Exercice 1

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{4} - \frac{7}{4} \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2 *et* u_3. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = u_n - a$ avec $a \in \mathbb{R}$
2) Déterminer a pour que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.
   Déterminer alors sa raison et son 1er terme
3) a) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

b) Exprimer en fonction de n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Exercice 2

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad et$$

$$v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

a) Soit (w_n) la suite définie par : $w_n = u_n + v_n$. Démonter que (w_n) est une suite géométrique.
b) Soit (t_n) la suite définie par : $t_n = u_n - v_n$. Démonter que (t_n) est une suite arithmétique.
c) Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Exercice 3

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{1 + U_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer U_1 et U_2. La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?
2) Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq U_n \leq 3$
3) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$$
4) Calculer V_0; V_1 et V_2. Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.
5) Exprimer V_n en fonction de n.
6) Exprimer U_n en fonction de V_n. Que vaut U_{10}?

Exercice 4

On considère une suite géométrique (U_n) de premier terme $U_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer U_2; U_3 et U_4
2. Calculer U_{20}
3. Calculer la somme $S = U_1 + \cdots + U_{20}$

Exercice 5

On considère les suites (u_n) *et* (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_n = \dfrac{2}{u_n} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2
2) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1
3) 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \qquad (1)$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$

3) Montrer que (u_n) est ↘ et (v_n) est ↗.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n - v_n \leq 1$ et en déduire que $(u_n - v_n)^2 \leq u_n - v_n$ (2)

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \tfrac{1}{4}(u_n - v_n),$$
en déduire que $u_n - v_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

6) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes puis donner leur limite commune.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par :

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}. \end{cases}$ 1) Calculer u_1, u_2, u_3

2) on admet qu'il existe une unique suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3a_n - 1}{3a_n - 2}$

a) démontrer que $a_0 = 1$

b) exprimer u_{n+1} en fonction de a_{n+1}, puis de a_n et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = 3a_n - 1$

c) calculer a, a_2, a_3

3) Soit (b_n) la suite définie par : $b_n = a_n - \frac{1}{2}$

a) montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer b_n en fonction de n.

c) En déduire a_n puis u_n en fonction de n.

d) déterminer la limite de la suite (u_n)

Encadreur : Mansour DIAGNE

« Le refus de l'échec est le commencement de la réussite »

Exercice 7

θ est un réel tel que $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et la suite(U_n) définie pour tout entier n, par :

$$\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_0} \end{cases}$$

1) Calculer U_1 et U_2

2) Montrer que $\forall\, n \in$ IN, $U_n = 2\cos\frac{\theta}{2^n}$

3) Soit la suite(V_n) tel que $V_n = \frac{\theta}{2^n}$

a) Etudier la convergence (V_n).

b) Etudier la convergence de la suite(U_n).

Exercice 8

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}*)$$

1) Justifier que : pour tout k élément de $\mathbb{N}$*,

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

2) En déduire que : pour tout n élément de $\mathbb{N}$*, $2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n$.

3) Etudier la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 9

Soit (U_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad et \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

1) Représenter graphiquement la suite (U_n)

2) Conjecturer à partir du graphique le sens de variations de la suite (U_n)

3) a) Démontrer par récurrence que (U_n)est croissante

b) Démontrer par récurrence que (U_n) est majorée par 2

Que peut on en déduire pour la convergence de la suite (U_n) ?

4a) En utilisant l'encadrement de u_n, montrer que

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$$

b) En déduire que $|u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.

Déterminer la limite de (U_n).

Exercice 10

Soit la fonction définie sur $]-1,3]$ par :

$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$. On note C sa courbe.

1) a) Vérifier que $f'(x) = \frac{4}{\left(\sqrt{-x^2+2x+3}\right)^3}$ sur $]-1,3[$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier le point $A(1,0)$ est un centre de symétrie.

d) Donner une équation de la tangente au point A.

e) Construire la tangente T et la courbe C.

2a) Montrer que f est une bijection de $]-1,3[$ sur $\mathbb{R}$.

On note g la fonction réciproque de f.

b) Tracer la courbe C' de g dans le même repère.

c) Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3a) Montrer que g est dérivable sur et calculer $g'(x)$.

b) en déduire que $0 \leq g'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ si $x \geq 1$

c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$, et que $\alpha \in]2,3[$.

3) Soit la suite u: $\begin{cases} u_0 \geq 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que u converge et donner sa limite.

Encadreur : Mansour DIAGNE