + w_n$ en fonction de n.

4. Calculer S_n en fonction de u_n et de u_1, puis u_n en fonction de n.

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{3u_n - 1} \end{cases}$

1.On suppose que $\forall \ n \in IN \ \ u_n \neq \dfrac{1}{3}$.Démontrer que $\forall \ n \in IN \ \ u_n \neq 1$.

2.On pose $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$.Démontrer que (v_n) est arithmétique, on précisera sa raison et son premier terme.

3.Calculer v_n puis u_n en fonction de *n*.

4.Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de *n*.

Exercice

Soit la fonction numérique $f : x \mapsto \sqrt{3x - 2}$.

a. Tracer dans un R.O.N la courbe C représentative de f. Préciser les point d'intersection de C et de la droite D d'équation $y = x$.
b. Montrer qu'il existe une unique suite numérique $(U_n)_{n \in IN}$ telle que $U_0 = 4$ et, pour tout $n \geq 0$: $U_{n+1} = \sqrt{3U_n - 2}$. Interpréter graphiquement cette suite.
c. Montrer que $(U_n)_{n \in IN}$ est décroissante et minorée par 2. En conclure que $(U_n)_{n \in IN}$ converge avec $\lim_{n \to +\infty} U_n \geq 2$.
d. Posons $l = \lim_{n \to +\infty} U_n$. Montrer que l vérifie $l = \sqrt{3l - 2}$. En déduire que $l = 2$.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2
2. On définit la suite (v_n) par : $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$. Montrer que $v_{n+1} - v_n = r$ où r est un réel que l'on déterminera.